دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

بردارهای فازی کج و کاربرد آن‌ها در مسائل برنامه ریزی امکانی

نگارش

آزیتا سالاری

استاد راهنما

دکتر محمد رضا صافی

استاد مشاور

دکتر دمیرچی

دی ماه ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی

خداوند منان را سپاس می‌گویم که توفیق انجام کاری هر چند کوچک را در راستای علم به من عطا فرمود.

«من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق»

قبل از هر چیز بر خود لازم می‌دانم از زحمات پدر و مادر عزیزم که همیشه مشوق من در تحصیل دانش بوده اند سپاس‌گزاری نمایم و برایشان طول عمر با عزت و سربلندی و سلامتی آرزو نمایم.

بی شک این مقطع از تحصیلاتم را مدیون فداکاریها و زحمات همه جانبه همسرم هستم واز همسر عزیزم که در لحظه لحظه‌های زندگیم همواره همسفری مطمئن است سپاس گزارم.

بدون درایت، هدایت و راهنمایهای همیشگی استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمد رضا صافی که هم از کلاس درس ایشان بهره‌مند بوده‌ام و هم تجربیات و راهنمایی‌های ارزنده خویش را در هدایت این پایان‌نامه صادقانه در اختیار این جانب قرار داده اند، امکان اتمام این کار نبود. از ایزد منان، سلامت، سعادت و موفقیت روز افزون ایشان را خواستارم.

همچنین از استاد محترم آقای دکتر کرامتی، که از کلاس درس ایشان بهره مند بودم و در طول دوران تحصیل همواره راهنمایی بسیار مفید و دانا بودند نهایت تشکر را دارم و از خداوند، سلامتی و توفیق ایشان را خواستارم.

تقدیم به :

ساحت مقدس امام زمان (عج)

پدر و مادر عزیزم

همسر مهربانم و پسر گلم امیر عباس

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به بررسی اعداد فازی غیرتعاملی پرداخته و سپس بردارهای فازی کج معرفی می‌شوند. خواص بردارهای فازی کج و انعطاف‌پذیری آنها مورد بحث قرار گرفته است. سپس نشان داده شده است که مقدار یک تابع خطی به ازاء یک بردار فازی کج، یک عدد فازی است.

بعلاوه مسایل برنامه‌ریزی خطی امکانی، مدل بهینه‌سازی فرکتایل و کاربرد بردارهای فازی کج در برنامه‌ریزی خطی امکانی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی:

اعداد فازی $L-R$ ، بازه‌های فازی ، اعداد فازی تعاملی ، اعداد فازی مرزی ، بردارفازی ، بردار فازی کج ، اندازه های الزام ، اندازه های امکان.

مقدمه

امروزه در بسیاری از مسایل دنیای واقعی با متغیرها و پارامترهای غیر قطعی سرو کار داریم. وجود ابهام در داده‌ها، خطا در استخراج داده‌ها، تصادفی بودن یا نادقیق بودن داده‌ها همگی از عواملی هستند که کار روی پارامترها و متغیرهای غیر قطعی را ایجاب می‌کنند.

با پیدایش نظریه مجموعه‌های فازی کار روی پارامترهای غیرقطعی وارد دنیای جدیدی شد. در ادامه با توسیع روش‌های فازی، بازه‌های فازی وارد عمل شدند [۸] که می‌توانستند بطور موثری پارامترهای غیر قطعی را توصیف نمایند. در ابتدا اعداد فازی غیر تعاملی بکار گرفته شدند [۴] ولی در مسایل برنامه‌ریزی امکانی و رگرسیون خطی به دلیل انعطاف‌پذیری کم این اعداد جای خود را به اعداد فازی تعاملی دادند. دوبیوس[۱] و پرید[۲] [۲] و تاناکا[۳] و ایشی‌بوچی[۴] [۱۱] اعداد فازی تعاملی را به دو شکل مختلف تعریف کرده‌اند. در هر دو تعریف جمع اعداد و مقادیر توابع تعریف شده روی اعداد برای حالت‌های خاص به سادگی به دست می‌آیند.

در تعریف دوبیوس و پرید خاصیت خطی بودن، که در مسایل دنیای واقعی کاربرد بیشتری دارد، حفظ شده است. در تعریف تاناکا و ایشی‌بوچی اعداد فازی تعاملی دارای تابع عضویت درجه دو می‌باشند و مقادیر تابع آنها با محاسبه در تابع خطی بدست نیامده است.

اما در این پایان‌نامه از اعداد فازی تعاملی که با درجه اطمینان بیشتری خاصیت خطی بودن را حفظ می‌کنند استفاده می‌شود. و به این منظور از یک ماتریس غیرمنفرد که ماتریس کجی نامیده می‌شود استفاده می‌شود. فرض می‌شود که متغیرهای غیر قطعی، اعداد غیرتعاملی تحت انتقال خطی به وسیله ماتریس کجی هستند. روشی مشابه توسط رامیک[۵] و ناکامورا[۶] [۱۰] و میاکاوا[۷] [۷] با نام اعداد فازی متعارفی پیشنهاد شده است. با توسعه اعداد فازی متعارفی، بردارهای فازی کج بدست می‌آیند.

این پایان نامه مشتمل بر پنج فصل می‌باشد. در فصل اول مفاهیم مورد نیاز از آنالیز ریاضی و جبر خطی آورده شده است. و همچنین به مفاهیم مقدماتی در مورد اعداد فازی و بازه‌های فازی نیز در

---

[۱] Dubois
[۲] Prade
[۳] Tanaka
[۴] Ishibuchi
[۵] Ramik
[۶] Nakamura
[۷] Miyakawa

این فصل پرداخته‌ایم.

فصل دوم در سه بخش به بردارهای فازی و خواص آنها می‌پردازد. در بخش اول این فصل اصل گسترش و بعضی از خصوصیات کلی بردارهای فازی آمده است. در بخش دوم این فصل یک نوع از بردارهای فازی با نام بردارهای فازی غیرتعاملی معرفی شده است. در بخش سوم محاسبات بردارهای فازی غیرتعاملی در توابع خطی ارایه شده است.

در فصل سوم به بردارهای فازی کج در سه بخش پرداخته‌ایم. در بخش اول تعریف بردار فازی کج و تعریف اعداد فازی مرزی و تعریف‌های مورد نیاز دیگر آورده شد در بخش دوم این فصل سه حالت عدد فازی مرزی را در حل دستگاه آورده‌ایم و در بخش سوم مقادیر تابع خطی بردارهای فازی کج محاسبه شده است.

فصل چهارم مساله‌ی برنامه ریزی خطی امکانی را مورد بحث قرار می‌دهد. در بخش اول آن مقدمات و تعاریف لازم از نظریه‌ی امکان آورده شده‌است. در بخش دوم یک مساله‌ی برنامه‌ریزی امکانی فرمول‌بندی شده است. در بخش سوم این فصل توزیع امکانی روی یک مقدار متغیر تابع خطی امکان ارایه شده است. در بخش چهارم روش فرکتایل در حل مساله برنامه ریزی امکانی مورد بحث قرار گرفته است.

در فصل آخر کاربرد بردارهای فازی کج در برنامه‌ریزی خطی امکانی در دو بخش مورد بررسی قرار گرفته می‌شود. بخش دوم این فصل، الگوریتم حل مسایل با بردارهای فازی کج، همراه با یک مثال عددی ارائه شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه‌ای بر مجموعه‌ها و اعداد فازی

در این فصل پیش نیازهایی که در این پایان نامه نیاز می‌باشد آورده شده است. همچنین اعداد فازی و بازه‌های فازی هم با مثال در این فصل ارائه شده است.

۱—۱ مقدمه‌ای بر آنالیز حقیقی

در بحث مربوط به مسائل بهینه‌سازی در R^n تعاریفی از آنالیز حقیقی مورد نیاز است، در این قسمت به برخی از این مفاهیم می‌پردازیم [۲۰].

تعریف ۱—۱—۱ فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. گردایه‌ی τ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی روی X گویند اگر τ شرایط زیر را داشته باشد:

۱) $X \in \tau$ و $\emptyset \in \tau$،

۲) اگر U و V متعلق به τ باشند آنگاه $U \bigcap V \in \tau$،

۳) اگر $\{V_i : i \in I\}$ یک خانواده از عناصر τ، باشند آنگاه $\bigcup\limits_{i\in I} V_i \in \tau$.

اگر τ یک توپولوژی روی مجموعه‌ی X باشد، آنگاه زوج (X, τ) را یک فضای توپولوژیکی گویند. در قسمت‌های بعد با مفهوم تابع نیم‌پیوسته‌ی بالایی برخورد خواهیم داشت. زیرا توابع عضویت برخی

مجموعه‌های فازی لازم است نیم‌پیوسته‌ی بالایی باشند. بنابراین تعریف تابع نیم‌پیوسته‌ی بالایی در زیر ارائه می‌شود.

تعریف ۱—۱—۲ فرض کنید f یک تابع حقیقی بر یک فضای توپولوژیکی باشد اگر $\{x : f(x) < \beta\}$ به ازای هر β ی حقیقی مجموعه‌ای باز باشد آنگاه f را تابع نیم‌پیوسته‌ی بالایی گویند [۱] .

قضیه ۱—۱—۳ بزرگترین کران پایین هر گردایه از توابع نیم‌پیوسته بالایی، نیم‌پیوسته‌ی بالایی است.
برهان: به مرجع [۱۵] مراجعه شود. □

از آنجا که مجموعه‌ها و توابع محدب نقش کلیدی در مسایل بهینه‌سازی بازی می‌کنند در اینجا به تعاریف آنها می‌پردازیم:

تعریف ۱—۱—۴ زیر مجموعه‌ی $\mathbf{X}$ از E^n ، محدب گفته می‌شود اگر برای هر دو نقطه‌ی مفروض $\mathrm{X}_۱$ و $\mathrm{X}_۲$ از $\mathbf{X}$ و برای هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم:

$$\lambda \mathrm{X}_۱ + (۱ - \lambda)\mathrm{X}_۲ \in \mathbf{X},$$

هر نقطه به شکل $\lambda \mathrm{X}_۱ + (۱ - \lambda)\mathrm{X}_۲$ که در آن $\lambda \in [۰, ۱]$ ، ترکیب محدب $\mathrm{X}_۱$ و $\mathrm{X}_۲$ گفته می‌شود. اگر $\lambda \in (۰, ۱)$ ، آنگاه این ترکیب را به طور اکید محدب گویند.

تعریف ۱—۱—۵ تابع $f : R^n \longrightarrow R$ محدب گفته می‌شود، اگر برای هر دو بردار $\mathbf{X}_۱$ و $\mathbf{X}_۲$ و برای هر $\lambda \in [۰, ۱]$ ، داشته باشیم [۲] :

$$f(\lambda \mathbf{X}_۱ + (۱ - \lambda)\mathbf{X}_۲) \leq \lambda f(\mathbf{X}_۱) + (۱ - \lambda) f(\mathbf{X}_۲).$$

۱—۲ مقایسه‌ی مجموعه‌های معمولی و مجموعه‌های فازی

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵، توسط استاد، لطفی عسکرزاده دانشمند ایرانی و استاد دانشگاه برکلی آمریکا ابداع شد و در مدت کوتاهی در اکثر شاخه‌های علوم، به ویژه در زمینه‌های علوم کاربردی و مهندسی، گسترش چشم گیری یافت [۲۰] .

به طور مختصر، نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، نظریه‌ی کار در شرایط عدم اطمینان و شرایط نادقیق یا مبهم می‌باشد. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و دستگاه‌هایی که نادقیق هستند را صورت بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان، نادقیق یا مبهم فراهم آورد. مفاهیمی مثل زیبایی، بلند قد بودن، کوتاه بودن، تقریباً کم، خیلی زیاد و غیره در نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی قابل استفاده نیستند ولی می‌توانیم آنها را در نظریه‌ی مجموعه‌های فازی به زبان ریاضی در آوریم. برای ورود به‌نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، ابتدا کمی درباره نظریه مجموعه‌های معمولی از دیدگاه تابع مشخصه صحبت می‌کنیم.

فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد، منظور از زیر مجموعه‌ی A از X ، عناصری از X است که دقیقاً مشخص شده باشند. معمولاً عناصرA را با یک خاصیت مشخص می‌کنند که خوش‌تعریف باشد. فرض کنید P چنین خاصیتی باشد، $P(x)$ یک گزاره نما است که می‌گوید x خاصیت P را دارد. به این ترتیب A مجموعه‌ی عناصری از X است که خاصیت P را دارند.

اغلب برای بیان اینکه عنصری مثل x درA هست یا نیست، به ترتیب از نماد $\in$ یا $\notin$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $x \in A$ برای وقتی که x در A هست و یا$x \notin A$ برای وقتی که x در A نیست. بنابراین مجموعه‌ی A را به صورت $A = \{x \in X : P(x)\}$ نشان می‌دهند. به این ترتیب چون P خوش تعریف است برای هر $x \in X$ به طور قطعی می‌توان مشخص کرد که آیا x خاصیت P را دارد یا خیر. بنابراین به طور یقین معلوم می‌شود که آیا x در A هست یا نیست. همین کار را می‌توان با یک تابع که آن را تابع مشخصه‌ی A می‌نامیم انجام داد.

تعریف ۱–۲–۱ تابع $\chi_A : X \longrightarrow \{۰, ۱\}$ با ضابطه‌ی:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A, \\ \\ ۰ & x \notin A. \end{cases}$$

را تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A می‌گویند.

به این ترتیب مجموعه‌ی A را می‌توان به صورت $A = \{(x, \chi_A(x)) : x \in X\}$ هم نمایش داد.

مثال ۱–۲–۲ فرض کنید X مجموعه اعداد صحیح مثبت باشد و P خاصیت کمتر از ۱۰ بودن باشد. چنانچه مجموعه‌ی A عناصری از X باشد. که خاصیت P را دارند می‌نویسیم:

$$A = \{x \in X : x < ۱۰\},$$

به این ترتیب عناصر A کاملاً مشخص خواهند بود. یعنی: $A = \{۱, ۲, \ldots, ۹\}$ مجموعه A را می‌توان به صورت زیر هم نوشت.

$$A = \{(۱, ۱), (۲, ۱), (۳, ۱), \ldots, (۹, ۱), (۱۰, ۰), (۱۱, ۰), \ldots\}.$$

فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از X باشند در این صورت به کمک تابع مشخصه، مفاهیم مجموعه تهی، اجتماع، اشتراک، متمم، زیرمجموعه بودن، و تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

۱) $\emptyset = \{(x, ۰) : \forall x \in X\}$ ،

۲) $\chi_{A \bigcup B}(x) = \max\limits_{x \in X}\{\chi_A(x)\ ,\ \chi_B(x)\}$ ،

۳) $\chi_{A \bigcap B}(x) = \min\limits_{x \in X}\{\chi_A(x)\ ,\ \chi_B(x)\}$ ،

۴) $A \subseteq B \ \Leftrightarrow\ \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \quad \forall x \in X$ ،

۵) $A = B \ \Leftrightarrow\ \chi_A(x) = \chi_B(x) \quad \forall x \in X$ ،

۶) **برای متمم مجموعه‌ی A یعنی** A' $\quad \forall x \in X \quad \chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

چنانچه P یک خاصیت خوش تعریف در X نباشد، دیگر نمی‌توان با شرایط بالا اعضاء A را معین کرد. برای نمونه، در مثال بالا چنانچه خاصیت P به جای « کمتر از ۱۰ » ؛ «خیلی کمتر از ۱۰» باشد دیگر نمی توان عناصر A را معلوم کرد. خاصیت «خیلی کمتر از ۱۰» خوش تعریف نیست و دارای ابهام است. از نظر یک شخص ممکن است عدد ۵ خیلی کمتر از ۱۰ باشد و از نظر شخص دیگر چنین نباشد. بنابراین میزان عضویت عدد ۵ در مجموعه‌ی اعداد خیلی کمتر از ۱۰ از نظرافراد مختلف متفاوت است. به عبارت دیگر میزان رضایت هر فرد از عضویت عدد ۵ در مجموعه یاد شده یکسان نیست. در اینجا مفهوم تابع عضویت می تواند کار گشا باشد. در واقع تابع مشخصه نیز یک نوع تابع عضویت است که عناصر برد آن، $\{0,1\}$ است. چنانچه برد تابع عضویت را زیر مجموعه‌ی دلخواهی از $[0,1]$ قرار دهیم، مفهوم زیرمجموعه‌ی فازی نمایان می‌شود. مثال زیر تعمیم مثال بالا برای حالتی است که P خاصیت «خیلی کمتر از ۱۰» باشد و در آن با یک تغییر در تابع مشخصه A عناصر برد تابع عضویت، از مجموعه $[0,1]$ انتخاب شده‌اند و خود مجموعه با $\widetilde{A}$ نمایش داده شده است .

مثال ۱–۲–۳ فرض کنید X مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت باشد. و $\widetilde{A}$ مجموعه‌ی اعداد «خیلی کمتر از ۱۰» باشد که به صورت زیر معین شده است:

$$\widetilde{A} = \{(0,1),(2,1),(3,1),(4,0/7),(5,0/5),(6,0/3),(7,0/1),(8,0)\}$$

و همچنین هر عضو X که در $\widetilde{A}$ ذکر نشده است درجه‌ی عضویت صفر را در $\widetilde{A}$ دارد. به این ترتیب $\widetilde{A}$ به عنوان یک زیر مجموعه فازی X معرفی شده است.

آنچه از این مثال نتیجه می‌شود، آن است که یک زیرمجموعه‌ی فازی از مجموعه X به جای تابع مشخصه یعنی χ_A با تابعی به نام تابع عضویت مشخص می‌شود. که ما آن را با $\widetilde{A}$ نشان می‌دهیم. بنابراین زیرمجموعه‌ی فازی از یک مجموعه‌ی معمولی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱—۲—۴ فرض کنید X یک مجموعه‌ی قطعی[۱] باشد، زیرمجموعه فازی $\widetilde{A}$ از مجموعه X ، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت زیر است:

$$\widetilde{A}=\{(x,\widetilde{A}(x)):x\in X\}\ ,$$

که در آن تابع $\widetilde{A}:X\rightarrow[۰,۱]$ تابع عضویت و $\widetilde{A}(x)$ درجه‌ی عضویت x در $\widetilde{A}$ نامیده می‌شود.

مشابه مجموعه‌های قطعی، می‌توان مفاهیم اجتماع، اشتراک، متمم، زیر مجموعه و تساوی دو مجموعه‌ی فازی را تعریف کرد. برای راحتی کار، مجموعه‌ی همه توابع از مجموعه‌ی معین X به $[۰,۱]$ را با نماد $F(X)$ نشان می‌دهیم. یعنی:

$$F(X)=\{\widetilde{A}|\widetilde{A}:X\rightarrow[۰,۱]\}\ .$$

تعریف ۱—۲—۵ فرض کنید $\widetilde{A},\widetilde{B}\in F(X)$ در این صورت $\forall x\in X$:

۱) $\widetilde{U}=\widetilde{A}\bigcup\widetilde{B}\Leftrightarrow\widetilde{U}(x)=\max\{\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(x)\}$ ،

۲) $\widetilde{U}=\widetilde{A}\bigcap\widetilde{B}\Leftrightarrow\widetilde{U}(x)=\min\{\widetilde{A}(x),\widetilde{B}(x)\}$ ،

به طور کلی برای یک خانواده از مجموعه‌های فازی در X ،

۳) $\widetilde{U}=\bigcup_{i\in I}\widetilde{A}_i\Leftrightarrow\widetilde{U}(x)=\sup_{i\in I}\{\widetilde{A}_i(x)\}$ ،

۴) $\widetilde{U}=\bigcap_{i\in I}\widetilde{A}_i\Leftrightarrow\widetilde{U}(x)=\inf_{i\in I}\{\widetilde{A}_i(x)\}$ ،

۵) برای متمم مجموعه‌ی $\widetilde{A}$ یعنی $\widetilde{A}'$: $\widetilde{A}'\Leftrightarrow\widetilde{A}'(x)=۱-\widetilde{A}(x)$ ،(متمم $\widetilde{A}$ است)

۶) $\widetilde{A}\subseteq\widetilde{B}\Leftrightarrow\widetilde{A}(x)\leq\widetilde{B}(x)$ ،

۷) $\widetilde{A}=\widetilde{B}\Leftrightarrow\widetilde{A}(x)=\widetilde{B}(x)$.

علاوه بر عملگرهای تعریف شده در بالا تعدادی عملگر دیگر نیز بر مجموعه‌های فازی تعریف شده‌اند. در زیر به بعضی از آنها که کاربردهای مختلفی دارند اشاره می‌کنیم [۱۹] .

---
[۱] Crisp

تعریف ۱–۲–۶ جمع جبری دو مجموعه‌ی فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ که با $\widetilde{A}+\widetilde{B}$ نشان داده می‌شود، به صورت یک مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(\widetilde{A}+\widetilde{B})(x)=\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)-\widetilde{A}(x).\widetilde{B}(x)\ .$$

تعریف ۱–۲–۷ جمع کراندار دو مجموعه‌ی فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ که با $\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}$ نشان داده می‌شود، به صورت یک مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B})(x)=\min\{۱\ ,\ \widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)\}\ .$$

تعریف ۱–۲–۸ تفاضل کراندار دو مجموعه‌ی فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ که با $\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}$ نشان داده می‌شود، به صورت یک مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(\widetilde{A}\ominus\widetilde{B})(x)=\max\{۰\ ,\ \widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)-۱\}\ .$$

تعریف ۱–۲–۹ حاصلضرب جبری دو مجموعه‌ی فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ که با $\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}$ نشان داده می‌شود، به صورت یک مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(\widetilde{A}.\widetilde{B})(x)=\widetilde{A}(x)\cdot\widetilde{B}(x)\ .$$

تعریف ۱–۲–۱۰ اگر $\widetilde{A}_۱,\dots,\widetilde{A}_n$ به ترتیب زیرمجموعه‌های فازی از $X_۱,\dots,X_n$ باشند، حاصلضرب دکارتی $\widetilde{A}_۱,\dots,\widetilde{A}_n$ که با $\widetilde{A}_۱\times\dots\times\widetilde{A}_n$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\widetilde{A}_۱\times\dots\times\widetilde{A}_n)(x_۱,\dots,x_n)=\min_{i=۱,\dots,n}\{\widetilde{A}_i(x_i)\}\ .$$

۱—۳ اعداد فازی

در بسیاری مواقع لازم است از اطلاعات نادقیق عددی استفاده کنیم، جمله‌هایی مانند «حدود یازده»، «نزدیک صفر» و نظیر اینها اغلب به کار می روند. چنین کمیت‌هایی را می توان با به کار بردن نظریه‌ی مجموعه فازی، به صورت زیر مجموعه‌های فازی از اعداد حقیقی نشان داد. در واقع هر زیرمجموعه از اعداد حقیقی را یک کمیت فازی می‌گوییم. اما آنچه که در این پایان‌نامه بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، اعداد فازی هستند. اعداد فازی همان کمیت‌های فازی هستند که تابع عضویت آنها خواص ویژه‌ای دارند. در این پایان‌نامه اعداد فازی به شکل زیر تعریف می‌شوند [۷] :

تعریف ۱—۳—۱ یک عدد فازی یک زیر مجموعه‌ی فازی A ، از خط حقیقی R است که با تابع عضویت μ_A نشان داده می‌شود، و در موارد زیر صدق می‌کند:

۱) دقیقاً یک $r \in R$ وجود دارد که $\mu_A(r) = 1$ ،

۲) μ_A نیمه پیوسته بالایی است یعنی برای هر $r_0 \in R$ ، $\mu_A(r_0) \geq \limsup_{r \to r_0} \mu_A(r)$ ،

۳) μ_A شبه مقعر است یعنی برای هر $r_1, r_2 \in R$ و $k \in [0, 1]$ ،

$$\min\left\{\mu_A(r_1), \mu_A(r_2)\right\} \leq \mu_A(kr_1 + (1-k)r_2),$$

۴) $\lim_{r \to +\infty} \mu_A(r) = \lim_{r \to -\infty} \mu_A(r) = 0$.

h برش قوی و h برش ضعیف از یک زیر مجموعه‌ی فازی A ، که با $(A)_h$ و $[A]_h$ نشان داده می‌شود، زیر مجموعه‌های معمولی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(A)_h = \{r | \mu_A(r) > h\} \tag{۱.۱}$$

$$[A]_h = \{r | \mu_A(r) \geq h\} \tag{۲.۱}$$

چنانچه A یک عدد فازی باشد درباره h برش‌های A احکام زیر درست هستند:

۱) $[A]_1$ نا تهی است.

۲) برای هر $h \in (0,1]$ ، $[A]_h$ یک مجموعه‌ی بسته است.

۳) برای هر $h \in (0,1]$ ، $[A]_h$ یک مجموعه‌ی محدب است.

۴) برای هر $h \in (0,1]$ ، $[A]_h$ یک مجموعه‌ی کراندار است.

با ترکیب ۳ و ۴ ، برای هر $h \in (0,1]$ ، خاصیت زیر را خواهیم داشت:

۵) $[A]_h$ یک بازه‌ی بسته و کراندار است و به صورت $[A]_h = [a^L(h)\ ,\ a^R(h)]$ می‌باشد.

فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرجع و A یک زیرمجموعه‌ی فازی از آن باشد. مجموعه‌ی نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_A(x) > 0$ ، تکیه گاه A نامیده شده و با $suppA$ نشان داده می‌شود. مقدار $M = \sup_x \mu_A(x)$ ارتفاع مجموعه‌ی A نامیده می‌شود. اگر x عنصری باشد که برای آن $\mu_A(x) = \frac{1}{2}$ ، x را یک نقطه گذر (معبر) A گوییم [۱۹] .

کار با اعداد فازی مستلزم محاسبات طولانی و پیچیده است. و این برای اهداف عملی مناسب نیست، زیرا هنگام استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، مانند هر نظریه دیگر، در مواجهه با مسائل عملی و کاربردی، کارایی محاسباتی بسیار اهمیت دارد. با معرفی اعداد فازی LR تا اندازه‌ای کار آسان شده است. این اعداد نوع خاصی از اعداد فازی هستند که ویژگی آن در نوع تابع عضویت آنهاست. خواهیم دید که اعمال جبری با این نوع اعداد فازی بسیار ساده و دارای یک الگوی مشخص است. این ویژگی باعث شده است که در بسیاری از کاربردهای نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، از این نوع اعداد استفاده شود در زیر به معرفی این نوع از اعداد می‌پردازیم.

تعریف ۱−۳−۲ زیر مجموعه‌ی فازی A از اعداد حقیقی را یک عدد فازی LR گویند هرگاه [۱۹] :

$$\mu_A(r) = \begin{cases} L(\frac{m-r}{\alpha}) & r \leq m, \\ \\ R(\frac{r-m}{\beta}) & r > m, \end{cases} \tag{۳.۱}$$

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از R^+ به $[0,1]$ و $\alpha\ ,\ \beta$ دو عدد حقیقی مثبت

و $L(\circ) = R(\circ) = 1$. در این صورت A را با نماد $A = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. $\alpha > \circ$, $\beta > \circ$ به ترتیب پهنای راست و پهنای چپ A و m مقدار نمایی یا میانه گفته می‌شوند. L و R توابع مرجع نامیده می‌شوند. در چنین شرایطی A را عدد فازی «تقریباً m » یا «در حدود m » نامیده می‌شود.

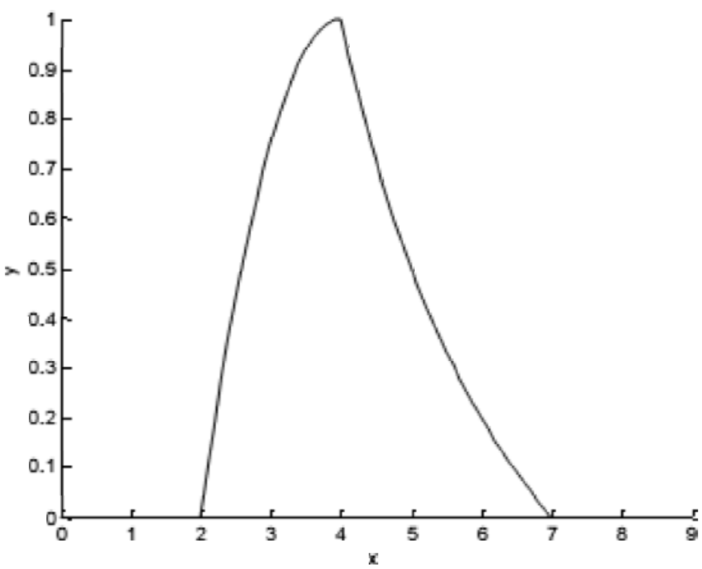
از توابع مختلفی می‌توان برای $L(r)$ و به طور مشابه برای $R(r)$ ، استفاده کرد. رایج‌ترین آنها عبارتند از:

$$L(r) = max(\circ, 1 - r^p) \quad p > \circ \, , \qquad L(r) = e^{-r} \, ,$$

$$L(r) = e^{-r^2} \, , \qquad L(r) = \frac{1}{1 + |x|^p} \, .$$

بدیهی است که در هر زمینه، باید توابع L و R مناسبی اختیار کرد.

مثال ۱-۳-۳ فرض کنید برای نمایش عدد فازی «تقریباً ۴ » $\alpha = 2$, $\beta = 3$ بگیریم و $L(x) = \frac{-x^2}{4} + 4x - 3$ و $R(x) = \frac{7 - x}{x - 1}$ در این صورت نمودار این عدد به صورت زیر است:



شکل ۱.۲ نمودار تابع عضویت عدد فازی تقریباً چهار