بسم اللّٰه الرحمن الرحيم

دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان پایان نامه:

بعد مجانبی فضاهای متریک و گروههای با تولید متناهی

استاد راهنما:

دکتر مهدی سبزواری

دانشجو:

ذبیح زارعی

اسفندماه 1388

چکیده:

نظریه ابعاد یکی از قدیمی ترین شاخه های توپولوژی عمومی می باشدکه توسط سه ریاضیدان مشهور بنامهای پوانکاره[1] و بروور[2] و لبگ[3] رشدوتوسعه یافت. بعد مجانبی نیز همتای مجانبی بعد پوششی می باشد که اولین بار توسط آقای گروموف جهت مطالعه پایایی مجانبی گروههای گسسته تعریف شد .

در این تحقیق، ابتدا فضا های متری وساختاردرشت بافت را معرفی می کنیم و سپس بعد مجانبی آنها را بدست می آوریم، که لازمه اینکار اینست که ابتدا هندسه بزرگ مقیاس معرفی و تعریفی از بعد مجانبی ارائه گشته و سپس پایایی بعد مجانبی در مقیاس بزرگ مورد بررسی قرار گرفته ودر ادامه ثابت می کنیم که اگر X, Y دو فضای متری باشندآنگاه:

$$\mathrm{asdim}(X \times Y) \leq \mathrm{asdim}X + \mathrm{asdim}Y$$

درادامه بعد مجانبی تابع را ارائه داده و ثابت می شود که اگر $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع بزرگ مقیاس یکنواخت بین فضاهای متریک باشدآنگاه :

$$\mathrm{asdim}\, X \leq \mathrm{asdim}\, Y + \mathrm{asdim}\, f$$

ودر ادامه، بعد استقرایی و بعد استقرایی مجانبی تعریف شده و ثابت می شود که‌اگر X فضای متریک سره و νX ، هیگسون –کرونای X باشد(که νX باقیمانده X از فشرده سازی هیگسون X می باشد) آنگاه :

$$\mathrm{asInd}\, X \geq \mathrm{Ind}\, \nu X$$

و ارتباط بین $\mathrm{asdim}\, X$ و $\mathrm{asInd}\, X$ در فضای متریک سره مشخص می شود .

و درادامه ثابت می شود که بعد گروههای با تولید متناهی از رابطه زیر بدست می آید :

$$\mathrm{asdim}\, G = \sup\{\mathrm{asdim}\, F \mid F \subset G \text{ متناهی المولد باشد}\}$$

ودر پایان گروههای با بعد مجانبی صفر را مورد بررسی قرار می دهیم .

کلمات کلیدی:

بعد مجانبی ، نگاشت بطور یکنواخت، فشرده سازی، نشاندنی بطور درشت بافت یکنواخت، تابع کنترلی، تابع وزنی ، نگاشت درشت بافت، بعد استقرایی .

1 . Poincare
2 . Brouwer
3 . Lebesgue

تقدیم به:

پدر و مادر و همسر فداکارم که تمام هستی و تلاشم را مدیون وجودشان هستم، در تار و پود زندگیم جای داشته و بهانه های زیبای زندگیم هستند.

تقدیر و تشکر:

سپاس صمیمانه ام را به استاد عزیزم جناب آقای دکتر مهدی سبزواری که در مراحل گوناگون تحصیل و پایان نامه حمایت علمی خویش را از بنده دریغ ننمودند وجناب آقای دکتر قاسم میر حسین خانی، که در طول تحصیل از نظرات ارزشمندشان استفاده نمودم، تقدیم می کنم.

در نهایت ازخانواده خودم و دوستان و همکلاسیهای عزیزیم که در این مدت هر آنچه می دانستند به من آموختند، نهایت تشکر را دارم و زندگی همراه با پیروزی و کامیابی را برایشان آرزومندم.

فهرست مطالب

مقدمه:

نظریه بعد یکی از قدیمی ترین شاخه های توپولوژی عمومی می باشد . این نظریه بوسیله سه ریاضیدان برجسته بنامهای پوانکاره[۱] و بروور[۲] و لبگ[۳] رشد و پرورش یافت .

تعبیر په آنو[۴] در سال ۱۸۹۰ از نگاشت پیوسته ای از یک قطعه در یک مربع ، مساله را مطرح ساخت که بعد فضای اقلیدسی یک پایایی توپولوژیکی است و این مساله در سال ۱۹۱۱ بوسیله بروور حل شد[25] .

گام مهم دیگری در جهت تعریف بعد در سال ۱۹۱۱ توسط لبگ برداشته شد . او اولین ریاضیدانی بود که ارتباط بین بعد و مرتبه پوششها را دریافت و در ابتدا نظریه وی توسط بروور در سال ۱۹۱۳ اثبات شد[26] و سپس در سال ۱۹۲۱ خود لبگ، نظریه اش را ثابت کرد [27] . بعد پوششی (Dim) در واقع همان بعد لبگ می باشد .

در سال ۱۹۲۱ پوانکاره یک مقاله توضیحی در باره بعد بزرگ استقرایی(Ind) ارائه کرد وسپس در مقاله دیگری ثابت کرد که: $Ind\,\mathbb{R}^n = n$

بعد از آن نیز اوریسون ثابت کرد که اگر X یک فضای هاسدورف فشرده باشد: $\dim X = IndX = indX$

که $indX$ بعد کوچک استقرایی می باشد .

بعد مجانبی نیز یکی از مفاهیمی است که در هندسه بزرگ مقیاس مورد توجه قرار گرفته است ودر واقع همتای مجانبی بعد پوششی می باشد و اولین بار توسط گروموف[۵] [7]، جهت مطالعه گروههای گسسته و هندسه و ثابتهای توپولوژیکی منیفلدهای وابسته به گروههای بنیادی پدید آمد .

---
1 . Poincare
2 . Brouwer
3 . Lebesgue
4 . Peano
5 . Gromove

فصل اول

پیشنیازها و مقدمات

1.1 پیشنیازها

1.1.1 تعریف . فرض کنید $X \neq \emptyset$ و $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\circ\}$ تابعی باشد که در شرایط زیر صدق می کند:

الف) $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$ به ازای هر $x, y \in X$.

ب) $d(x,y) = d(y,x)$ به ازای هر $x, y \in X$.

ج) d در نامساوی مثلثی صدق کند یعنی به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

در این صورت d یک متریک در X است و (X, d) یک فضای متریک است .

2.1.1 تعریف . اگر (X, d_X) و(Y, d_Y) فضا های متریک باشند، آنگاه نگاشت$f: X \rightarrow Y$ را یک ایزومتری (طولپا)نامند اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$d_Y\big(f(x), f(y)\big) = d_X(x,y)$$

3.1.1 مثال :

مجموعه X داده شده است می توانیم متریک بصورت زیر تعریف کنیم که مترگسسته نام دارد .

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ \circ & x = y \end{cases}$$

4.1.1 مثال:

فرض $X = \mathbb{R}^n$ و $x, y \in \mathbb{R}^n$ تعریف می کنیم:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

این متریک روی $\mathbb{R}^n$ متریک مانهاتان نامیده می شود . این متریک برای محاسبه فواصل، هنگامی که خیابانهای مرکز شهر را طی می کنیم بکار می رود .

5.1.1 مثال (فضای مینکوفسکی) .

برای ساختن فضای مینکوفسکی فضای $\mathbb{R}^n$ مجهز به معادله درجه دوم بشکل زیر را ملاحظه کنید:

$$Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$Q(x) = {x_0}^2 - {x_1}^2 \dots . - {x_n}^2$$

و سپس شکل دوخطی $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

که بافرمول :

$$\mathcal{L}(x,y) = \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}$$

تعریف می شود را در نظر گرفته و متریک $d = \operatorname{arccosh}\mathcal{L}(x,y)$ را تعریف می کنیم .

6.1.1 مثال: (فضای هذلولی)

فضای هذلولی $\mathbb{H}^n$ بصورت زیر فضایی از فضای مینکوفسکی بصورت

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | Q(x) \geq \circ\}$$

تعریف می شود .

7.1.1 تعریف . فرض کنیم (X, d) یک فضای متری و A, B زیر مجموعه هایی ناتهی از X باشند . همچنین فرض می کنیم $x \in X$ در این صورت فاصله x از A که با $d(x, A)$ نشان داده می شود عبارتست از :

$d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}$

به علاوه فاصله دو مجموعه A, B که با $d(A, B)$ نشان داده می شود عبارتست از:

$d(A, B) = \inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}$

8.1.1 تعریف. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری و A زیر مجموعه هایی ناتهی از X باشد . در اینصورت قطر A که آنرا با $\operatorname{diam}(A)$ نشان می دهیم عبارتست از:

$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$

9.1.1 تعریف. فرض کنیم X مجموعه ای باشد و $A \subseteq X$ ، گردایه $\mathcal{U}$ از زیر مجموعه های X را یک پوشش برای A (یا یک پوشش A)خوانیم در صورتیکه : $A \subseteq \bigcup_{u \in \mathcal{U}} u$

به بیان دیگر گوئیم $\mathcal{U}$ مجموعه A را می پوشاند .

10.1.1 تعریف . فرض کنیم $\mathcal{V}$ گردایه ای از زیر مجموعه های فضای X باشد . گردایه $\mathcal{U}$ از زیر مجموعه های X را یک تظریف $\mathcal{V}$ خوانیم (یا گوییم $\mathcal{V}$ را ظریف می کند)در صورتی که به ازای هر عضو مانند $\mathcal{U}$ عضوی مانند V از $\mathcal{V}$ یافت شود بطوریکه حاوی U باشد .

11.1.1 تعریف . اگر (X, d_X) فضا یی متریک باشد و $A \subseteq X$، همسایگی باز به شعاع R از A یا R-همسایگی باز، بصورت زیر تعریف می شود .

$$N_R(A) = \{x \in X | d_X(x, A) < R\}$$

12.1.1 تعریف . اگر (X, d_X) فضا یی متریک باشد و $A \subseteq X$، گوی بسته به شعاع R از A یا R-گوی بصورت زیر تعریف می شود .

$$B_R(A) = \{x \in X | d_X(x, A) \leq R\}$$

13.1.1 تعریف . فرض کنیم $f: X \to Y$ یک نگاشت پیوسته یک بیک باشد که در آن X و Y دو فضای توپولوژیک اند . فرض کنیم Z مجموعه تصویر f(X) باشد و آن را بعنوان یک زیر فضای Y در نظر می گیریم . در اینصورت تابع $\bar{f}: X \to Z$ که از تحدید حوزه مقادیر f بدست می آید دوسویی است. اگر $\bar{f}$ هومئومورفیسمی بین X و Z باشد ، گوییم نگاشت $f: X \to Z$ یک نشاننده توپولوژیک است .

14.1.1 قضیه(نشاندن) . فرض کنید X فضای هاسدورف و $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ گردایه ای از توابع پیوسته ی $f_\alpha: X \longrightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت باشند که به ازای هر $x_\circ$ از X و هر همسایگی $x_\circ$ مانند U اندیسی مانند α موجود باشد بطوریکه $f_\alpha(x_\circ) > \circ$ و f_α در خارج از U صفر شود . در این صورت ، تابع $F: X \longrightarrow \mathbb{R}^J$ با ضابطه $F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$ نشاننده ای از X در $\mathbb{R}^J$ است .

اثبات: [22]

15.1.1 قضیه (تیخونوف[1]) . هر حاصلضرب دلخواه از فضاهای فشرده با توپولوژی حاصلضربی، فشرده است .

اثبات: [22]

جان. رو[2]، ریاضیدانی است که راه اصولی تعریف اشیاء درشت بافت بدون اشاره به متریک را یافت و مثالهایی از ساختارهای درشت بافتی را مطرح کرد که دارای متریک نبودند[۱۳] .

16.1.1 تعریف . (ساختار درشت بافت) فرض کنید X یک مجموعه باشد . گردایه $\mathcal{E}$ از زیر مجموعه های $X \times X$ را یک ساختار درشت بافت نامیده وهر عنصر $\mathcal{E}$ را یک " کنترل " نامند(هر کنترل را با E نمایش می دهیم)، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

1)هر زیر مجموعه ای از یک کنترل ، کنترل باشد .

---

1 . Tychonoff
2 . John Roe

2)هر اجتماع متناهی از کنترلها ، کنترل باشد .

3)قطر $\Delta_X := \{(x,x) | x \in X\}$ ، یک کنترل باشد

4)معکوس یک کنترل ، کنترل باشد . $E^{-1} := \{(y,x) \in X \times X | (x,y) \in E\}$

5)ترکیب E_1E_2 از کنترلهای E_1 و E_2 یک کنترل باشد

$$E_1E_2 := \{(x,z) \in X \times X | \exists_{y \in X} (x,y) \in E_1 \, , (y,z) \in E_2\}$$

زوج $(X,\mathcal{E})$ را فضای درشت بافت نامند .

فصل دوم

بعد مجانبی

در حقیقت ، فکر پشت هندسه بزرگ مقیاس اینست که فضا را تنها در مقیاس بزرگ مورد بررسی قرار می دهد و تمامی ساختارهای بینهایت کوچک و موضعی (هندسی یا توپولوژی)را فرو می گذاردو تنها خواص هندسی که بطور کلی رخ می دهندرا مطالعه می کند . اشیاء مورد مطالعه در هندسه بزرگ مقیاس فضاهای متریک بیکران و همچنین منیفلدهای ریمانی باز کامل و ... می باشند مثلا هندسه درشت بافت در فضاهای متریک به مطالعه نقاطی می پردازد که از هم دورند. یکی از مطالبی که در هندسه بزرگ مقیاس مورد توجه قرار گرفته است بعد مجانبی می باشد .

1 . 2 **تعاریف** .

1.1.2تعریف. کثرت(مرتبه) یک پوشش $\mathcal{U}$ ازX بیشترین تعداد عناصر پوشش می باشد که اشتراکشان غیر تهی باشد و با $\mu(\mathcal{U})$ نمایش می ده‌ند .

همچنین، r-کثرت یک خانواده $\mathcal{U}$ از زیر مجموعه های X بزرگترین عدد n ی میباشد بطوریکه $x \in X$ موجود باشد بقسمی که گویی به مرکز x و شعاع r ($B_r(x)$)، n تا از مجموعه های $\mathcal{U}$ را قطع کند یابعبارت دیگر

$$r\text{-}\mu(\mathcal{U}) = \sup_{x\in X} \operatorname{card}\left\{U \in \mathcal{U} | U \cap B_r(x) \neq \emptyset\right\}$$

2.1.2 تعریف . عدد لبگ[1] یک پوشش $\mathcal{U}$ از X بزرگترین عددی مانند λ می باشد بطوریکه اگر $A \subset X$ و $diam(A) \leq \lambda$ آنگاه $U \in \mathcal{U}$ موجود باشد بطوریکه $A \subset U$ وبا $L(\mathcal{U})$نمایش می دهند . یا بعبارت دیگر:

$$L(\mathcal{U}) = \inf_{x\in X}\left\{\sup\{d(x, X\backslash U) | U \in \mathcal{U}\}\right\}$$

3.1.2 تعریف . فرض کنیم $r < \infty$ و X فضایی متری باشد، گوییم یک خانواده $\mathcal{U}$ از زیر مجموعه های X ، r-مجزاست اگر برای هر $U, \acute{U} \in \mathcal{U}$ بطوریکه $U \neq \acute{U}$ داشته باشیم:

$$d(U, \acute{U}) > r$$

4.1.2 تعریف . یک خانواده $\mathcal{U}$ از زیر مجموعه های X را بطور یکنواخت کراندار گوییم اگر:

$$\operatorname{diam}\left(\mathcal{U}\right) < \infty$$

که

$$\operatorname{diam}\left(\mathcal{U}\right) = \sup\{\operatorname{diam}(U) | U \in \mathcal{U}\}$$

---

[1] . Lebesgue number

5.1.2 تعریف . یک خانواده $\mathcal{U}$ از زیر مجموعه های X را R-کراندار گوییم اگر عدد مثبتی مانند R، موجود باشد بطوری که برای هر $U \in \mathcal{U}$ داشته باشیم:

$$\operatorname{diam}(U) < R$$

6.1.2 تعریف . متریک $d: X \times X \to \mathbb{R}$ روی یک فضای X را سره گوییم اگر زیر مجموعه های بسته وکراندارX فشرده باشند و فضای متری (X, d)سره است هرگاه متریک d سره باشد .

2 . 2 انواع نگاشتها

1.2.2تعریف . فرض کنید X و Y دو فضای متری و $f: X \to Y$ نگاشت بین آنها باشد .

الف)نگاشتf سره است اگر نقش معکوس هر مجموعه کرانداری ازY تحتf مجموعه ای کراندار درX باشد .

ب)نگاشتf را بطور یکنواخت(برنولوجوس) نامند اگر برای هر $R > 0$ ، $S > 0$ ی موجود باشد بطوریکه:

$$d_X(x, y) < R \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < S$$

ج)نگاشتf را درشت بافت نامند اگر حقیقی و بطور یکنواخت باشد .

توجه کنید که بطوریکنواخت بودن نگاشتf پیوستگی آنرا ایجاب نمی کندکه مثال آن در پی می آید .

2 . 2 . 2 مثال .

الف) فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و $Y = \mathbb{Z}$ و $f(x) = [x]$ آنگاه f بطور یکنواخت است .

اثبات:با توجه به رابطه زیر:

$$f(x) \leq x < f(x) + 1 \quad \forall x \in X$$

برای هر $R > 0$ ، $S = R + 1 > 0$ ی موجود می باشد بطوریکه اگر:

$$d(x, y) < R \Rightarrow d(f(x), f(y)) = d([x], [y]) < R + 1 = S$$

بنابراین f بطور یکنواخت است . اماfدر هر نقطه صحیح در $\mathbb{R}$ پیوسته نیست .

ب) برای هر فضای متری نگاشت همانی $id_X: X \to X$ همواره درشت بافت است .

ج) اگر X زیر فضایی از فضای متریY باشد آنگاه نگاشت شمول $x \hookrightarrow x$ درشت بافت است .

د)فرض کنید X و Yدو فضای متری و $f: X \to Y$ نگاشت بین آنها باشد، اگرX کراندار باشدآنگاهf سره است و اگرY کراندار باشدf بطور یکنواخت و اگرX و Y هردو کراندار باشند، f نگاشتی درشت بافت است . [17]

و)هر ایزومتری، بوضوح سره وبا در نظر گرفتن $S = R$ بطور یکنواخت ودر نتیجه درشت بافت است .

2 . 2 . 3 تعریف . نگاشت $f: X \to Y$ بین دو فضای متری X و Y را لیپ شیتز نامند اگر $\lambda \in \mathbb{R}^+$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \lambda d(x, y)$$

بوضوح هر نگاشت لیپ شیتز، بطور یکنواخت می باشد . کافیست برای هر $R > 0$ ، مجموعه $S = \lambda R$ قرار دهیم . هم چنین نگاشت $f: X \longrightarrow Y$ را لیپ شیتز بزرگ–مقیاس گوییم اگر ثابتهای $L, C > 0$موجود باشند بطوریکه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq L d_X(x, y) + C$$

2 . 2 . 4 تعریف . دونگاشت f, g از یک مجموعه X در یک فضای متریک (Y, d) مجاورند ومی نویسیم $f \sim g$. اگر در X بطور یکنواخت کراندار باشند یعنی برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$d(f(x), g(x)) < \infty$$

2 . 2 . 5 مثال . دو نگاشت ثابت مانند k, l در یک فضای متریک (Y, d) همواره مجاورند زیرا $d(k(x), l(x))$ ثابت است و بنابر این درX بطور یکنواخت کراندار است .

2 . 3 **بعد پوششی**

2.3.1 تعریف . فرض کنید $\mathcal{U}$ گردایه ای در فضای توپولوژی X و p یک نقطه ازX باشد . مرتبه $\mathcal{U}$ در p تعداد عناصری از $\mathcal{U}$ است که شامل نقطه p می باشند . و با نماد $\mathrm{ord}_p\mathcal{U}$ مشخص می شود . اگر تعداد نامتناهی عنصر موجود باشد آنگاه داریم: $\mathrm{ord}_p\mathcal{U} = \infty$

و مرتبه $\mathcal{U}$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{ord}\,\mathcal{U} = \sup\{\mathrm{ord}_p\mathcal{U} \mid p \in X\}$$

2.3.2 تعریف .   اگر برای هر پوشش باز متناهی $\mathcal{U}$ از یک فضای توپولوژی X پوشش بازی مانند $\mathcal{V}$ باشد بطوریکه $\mathcal{V}$ تظریفی از $\mathcal{U}$ باشدو $\mathrm{ord}\,\mathcal{V} \leq n+1$. آنگاه X دارای بعد پوششی کوچکتر مساوی n است و با نماد $\dim X \leq n$ نمایش می دهند .

ت۱) $\dim X = n$ ، اگر $\dim X \leq n$ و $\dim X \nleq n-1$.

ت۲)   اگربرای هر n داشته باشیم $\dim X \nleq n$ آنگاه $\dim X = \infty$.

ت۳) $\dim \emptyset = ۰$ تعریف می کنیم.

بطور مثال یک نقطه دارای بعد پوششی صفرودایره دارای بعدپوششی یک می باشدزیرااگر یک پوشش باز از دایره واحد C را ملاحظه کنید ، این پوشش باز، دارای یک تظریف شامل گردایه ای از کمانهای باز خواهد بودو چون هر پوشش این چنینی می تواند مجددا طوری تظریف شود که یک نقطه معلوم x از دایره در حداکثر دو کمان واقع شود بنابراین بعد پوششی دایره یک می باشد یعنی dim C=1 .

4.2 بعد مجانبی

بعد مجانبی بصورت یک مقیاس بزرگ از بعد پوششی بصورت زیر تعریف می شود .

1.4.2 تعریف .   فرض کنیدX فضایی متری باشد آنگاه بعد مجانبی X راکه با asdim X نمایش می دهند بصورت زیر تعریف می کنیم:

$\mathrm{asdim}\, X \leq n$ اگر برای هر پوشش باز بطور یکنواخت کراندار $\mathcal{V}$ از X پوشش باز بطور یکنواخت کرانداری مانند $\mathcal{U}$ از X با $\mu(\mathcal{U}) \leq n+1$ موجود باشد بطوریکه $\mathcal{V}$ تظریفی برای $\mathcal{U}$ باشد .

بنابراین هرفضای متریک کرانداری دارای بعد مجانبی صفر است .

2.4.2 قضیه .   فرض کنید X فضایی متری باشدآنگاه شرایط زیر معادلند:

۱) $\mathrm{asdim}\, X \leq n$

۲)   برای هر $r < \infty$ خانواده های r-مجزا و بطور یکنواخت کراندار $u^{\circ}, \ldots, u^{n}$ از زیر مجموعه های X موجود باشد بطوریکه $\bigcup_i u^i$ پوششی از X شود .

۳)   برای هر $d < \infty$ پوشش بطور یکنواخت کراندار $\mathcal{V}$ ازX با $d\_\mu(\mathcal{U}) \leq n+1$ موجود باشد .

۴) برای هر $\infty > \lambda$پوشش بطور یکنواخت کراندار W ازX با عدد لبگ بزرگتر از λ و $\mu(W) \leq n+1$ موجود باشد .

اثبات)($2 \Longrightarrow 3$)

فرض $d < \infty$ ، $r > 2d$ گرفته پس طبق فرض خانواده های r-مجزا و بطور یکنواخت کراندار $u^{\circ}, \ldots, u^{n}$ از زیر مجموعه های X موجود می باشد بطوریکه $X = \bigcup_i u^i$ قرار میدهیم $\mathcal{V} = \bigcup_i u^i$ و $x \in X$ فرض می شود . اگر $\acute{U} \cap B_d(x) \neq \emptyset$ و $U \cap B_d(x) \neq \emptyset$ آنگاه برای هر $z \in U$ و هر $y \in \acute{U}$ داریم :

$d(z,y) \leq d(x,z) + d(x,y) \leq d + d \leq 2d < r$

پس$d(U,\acute{U}) < r$. بنابراینUوÚ به دو خانواده مجزای u^i, u^j تعلق دارند($i \neq j$)زیرا اگر بیک خانواده تعلق داشته باشند$d(U,\acute{U}) > r$می شود و چون $n+1$خانواده $u^{\circ}, \ldots, u^{n}$ داریم پس $B_d(x)$ حداکثر $n+1$ عنصر$\mathcal{V}$ را قطع می کند .

($4 \Longrightarrow 3$) فرض $\infty > \lambda$ و پوشش بطور یکنواخت کراندار $\mathcal{V}$ از X را با 5λ- $\mu(\mathcal{V}) \leq n+1$ در نظر می گیریم و تعریف می کنیم $\bar{V} = N_{2\lambda}(V)$ و $W = \{\bar{V} | V \in v\}$ ، پس پوشش بطور یکنواخت کراندار W با عدد لبگ بزرگتر از λ بدست می آید . حال باید ثابت کنیم $\mu(W) \leq n+1$.

$x \in X$ در نظر گرفته پس اگر$x \in \bar{V}$ آنگاه $d(x,V) < 2\lambda$ بنابراین هر گوی $B_{2\lambda}(x)$ ، $n+1$ عنصر $\mathcal{V}$را قطع میکند (زیرا فاصله بین x وV کوچکتر از 2λ است و ما $n+1$ عنصر $\mathcal{V}$داریم) پس $\mu(W) \leq n+1$.

($2 \Longrightarrow 1$) فرض کنیدپوشش$\mathcal{V}$ با $\operatorname{diam}(\mathcal{V}) \leq \delta$ داده شده است . حال باید پوشش باز بطور یکنواخت کرانداری مانند $\mathcal{U}$ از X بیابیم که $\mathcal{V}$ ، $\mathcal{U}$ را تظریف کند . خانواده های r-مجزا و بطور یکنواخت کراندار $u^{\circ}, \ldots, u^{n}$ از زیر مجموعه های X را مطابق فرض با $r > 2\delta$ بطوریکه $X = \bigcup_i u^i$ در نظر می گیریم $\bar{u}^i = \{N_\delta(U) | U \in \mathcal{U}\}$ و $\mathcal{U} = \bigcup_i \bar{u}^i$ قرار می دهیم . چون u^i ها طبق فرض r-مجزا یند . پس $\bar{u}^i$ ها نیز مجزا یند و $\mu(\bar{u}^i) \leq n+1$. در ادامه $V \in \mathcal{V}$ در نظر گرفته بنابراین اندیس i ی موجود است بقسمی که $U \in u^i$ وV ، Uرا قطع می کند . از آنجایی که $diam(V) \leq \delta$ ، $V \subset N_\delta(U)$ پس V یک عنصر از $\mathcal{U}$ است یعنی$\mathcal{V}$ ، $\mathcal{U}$ را تظریف می کند .

($4 \Longrightarrow 1$)فرض$\infty > \lambda$ داده شده و $\mathcal{V} = \{B_\lambda(x) | x \in X\}$ بوضوح $\mathcal{V}$ پوششی از X می باشدو طبق فرض پوشش بطور یکنواخت کراندار $\mathcal{U}$ از X با $\mu(\mathcal{U}) \leq n+1$ موجود است . بطوری که $\mathcal{V}$ ، $\mathcal{U}$ را تظریف می