دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه ی دکتری رشته ریاضی گرایش آنالیز

لم مینتی و بهینه سازی برداری در توابع چند مقداره

استاد راهنما:
دکتر جعفر زعفرانی

استاد مشاور:
دکتر مجید فخار

پژوهشگر:
مهدی چینائی

شهریور ماه ۱۳۸۸

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی محض گرایش آنالیز (تابعی) آقای مهدی چینائی

تحت عنوان:

بهینه سازی مقید در توابع مجموعه مقدار با استفاده از فضای تصویر

در تاریخ ...۸۸/۶/۲۵..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی.............. به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر جعفر زعفرانی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر علی رجالی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۴- استاد داور داخل گروه	دکتر محبوبه رضایی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۵- استاد داور خارج گروه	دکتر اسدا.. نیکنام	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۶- استاد داور خارج گروه	دکتر طوبی جبروتیان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

چکیده

در این پایان نامه ضمن بررسی انواع مختلف نقا ط بهینه (کارآمد) از یک مجموعه ، روابط بین آنها در مسائل بهینه سازی برداری و نیز روابط بین مسائل نابرابریهای تغییراتی برداری و مسائل بهینه سازی برداری را تبیین می کنیم.

ابتدا، خواص یکنوایی و شبه یکنوایی را مورد مطالعه قرار می دهیم. سپس، نابرابریهای تغییراتی برداری و مسائل بهینه سازی برداری را تحت شرایط یکنوایی و شبه یکنوایی مورد بررسی قرار می دهیم.

هدف اصلی در این پایان نامه، عددی نمودن مسائل بهینه سازی برداری شامل توابع هدف و قید چند مقداره می باشد. برای این کار ابتدا، روش ارائه شده توسط جیانسی، در عددی نمودن مسائل بهینه سازی برداری شامل توابع هدف و قید تک مقداره را مورد مطالعه قرار می دهیم . اساس این روش مبتنی بر مطالعه جوابهای بهینه حاصل از عددی نمودن قسمت هایی از مجموعه های تراز تابع هدف می باشد. سپس، این روش را با ارائه شرایط خاص به توابع چند مقداره تعمیم می دهیم.

در انتهای این پایان نامه ، ضمن بررسی انواع مختلف نقاط بهینهٔ تقریبی (کارآمد تقریبی) یک مجموعه به بررسی روابط بین آنها در مسائل بهینه سازی برداری می پردازیم. سپس، روش ارائه شده توسط جیانسی ، در عددی نمودن مسائل بهینه سازی برداری را به مسائل بهینه سازی تقریبی شامل توابع هدف و قید چند مقداره تعمیم می دهیم.

کلید واژه

کارآمد	Efficient
کارآمد تقریبی	Epsilon efficient
شبه یکنوایی	Pseudomonotone
تابع هدف چند مقداره	Objective multifunction
عددی نمودن مسائل بهینه سازی	Scalarization of Vector optimization problem
بهی‌نه سازی برداری	Vector optimization problem
نابرابریهای تغییراتی برداری	Vector variational-like inequalities

فهرست مندرجات

مقدمه

در سالهای اخیر مسائل بهینه سازی شامل توابع هدف و قید چند مقداره ، رشد بسیار وسیعی داشته است . که با توجه به کاربردهای وسیع توابع چند مقداره در مسائل بهینه سازی ، مخصوصاً دراقتصاد ، مدیریت و مهندسی، به یکی از پرکارترین شاخه‌های آنالیز غیر خطی تبدیل گردیده است . که برای مطالعهء منظم این نظریه، می توان به مراجع نوشته شده توسط اوبن و اکلاند، $AubinandEkeland$ ، در [۲]، لوک Luc ، در [۶۵] و جان $Jahn$ ، در [۴۴] و منابع موجود در آنها، مراجعه نمود. درمطالعهء نظریه و کاربردهای مسائل بهینه سازی ، نابرابری های تغییراتی نقش اساسی ایفا می کند. این مفهوم اول بار توسط ، جیانسی $Giannessi$ ، در [۳۰] معرفی گردید. اخیراً او نشان داد که یک هم ارزی بین جوابهای کارآمد $(efficientsolution)$ مسائل بهینه سازی (شامل توابع محدب مشتق پذیر) و جوابهای یک نابرابری برداری از نوع مینتی، وجود دارد. یانگ و یانگ در [۸۲] هم ارزی بین جوابهای کارآمد مسائل بهینه سازی برداری شامل توابع مشتق پذیر شبهه محدب و نابرابری های برداری ارائه نمودند.
همچنین با توجهّ به اینکه عددی نمودن مسائل بهینه سازی همواره یکی از مهمترین قسمت های این نظریه بوده است .بنابراین ، در این پایان نامه ضمن بررسی این نظریه، به بررسی روش های ارائه شده جهت عددی نمودن این مسائل می پردازیم .همچنین با استفاده از یک روش جدید مبتنی بر مجموعه های تراز تعمیم یافته ، بهینه سازی این مسائل را که اول بار توسط جیانسی ، برای توابع تک مقداره بکار رفت را به توابع چند مقداره تعمیم می دهیم. برای این کار نیاز به یک شرط اضافی روی توابع چند مقداره می باشد. که در فصل سوّم به ارائه‌این فرض و نمونه هایی از توابع چند مقداره‌ای که در این شرط صدق می کنند ، پرداخته‌ایم .
درمطالعهٔ مسائل بهینه سازی ، نظریهء بهینه سازی تقریبی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. لذا، در این پایان نامه این نظریه را در مورد توابع قید و هدف چند مقداره بررسی می کنیم . اهمیت نظریهء بهینه سازی تقریبی به دو دلیل می باشد.اول اینکه همواره مدل های ریاضی ، تقریبی از موقعیت های عملی هستند. ثانیاً در حل یک مسٔلهٔ بهینه سازی استفاده از یک آلگوریتم درکامپیوتر، اغلب به یک جواب تقریبی منجر می گردد. اولین و مهمترین روش تقریب کردن جوابهای یک مسئلهء بهینه سازی توسط کوتاتلدز $Kutateladze$ در [۴۵] ارائه گردید. و سپس توسط بقیه روش های دیگری ارائه و این مفهوم گسترش یافت. که از مهمترین آنها می‌توان از لوردینا، $Lordina$ ،[۴۶] نمت ، $Nemeth$ در ،[۴۸] ، لی و بقیه در[۴۷] تاناکا،$Tanaka$ ، در، [۷۲] ، وایت ، در ، [۵۱] گتیرز و بقیه، Gutierrez and et.al ، در [۴۱] نام برد. که گتیرز و بقیه، در [۴۲] تمام روش های فوق را در یک غالب یکتاارائه نمودند. دراین پایان نامه ضمن بررسی این نظریه به تعمیم و عددی نمودن این مسائل پرداخته‌ایم. نتایج بدست آمده در این پایان نامه، کارهای انجام شده توسط دیگران را بسط و توسعه می دهد.
هدف اصلی این پایان نامه مطالعهٔ و ارائهٔ روشی جدید در عددی نمودن مسائل بهینه سازی شامل توابع قید و هدف چند مقداره می باشدکه در دو زمینهٔ بهینه سازی و بهینه سازی تقریبی ارائه گردیده‌است . ساختار این پایان نامه به صورت زیر است.
در بخش اوّل مفاهیم اساسی در آنالیز غیر خطی را ارائه می کنیم. چند حالت قضیهٔ KKM را بیان می کنیم. سرانجام انواع مختلف یکنوایی ، مفاهیم اساسی یکنوایی تعمیم یافته و مسائل بهینه سازی (شامل توابع محدب مشتق پذیر) و جوابهای یک نابرابری برداری از نوع مینتی ، و هم ارزی بین جوابهای کارآمد مسائل بهینه سازی برداری شامل توابع مشتق پذیر شبهه محدب و نابرابری های برداری تبیین می‌گردد.

در فصل دوّم لم مینتی را در نظر می گیریم و قضایای وجود را برای نابرابریهای تغییراتی ارائه می کنیم نتایج حلپذیری نابرابری تغییراتی را تحت یکنوا نمایی و بدون آن اثبات می کنیم .
در فصل سوّم ضمن معرفی مشتقات جهتی به مفهوم دینی $(Dini)$ ، درتوابع چند مقداره، به بررسی نقش مشتقات جهتی در بهینه سازی مسائل شامل توابع هدف و قید چند مقداره می پردازیم .و سپس در ادامه به عددی نمودن انواع مختلف مسائل بهینه سازی از جمله،$Superefficient$ و $Stronglyefficient$ می پردازیم.
درفصل چهارم به معرفی نظریهء بهینه سازی تقریبی در توابع چند مقداره می پردازیم. و سپس به معرفی انواع مختلف بهینه سازی تقریبی از جمله ، $\varepsilon - Superefficient$ و $\varepsilon - Stictlyefficient$ و عددی نمودن آنهامی پردازیم.
در آخر متذکّر می شوم این پایان نامه بر اساس مقالات زیر می باشد:

۱. *M. Chinaie, T. Jabarootian, M. Rezaie and J. Zafarani, Minty's lemma and vector. variational−like inequlities. Journal of Global Optimization.* ۴۰ (۲۰۰۷) ۴۶۳−۴۷۳.

۲. *M. Chinaie and J .Zafarani , Image Space Analysis and Scalarization of Multivalued Optimization J . Optim Theory Appl* (۲۰۰۹).

۳. *M. Chinaie and J . Zafarani, Image Space Analysis and Scalarization of Multivalued*

فصل ۱

پیش زمینه‌ها

در این فصل ، مفاهیم اساسی که به طور مکرر در سراسر این پایان نامه بکار می رود را ارائه می کنیم.

۱—۱ مقدمات اولیه

در این بخش مفهوم مخروط و ترتیب حاصل از آن و بعضی از نتایج مربوطه را ارائه می‌کنیم .

فرض‌کنید X یک فضای برداری نرمدار حقیقی با نرم $\|.\|$ و X^* دوگان این فضابا نرم $\|.\|_*$ باشد. خانواده تمام زیر مجموعه های X^* و زوج دوگان بین X و X^* را به ترتیب با 2^{X^*} و $\langle .,. \rangle$ نشان می دهیم. فرض کنید A یک زیر مجموعه غیرتهی از X و $\overline{A}$ (یا $\mathrm{cl}A$) و $\mathrm{int}\ A$ به ترتیب بستار و درون مجموعه A را نشان می‌دهند. یک مجموعه $C \subseteq Y$ را یک مخروط گوییم هر گاه $\alpha C \subseteq C$ برای تمام $\alpha \geq 0$. علاوه بر این اگر $C \cap (-C) = \{0\}$ آنگاه، C را یک مخروط نقطه‌ای (*pointed*) نامند. کوچکترین مخروط محدب شامل زیر مجموعه دلخواه غیر تهی $V \subseteq Y$ عبارت است از:

$$\text{cone } V := \{\lambda v : \lambda \geq 0, v \in V\} = \cup_{\lambda \geq 0} \lambda V.$$

یک زیر مجموعه محدب از C مانند Θ را یک پایه برای C گوییم هر گاه $C = \text{cone}\ \Theta$ و $\circ \notin \text{cl}\ \Theta$. منظور از دوگان مثبت مخروط C مخروط:

$$C^+ := \{p \in Y^* : p(y) \geq \circ,\ \forall y \in C \setminus \{\circ\}\}.$$

است. و مجموعهٔ همه تابعک های اکیداً مثبت در C^+ عبارت است از:

$$C^{+i} := \{p \in Y^* : p(y) > \circ,\ \forall y \in C \setminus \{\circ\}\}.$$

یاد آور می شویم که اگر C یک مخروط محدب در Y باشد آنگاه، $\text{int}\ C^+ \subseteq C^{+i}$ و لزوماً تساوی بر قرار نخواهد بود. مثلاً اگر C مخروط مثبت در l^p به ازای $۱ \leq p \leq \infty$ باشد آنگاه، C^+ دارای درون تهی است. در صورتیکه C^{+i} غیر تهی است.

همچنین ممکن است ، مخروطC^{+i} تهی باشد. مثلاً اگر $Y = B[a,b]$ مجموعهٔ تمام توابع کراندار بر بازهٔ $[a,b]$ باشد آنگاه :

$$C = \{y \in B[a,b] : y(t) \geq \circ \forall t \in [a,b]\}$$

در اینصورت C^{+i} مجموعه ای تهی است. [۷۱].

لم بعدی یک مشخصه مخروط هایی که دارای C^{+i} غیر تهی هستند را ارائه می دهد.

۱.۱.۱ لم [۷۱] فرض کنید Y یک فضای برداری توپولوژیک باشد.اگر C یک مخروط محدب در Y باشد در اینصورت C^{+i} غیر تهی است اگر و تنهااگر، یک مجموعهٔ محدب بازU درY موجود باشد بطوریکه :

$\circ \notin U$—(۱)

$C \subseteq \text{cone}\ (U)$—(۲)

۱.۱.۱ تبصره بدیهی است اگر C^{+i} غیرتهی باشد آنگاه ، C یک مخروط نقطه ای است. همچنین اگر C مخروط محدب و C^{+i} غیرتهی باشد آنگاه، C دارای یک پایه است. در واقع اگر $f \in C^{+i}$ آنگاه، مجموعهٔ $\Theta = \{y \in Y : f(y) = ۱\}$ یک پایهٔ C است. عکس این مطلب در فضاهای موضعاً محدب نیز صحیح است. در واقع از اینکه $۰ \notin \mathrm{cl}\Theta$ نتیجه می شود، همسایگی محدب باز از مبدا مانند U وجود دارد بطوریکه، $۰ \notin \Theta + U$. لذا شرایط (۱) و (۲) در لم ۱.۱.۱ بر قرار است و بنابر این C^{+i} غیر تهی است.

در Y با استفاده از مخروط محدب نقطه ای C رابطه های ترتیبی زیر را تعریف می کنیم.

$$x \geq_C y \Leftrightarrow x - y \in C; \quad x \ngeq_C y \Leftrightarrow x - y \notin C;$$

$$x >_C y \Leftrightarrow x - y \in \mathrm{int}C; \quad x \ngtr_C y \Leftrightarrow x - y \notin \mathrm{int}C.$$

توّجه کنید که $0 \notin \mathrm{int}C$ معادل است با $C \neq Y$.

۲.۱.۱ لم [۱۰] فرض کنید (Y, C) یک فضای برداری توپولوژیک مرتب باشد که C یک مخروط محدب بسته و نقطه‌ای با درون غیر تهی است. در اینصورت :

(۱)—اگر $y - x \in \mathrm{int}\ C$ و $y \notin \mathrm{int}\ C$ آنگاه، $x \notin \mathrm{int}\ C$.

(۲)—اگر $y - x \in -\mathrm{int}\ C$ و $y \notin -\mathrm{int}\ C$ آنگاه، $x \notin -\mathrm{int}\ C$.

(۳)—اگر $y - x \in C$ و $y \notin \mathrm{int}\ C$ آنگاه، $x \notin \mathrm{int}\ C$.

(۴)—اگر $y - x \in -C$ و $y \notin -\mathrm{int}\ C$ آنگاه، $x \notin -\mathrm{int}\ C$.

۱—۲ نگاشتهای چند مقداره

در این بخش مفاهیم اساسی و تعاریف مربوط به نگاشتهای چند مقداره که در این پایان نامه بکار می رود را ارائه می کنیم. فرض کنید U یک زیر مجموعه غیر تهی از فضای برداری توپولوژیک X باشد و

$F : U \rightrightarrows Y$ یک نگاشت چند مقداره از U در Y باشد. مجموعهٔ :

$$\text{dom } F := \{x : F(x) \neq \emptyset\}$$

را دامنه F می نامند. همچنین مجموعهٔ :

$$\text{gr } F := \{(x, y) : y \in F(x), x \in \text{dom } F\}$$

گراف F و مجموعهٔ :

$$\text{epi } F := \{(x, y) : y \in F(x) + C, x \in \text{dom } F\}$$

را اپی گراف F می نامند.

۱.۲.۱ تعریف فرض کنید U یک زیر مجموعهٔ محدب از X باشد. نگاشت چند مقدارهٔ $F : U \rightrightarrows Y$ را یک تابع C– محدب گویند هر گاه ، به ازای هر $x_1, x_2 \in U$ و هر $t \in [0, 1]$ داشته باشیم :

$$tF(x_1) + (1 - t)F(x_2) \subseteq F(tx_1 + (1 - t)x_2) + C$$

. وC– شبهه محدب نامند هر گاه ، به ازای هر $x_1, x_2 \in U$ و هر $t \in [0, 1]$ داشته باشیم :

$$(F(x_1) + C) \cap (F(x_2) + C) \subseteq F(tx_1 + (1 - t)x_2) + C$$

. وC– اکیداً شبهه محدب نامند هر گاه، به ازای هر $x_1, x_2 \in U$ که $x_1 \neq x_2$ وهر$t \in (0, 1)$ داشته باشیم :

$$(F(x_1) + C) \cap (F(x_2) + C) \subseteq F(tx_1 + (1 - t)x_2) + \text{int}C$$

۱.۲.۱ تبصره بد یهی است اگر $F : U \rightrightarrows Y$ یک تابع C– محدب روی مجموعهٔ محدب U است اگر و تنها اگر $\text{epi } F$ محدب باشد.

لم زیر یک مشخصه از توابع C- شبهه محدب می دهد.

۱.۲.۱ لم[۴] فرض کنید $F: U \rightrightarrows Y$ یک تابع چند مقداره باشد. در اینصورت F تابعی C- شبهه محدب است اگر و تنها اگر، به ازای هر $y \in Y$ مجموعهٔ تراز :

$$F^{-1}(y-C) := \{x \in U : y \in F(x) + C\}$$

محدب باشد.

۱—۳ مسائل بهینه سازی برداری

در این بخش مفهوم نقطهٔ کارآمد برای توابع چند مقداره معرفی می گردد.

۱.۳.۱ تعریف فرض کنید V یک زیر مجموعهٔ غیر تهی از Y باشد . مجموعهٔ تمام نقاط کارآمد($efficient$) مجموعهٔ V نسبت به C عبارتند از:

$$S(V,C) := \{y \in V : (V \setminus \{y\} \cap (y-C) = \emptyset\}.$$

واگر مخروط C درون غیر تهی داشته باشد آنگاه، مجموعهٔ تمام نقاط کارآمد ضعیف V نسبت به C عبارتند از:

$$WS(V,C) := \{y \in V : V \cap (y - \text{int } C) = \emptyset\}.$$

۱.۳.۱ گزاره [۶۵] فرض کنید (Y,C) یک فضای برداری توپولوژیک مرتب باشد که درآن C یک مخروط محدب بسته‌است. در اینصورت اگر $V \subseteq Y$ یک مجموعهٔ فشرده و غیر تهی باشد آنگاه:

$$V \subseteq S(V,C) + C$$

فرض کنید $F:U \rightrightarrows Y$ و $G:U \rightrightarrows Z$ دو تابع چند مقداره باشند. مسئلهٔ بهینه سازی برداری زیر را در نظر می گیریم :

$$(VP) \quad \min_C F(x) \quad s.t. \quad x \in R := \{x \in U : G(x) \cap (-D) \neq \emptyset\}$$

که R را مجموعهٔ پذیرفتنی ($(feasible)$) مسئلهٔ (VP) می نامند.

۱.۳ ۱ تبصره بد یهی است اگر G تابع $C-$ شبهه محدب روی مجموعهٔ محدب U باشد آنگاه، R محدب است.

۲.۳.۱ تعریف فرض کنید $x_\circ \in R$ در اینصورت $x_\circ$ را یک نقطهٔ کار آمد مسئلهٔ (VP) می نامند هر گاه، $y_\circ \in F(x_\circ)$ موجود باشد بطوریکه $(F(R \setminus \{x_\circ\}) \cap (y_\circ - C \setminus \{\circ\}) = \emptyset$.

۳.۳.۱ تعریف فرض کنید $x_\circ \in R$ در اینصورت $x_\circ$ را یک نقطهٔ کار آمد ضعیف مسئلهٔ (VP) می نامند هر گاه، $y_\circ \in F(x_\circ)$ موجود باشد بطوریکه $(F(R \setminus \{x_\circ\}) \cap (y_\circ - \text{int } C) = \emptyset$.

مجموعهٔ تمام نقاطی که در تعاریف بالا صدق کند را بترتیب با $S(F,C)$ و$WS(F,C)$ نشان می دهیم.

همچنین اگر در تعاریف بالا $R \setminus \{x_\circ\}$ را با $N(x_\circ) \cap (R \setminus \{x_\circ\})$ تعویض نماییم که $N(x_\circ)$ یک همسایگی $x_\circ$ است در اینصورت ، $x_\circ$ را نقطهٔ کارآمد موضعی و نقطهٔ کارآمد موضعی ضعیف مینامند.

همچنین زوج $(x_\circ, y_\circ)$ در تعاریف فوق را یک $(minimizer)$ مسئلهٔ (VP) می نامند.

لم زیر یک شرط لازم و کافی برای $(minimizer)$ بودن یک نقطه در مسئلهٔ (VP) ارائه میدهد.

۱.۳.۱ لم [٦٥] فرض کنید $x_\circ \in R$ و $(x_\circ, y_\circ) \in \text{gr } F$ دراینصورت :

(۱)$-(x_\circ, y_\circ)$ یک $(minimizer)$ مسئلهٔ (VP) است اگر و تنها اگر:

$$(y_\circ - C \setminus \{\circ\}, -D) \cap (F(x), G(x)) = \emptyset \quad \forall x \in U \setminus \{x_\circ\}$$

(۲)—$(x_\circ, y_\circ)$ یک $(minimizer)$ ضغیف مسئلهٔ (VP) است اگر و تنها اگر:

$$(y_\circ - \text{int } C, -D) \cap (F(x), G(x)) = \emptyset \quad \forall x \in U \setminus \{x_\circ\}$$

۲.۳.۱ لم فرض کنید $F : U \rightrightarrows Y$ تابعی $C-$ اکیداً شبهه محدب و $G : U \rightrightarrows Z$ تابعی $D-$ شبهه محدب باشد در اینصورت $S(V, C) = WS(F, C)$

اثبات . فرض کنید $x_\circ \in WS(F, C)$ ولی $x_\circ \notin S(F, C)$ در اینصورت نقطه‌ای مانند $x_1 \neq x_\circ$ در R و $y_1 \in F(x_1)$ وجود دارد بطوریکه $y_\circ - y_1 \in C$. با استفاده از C-اکیداً شبهه محدب بودن F برای هر$t \in (\circ, 1)$ داریم :

$$(F(x_\circ) + C) \cap (F(x_1) + C) \subseteq F(tx_\circ + (1 - t)x_1) + \text{int}C$$

بنابراین برای هر $t \in (\circ, 1)$ عضو $y_t \in F(tx_\circ + (1-t)x_1) + \text{int } C$ وجود دارد بطوریکه $(y_\circ - y_t) \in \text{int } C$ از طرف دیگر چون R محدب است بنابراین:

$$y_t \in F(R \setminus \{x_\circ\}) \cap (y_\circ - \text{int } C)$$

که با فرض $(minimizer)$ بودن $(x_\circ, y_\circ)$ در تناقض است. همچنین طرف دیگر احتوا بدیهی است.

در ادامهٔ این پایان نامه جهت سادگی نماد گذاری زیر را بکار می بریم .

$$\mathring{C} := \text{int } C, C_\circ := C \setminus \{\circ\}.$$

۴.۳.۱ تعریف فرض کنید V یک زیر مجموعهٔ غیر تهی از Y باشد. نقطهٔ $y_\circ \in V$ را یک نقطهٔ کارآمد محض مثبت $(properly\ positive\ efficient)$ مجموعه V نامیم هرگاه تابعک $p \in C^{+i}$ موجود باشد

بطوریکه :

$$p(y_\circ) \leq p(y), \quad \forall\, y \in V.$$

همچنین نقطهٔ $x_\circ \in U$ را یک جواب کارآمد محض مثبت مسئلهٔ (VP) نامیم هر گاه, $y_\circ \in F(x_\circ)$ موجود باشد بطوریکه $y_\circ$ یک نقطهٔ کارآمد محض مثبت مجموعهٔ $F(R)$ باشد.

لم زیر مشخصهٔ وجود یک نقطهٔ کارآمد محض مثبت مجموعهٔ V را ارائه می دهد.

۳.۳.۱ لم [۲۲] فرض کنید Y یک فضای برداری توپولوژیک و $V \subseteq Y$ باشد.همچنین C یک مخروط محدب نقطه‌ای در Y باشد. در اینصورت نقطهٔ $y \in V$ را یک نقطهٔ کارآمد محض مثبت نامیم هر گاه، مجموعهٔ باز U در Y موجود باشد بطوریکه:

$C \subseteq cone(U)$—(۱)

$cone(V - y) \cap U = \emptyset$—(۲)

۵.۳.۱ تعریف نگاشت چند مقدارهٔ $F : X \rightrightarrows Y$ را نیم پیوسته پایینی $(l.s.c)$ در نقطهٔ $x_\circ$ گوییم هر گاه به ازای هر $y_\circ \in F(x_\circ)$ و هر $\varepsilon > \circ$ همسایگی $N(x_\circ)$ از $x_\circ$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر x در آن داشته باشیم:

$$B(y_\circ, \varepsilon) \cap F(x) \neq \emptyset$$

اگر تابع F در تمام نقاط X نیم پیوستهٔ پایینی باشد آنگاه، F را نیم پیوستهٔ پایینی گوییم .

۶.۳.۱ تعریف تابع پیوستهٔ $f : X \longrightarrow Y$ را یک انتخاب پیوسته $(Selection)$ از نگاشت چند مقدارهٔ $F : X \rightrightarrows Y$ نامیم هر گاه، به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم، $f(x) \in F(x)$.

۱.۳.۱ قضیه [۶۷] فرض کنید X یک فضای پارا فشرده و Y یک فضای باناخ باشد. اگر تابع $F : X \rightrightarrows Y$ نیم پیوستهٔ پایینی و به ازای هر $x \in X$ ، $F(x)$ بسته و محدب باشد، در اینصورت F دارای یک انتخاب پیوسته است .

۱—۴ توابع صعودی در جهت یک شعاع

کلاس توابع صعودی در جهت یک شعاع اول بار توسط، کرسپی و دیگران، معرفی گردید. و اخیراً، هیو و فانگ ، در [۵۴] توابع صعودی در جهت یک شعاع را به توابع چند مقداره تعمیم داده‌اند. آنها نشان دادند، که این کلاس از توابع ارتباط نزدیکی با بهینه سازی ستاره‌ای $(Star-shaped)$ دارد. در ادامه ضمن معرفی این کلاس از توابع بعضی از خواص آن را معرفی می کنیم.

۱.۴.۱ تعریف منظور از هستهٔ مجموعهٔ U یا $Ker(U)$ تمام $x \in U$ هایی است که $x+t(y-x) \in U$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall y \in U$. مجموعهٔ U ستاره‌ای است هرگاه، $Ker(U) \neq \emptyset$. در ادامه مجموعهٔ تهی را ستاره‌ای فرض می کنیم .همچنین بدیهی است که هر مجموعهٔ محدب ستاره ای نیز است.

۲.۴.۱ تعریف فرض کنید U یک مجموعهٔ ستاره‌ای در $x_0 \in Ker(U)$ باشد. تابع چند مقدارهٔ $F: U \rightrightarrows Y$ را در جهت شعاع ساطع از x_0 صعودی گوییم (و با $F \in IAR(x_0, C)$ نشان می دهیم) هر گاه، به ازای هر $x \in U$ و هر $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ با $t_i x + (1-t_i)x_0 \in U, i=1,2,$ داشته باشیم:

$$F(t_2 x + (1-t_2)x_0) \subseteq F(t_1 x + (1-t_1)x_0) + C$$

بنابراین تابع تک مقدارهٔ $f: U \longrightarrow Y$ در جهت شعاع ساطع از x_0 صعودی است (و با $f \in IAR(x_0, C)$ نشان می‌دهیم) هرگاه، به ازای هر $x \in U$ و هر $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ با $t_i x + (1-t_i)x_0 \in U, i=1,2,$ داشته باشیم:

$$f(t_1 x + (1-t_1)x_0) \leq_C f(t_2 x + (1-t_2)x_0)$$

۱.۴.۱ لم [۵۴] فرض کنید R ستاره‌ای و $x_0 \in Ker(R)$ باشد. اگر نگاشت $F: R \rightrightarrows Y$ در جهت شعاع ساطع از x_0 صعودی باشد و $S(F,C) \neq \emptyset$ آنگاه، $x_0 \in S(F,C)$.

۲.۴.۱ لم [۵۴] فرض کنید R ستاره‌ای و $x_0 \in Ker(R)$ باشد اگر نگاشت $F: R \rightrightarrows Y$ در جهت شعاع ساطع از x_0 صعودی باشد و $S(F,C) \neq \emptyset$ آنگاه، $x_0 \in kerS(F,C)$.

۱—۵ نا برابری های برداری

جیانسی، در [۳۰] نشان داد که یک هم ارزی بین جوابهای کارآمد (*efficient solution*) مسائل بهینه سازی (شامل توابع محدب مشتق پذیر) و جوابهای یک نابرابری برداری از نوع مینتی، وجود دارد. یانگ و یانگ در [۸۲] هم ارزی بین جوابهای کارآمد مسائل بهینه سازی برداری شامل توابع مشتق پذیرشبهه محدب و نابرابری های برداری ارائه نمودند.

فرض کنید، $f : K \longrightarrow R^n$ یک تابع باشد. مسئلهٔ بهینه سازی زیر را در نظر میگیریم:

$$(VP)_f \qquad\qquad \min_{x\in K_C} f(x).$$

منظوراز حل مسئلهٔ $(VP)_f$ تعیین تمام جوابهای کارآمد (یانقاط ضعیف کارآمد) هستند، که به طریق زیر تعریف میگردد.

۱.۵.۱ تعریف فرض کنید $y \in K$ در اینصورت:

(۱)—این نقطه را یک جواب کارآمد مسئلهٔ $(VP)_f$ گوییم هرگاه:

$$f(y) - f(x) \notin C_\circ, \ \forall x \in K$$

(۲)—این نقطه را یک جواب کارآمد ضعیف مسئلهٔ $(VP)_f$ گوییم هرگاه:

$$f(y) - f(x) \notin \mathrm{int}C, \ \forall x \in K.$$

۱.۵.۱ قضیه [۱۹] فرض کنید، R ستاره‌ای و $x_\circ \in Ker(R)$ باشد. اگر $f : U \longrightarrow Y$ در جهت شعاع ساطع از $x_\circ$ صعودی باشد آنگاه، $x_\circ$ یک جواب مسئلهٔ $(VP)_f$ است .همچنین، $x_\circ$ در هستهٔ مجموعهٔ جواب قرار دارد.

فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و (Y, C) یک فضای برداری توپولوژیک مرتب باشند. اگر $L(X, Y)$ مجموعهٔ تمام تابعک های خطی پیوسته‌از X به Y را نشان دهد، در این صورت نابرابری تغییراتی های زیررا در نظر می گیریم:

(۱)– مسئلهٔ (VI)–تعیین $y \in K$ بطوریکه:

$$\langle T(y), x-y\rangle \not\leq_{C\setminus\{\circ\}} \circ, \quad \forall x \in K.$$

که $T: X \longrightarrow L(X,Y)$ و K یک زیر مجموعهٔ غیر تهی از X است .

(۲)– مسئلهٔ (WVI)–تعیین $y \in K$ بطوریکه:

$$\langle T(y), x-y\rangle \not\leq_{\text{int}C} \circ, \quad \forall x \in K.$$

قضیهٔ زیر رابطهٔ بین جوابهای مسئلهٔ (WVI) و جوابهای مسئلهٔ $(VP)_f$ را هنگامی که تابع f گتو مشتق پذیر است ، تبیین می کند.

۲.۵.۱ قضیه [۹] فرض کنید، K زیر مجموعهٔ محدب X و تابع f گتو مشتق پذیر با مشتق $T = Df$ باشد. اگر y یک جواب کارآمد ضعیف مسئلهٔ $(VP)_f$ باشد آنگاه، y جواب مسئلهٔ (WVI) نیز می باشد. همچنین اگر f تابعی C–محدب و y جواب مسئلهٔ (WVI) باشد آنگاه، y یک جواب کارآمد ضعیف مسئلهٔ $(VP)_f$ است .

قضیهء زیر رابطهٔ بین جوابهای مسئلهٔ (VI) و جوابهای مسئلهٔ $(VP)_f$ راتبیین می کند.

۳.۵.۱ قضیه [۹] فرض کنید ، K زیر مجموعهٔ محدب X ، C مخروط محدب بسته‌ای در Y و تابع f گتو مشتق پذیر با مشتق $T = Df$ باشد . اگر f، تابعی C– محدب و y یک جواب کارآمد مسئلهء (VI) باشد، آنگاه y یک جواب کارآمد مسئلهٔ $(VP)_f$ نیز می‌باشد.

علاوه بر این یک جواب کارامد مثلهٔ $(VP)_f$ را می توان بوسیلهٔ یک نابرابری تغییراتی از نوع مینتی (MVI) ارائه نمود.

فرض کنید $K \subseteq R^n$ و $T: K \longrightarrow R^{l\times n}$ یک تابع با مقادیر ماتریسی باشد. منظور از یک نابرابری تغییراتی مینتی مثله‌ای به‌صورت زیراست.

(۱)– مسئلهٔ نابرابری تغییراتی مینتی، (MVI) — تعیین $y \in K$ بطوریکه:

$$\langle T(x), y-x\rangle_l \not\geq_C \circ, \quad \forall x \in K.$$

که $C = R^l_+ \setminus \{\circ\}$

(۲)— مسئلهء نابرابری تغییراتی ضعیف مینتی، $(MWVI)$—تعیین $y \in K$ بطوریکه:

$$\langle T(x), y - x\rangle_l \not\geq_{\text{int}C} \circ, \quad \forall x \in K.$$

۲.۵.۱ تعریف فرض کنید $K \subseteq R^n$ مجموعه‌ای باز،محدب ، غیر تهی و R و $f : K \longrightarrow R$ تابعی مشتق پذیر باشد. تابع f را یک تابع $(pseudo)$— محدب گوییم هرگاه، به ازای هر $x, y \in K$ با خاصیت $Df(x)(y - x) \geq \circ$ داشته باشیم، $f(y) \geq f(x)$.

۴.۵.۱ قضیه [۸۵] فرض کنید $K \subseteq R^n$ مجموعه‌ای غیر تهی و محدب و $f = (f_1, f_2, ..., f_l)$. اگر به ازای هر $i = 1, 2, ..., l$، f_i تابعی $(pseudo)$— محدب باشد و $T(x) = Df$ آنگاه، $y \in K$ یک جواب مسئلهٔ $(VP)_f$ است اگر و تنهااگر،y یک جواب مسئلهٔ (MVI) باشد.

۵.۵.۱ قضیه [۸۵] فرض کنید $K \subseteq R^n$ مجموعه‌ای غیر تهی و محدب و $f = (f_1, f_2, ..., f_l)$. اگر به ازای هر $i = 1, 2, ..., l$، f_i تابعی $(pseudo)$— محدب باشد و $T(x) = Df$ آنگاه، $y \in K$ یک جواب ضعیف مسئلهٔ $(VP)_f$ است اگر و تنهااگر، y یک جواب مسئلهٔ $(MWVI)$ باشد.

فرض کنید f تابعی حقیقی باشد که روی یک مجموعهٔ باز شامل K تعریف شده باشد. مشتق جهتی پایینی دینی تابع f در نقطهٔ $x \in K$ و در جهت $u \in R^n$ بصورت زیر تعریف می گردد:

$$Df_-(x, u) = \liminf_{t \longrightarrow +\circ} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}.$$

همچنین ، مسئلهٔ نابرابری تغییراتی مینتی ، $(MVI)_-$ که عبارت از تعیین $y \in K$ بطوریکه:

$$(MVI)_- \qquad\qquad Df_-(x, y - x) \leq \circ, \quad \forall x \in K.$$

را نیز در نظر می گیریم . واضح است که اگر f مشتق پذیر باشد آنگاه، مسئلهٔ فوق به مسئلهٔ (MVI) تبدیل می‌گردد.

۶.۵.۱ قضیه [۱۹] فرض کنید $K \subseteq R^n$ مجموعه‌ای ستاره‌ای و $x_\circ \in Ker(K)$ باشد.در اینصورت:

(۱)—اگر $f \in IAR(K, x_\circ)$ باشدآنگاه، $x_\circ$ یک جواب مسئلهٔ $(MVI)_-$ است .

(۲)—برعکس اگر x_0 یک جواب مسئلهٔ (MVI)ـ باشد و f در جهت شعاع ساطع از x_0 در k تابعی $(l.s.c)$ باشد آنگاه، $f \in IAR(K, x_0)$.

با استفاده از قضایای بالا و قضیهٔ ۱.۵.۱ نتیجهٔ زیر بدست می‌آید.

۱.۵.۱ نتیجه فرض کنید $K \subseteq R^n$ مجموعه‌ای ستاره‌ای و $x_0 \in Ker(K)$ باشد.در اینصورت اگر x_0 یک جواب مسئلهٔ (MVI)ـ باشد و f در جهت شعاع ساطع از x_0 در K تابعی $(l.s.c)$ باشد آنگاه، x_0 جواب مسئلهٔ $(VP)_f$ است.

۳.۵.۱ تعریف فرض کنید X_0 یک زیر مجموعهٔ فضای توپولوژیکی X باشد آنگاه، $F : X_0 \rightrightarrows X$ رایک نگاشت KKM می گوییم هر گاه به ازای هر زیر مجموعهٔ متناهی $\{x_1, ..., x_n\}$ از X_0 داشته باشیم:

$$\operatorname{co}\{x_1, ..., x_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i).$$

قضیهٔ زیر نقش اساسی در اثبات وجود جوابهای یک نابرابری تغییراتی ایفا میکند.

۱.۵.۱ لم [۲۴] فرض کنید K یک زیر مجموعهٔ محدب غیر تهی‌از یک فضای توپولوژیکی X باشد. همچنین ، فرض کنید $\Gamma : K \rightrightarrows X$ یک نگاشت KKM باشد بطوریکه به ازای هر $y \in K$، $\Gamma(y)$ مجموعه‌ای بسته و $\Gamma(y^*)$ به ازای یک $y^* \in K$ فشرده باشد. در اینصورت $\bigcap_{y \in K} \Gamma(y) \neq \emptyset$.

قضیهٔ زیر شکل خاصی از تبصرهٔ ۲.۳ از [٦٦] است .

۷.۵.۱ قضیه [٦٦] فرض کنید K یک زیر مجموعهٔ محدب غیر تهی‌از یک فضای توپولوژیکی X باشد. همچنین ، فرض کنید $\Gamma : K \rightrightarrows K$ یک نگاشت چند مقداره با خواص زیر باشد:

(۱)—به‌ازای هر $x \in K$ ، $\Gamma(x)$ زیر مجموعهٔ غیر تهی و محدب K و $x \notin \Gamma(x)$.

(۲)— به ازای هر $y \in K$ ، $\Gamma^{-1}(y)$ در K باز است .

(۳)—زیر مجموعهٔ غیر تهی محدب و فشردهٔ B از K وجود دارد و نیز زیر مجموعهٔ غیر تهی و فشردهٔ D از K وجود دارد بطوریکه به ازای هر $x \in K \setminus D$ عضو $\tilde{y} \in B$ موجود است بطوریکه $x \in \operatorname{int}_K \Gamma^{-1}(\tilde{y})$.

آنگاه نقطهٔ $\bar{x} \in K$ وجود دارد بطوریکه $\Gamma(\bar{x}) = \emptyset$.

۴.۵.۱ تعریف فرض کنید $F : X \rightrightarrows Y$ یک نگاشت چند مقداره باشد. این تابع را $(u.s.c)$ گویند هر