پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

عنوان:

حل عددی معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم—ولترای غیرخطی با استفاده از توابع مثلثی

استاد راهنما:

دکتر مهدی قاسمی

استاد مشاور:

دکتر رضا خوش‌سیر

پژوهشگر:

اعظم نقدی‌پور

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به:

پدر و مادرم که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، برایم زندگی و انسان بودن را معنا کردند.

پدرم و مادرم

تشکر و قدردانی

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش، مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

در ابتدا از پدر و مادر عزیزم، که مرا به جان پروردند و امیدرسیدن به افق‌های روشن را در دلم شکوفا ساختند، تشکر می‌کنم.

صمیمانه‌ترین مراتب سپاس خود را به استاد راهنمای گرامی‌ام، جناب آقای دکتر مهدی قاسمی تقدیم نموده، که حضور ایشان به عنوان یک پشتوانه علمی همیشه مرا در پیچ و خم‌های راه علم یاری کرده است و آنچه در این پژوهش به دست آورده‌ام بی‌مدد ایشان ممکن نبود.

از جناب آقای دکتر رضا خوش سیر به عنوان استاد مشاور که با نظرات و رهنمودهای ارزشمندشان مرا یاری نمودند سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر علیرضا انصاری و جناب آقای دکتر محمدرضا احمدی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

در پایان از دوستان و همکلاسی‌های عزیزم که در این مدت مرا صمیمانه همراهی کردند، سپاسگزارم و از خداوند متعال موفقیت روز افزون آنان را خواهانم.

اعظم نقدی‌پور

شهریور ماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه به حل عددی معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم—ولترای غیرخطی با استفاده از توابع مثلثی می‌پردازیم. این روش بر این اساس استوار است که توابع مثلثی به عنوان یک پایه متعامد، هر کدام از جملات موجود در معادله را تقریب می‌زند و سپس معادله موجود را به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌کند. در این مسئله دستگاه معادلات حاصل یک دستگاه غیرخطی است که با حل آن می‌توان جواب تقریبی معادله انتگرال—دیفرانسیل را به دست آورد. استفاده از توابع مثلثی به عنوان پایه‌های متعامد، سهم عمده‌ای در تسریع و کاهش هزینه محاسباتی حل معادلات انتگرال—دیفرانسیل خواهد داشت.

واژه‌های کلیدی

معادلات انتگرال، معادلات انتگرال—دیفرانسیل، توابع مثلثی، توابع بلاک پالس، دستگاه معادلات غیرخطی.

فهرست مندرجات

۱ مقدمات ۱

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی ۱

۲.۱ تاریخچه‌ی معادلات انتگرال ۳

۳.۱ مقدمه‌ای بر معادلات انتگرال ۵

۴.۱ انواع هسته‌ها ۶

۵.۱ دسته بندی معادلات انتگرال ۸

۱.۵.۱ معادلات انتگرال فردهلم خطی ۸

۲.۵.۱ معادلات انتگرال ولترای خطی ۹

۳.۵.۱ معادلات انتگرال—دیفرانسیل ۱۰

۴.۵.۱ معادلات انتگرال منفرد ۱۱

۲ توابع بلاک پالس (BPF) و توابع مثلثی (TF) ۱۲

۱.۲ مرور توابع بلاک پالس (BPF) و ماتریس‌های عملیاتی وابسته ۱۲

۲.۲ تجزیه یک BPF به دو TF ۲۱

۱.۲.۲ تقریب خطی قطعه‌وار از یک تابع انتگرال پذیر $f(t)$ ۲۳

۲.۲.۲ تعامد توابع پایه‌ای مثلثی ۲۶

۳.۲.۲ تقریب یک تابع زمانی $f(t)$ برحسب BPF و TF ۲۹

۳.۲ ماتریس‌های عملیاتی برای انتگرال گیری در دامنه تابع مثلثی متعامد ۳۲

۱.۳.۲ انتگرال گیری از یک تابع زمانی $f(t)$ در دامنه BPF و در دامنه TF ۳۸

۲.۳.۲ شکل‌های برداری ۴۰

۴.۲ نمایش جدیدی از شکل های برداری TF و کاربردهای دیگر ۴۴

۱.۴.۲ بسط و تعریف ۴۴

۲.۴.۲ خواص ضرب ۴۷

۳.۴.۲ ماتریس عملیاتی ۴۹

۳ حل عددی معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم—ولترای غیرخطی با استفاده از توابع بلاک پالس ۵۲

۱.۳ حل معادله انتگرال—دیفرانسیل غیرخطی ۵۳

۲.۳ مثال‌های عددی ۵۶

۴ حل عددی معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم—ولترای غیرخطی با استفاده از توابع مثلثی ۵۹

۱.۴ معادله انتگرال فردهلم نوع دوم ۶۰

۲.۴ حل معادله انتگرال—دیفرانسیل غیرخطی ۶۸

۳.۴ مثال‌های عددی ۷۳

۴.۴ تفسیری بر نتایج ۷۸

۵.۴ برنامه کامپیوتری برای حل معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم—ولترای غیرخطی ۸۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۴

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۷

منابع ۹۱

فهرست نمادها

بردار TF سمت چپی	$T1$
بردار TF سمت راستی	$T2$
ترانهاده ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$	A^T
توابع بلاک پالس	BPF
توابع مثلثی	TF
ضرب اسکالر	$\langle .,. \rangle$
عدد ثابت	k
عملگر همانی	I
فضای برداری اقلیدسی n بعدی	R^n
متعلق است به	$\in$
مجموع	$\sum$
مجموعه اعداد مختلط	$\mathbb{C}$
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه توابع مربعی انتگرال پذیر	L^2
نرم	$\|.\|$

پیشگفتار

معادلات انتگرال—دیفرانسیل در بسیاری از مسائل مهندسی، فیزیک، شیمی و... مورد استفاده قرار می‌گیرند. معادلات انتگرال—دیفرانسیل در سال ۱۹۰۰ توسط ولترا[1] معرفی شدند.

محققان چندین روش عددی برای حل معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم—ولترای خطی و غیرخطی ارائه نمودند، برخی محققان از روش های تجزیه استفاده کردند [۱۶ ،۱۴]. هم چنین در بسیاری از روش ها، با استفاده از یک مجموعه از توابع پایه‌ای و روشی تصویری مانند گالرکین، هم مکانی و... یک روش مستقیم ارائه دادند [۵ ،۷ ،۱۵ ،۱۳ ،۱۱ ،۱]. این روش‌ها اغلب، معادلات انتگرال—دیفرانسیل را به یک دستگاه خطی یا غیرخطی از معادلات جبری تبدیل می‌کند و سپس دستگاه را با یک روش تکراری حل می‌کنند. در کل تولید این دستگاه نیاز به محاسبه تعداد زیادی انتگرال‌گیری، داشت. برای حل این معادلات یک مجموعه از توابع متعامد توسط دب[2] معرفی شدند[۹]. و این توابع برای حل مسائل مختلف توسط بابلیان[3] به کار گرفته شد[۴]. با استفاده از توابع مثلثی یک نوع معادله انتگرال—دیفرانسیل به یک دستگاه غیرخطی از معادلات جبری تبدیل می‌شود. که در تولید این دستگاه به هیچ انتگرال‌گیری احتیاج نیست و فقط نیاز به نمونه‌گیری از توابع، ضرب و جمع ماتریس‌ها داریم.

در این پایان نامه سعی بر این است که هر دو روش توابع مثلثی و توابع بلاک پالس برای حل معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم—ولترا مورد بررسی قرار گیرند. در فصل اول به بیان مفاهیم

---

[1] Volterra

[2] Deb

[3] Babolian

مقدماتی و معرفی توابع انتگرال می‌پردازیم. در فصل دوم، به بررسی توابع بلاک پالس و توابع مثلثی می‌پردازیم. در فصل سوم با استفاده از توابع بلاک پالس به حل معادله انتگرال—دیفرانسیل فردهلم ولترا می‌پردازیم. در فصل چهارم با استفاده از توابع مثلثی روشی مستقیم برای حل معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم—ولترای غیرخطی بیان شده است و در نهایت یک نتیجه گیری کلی از آنچه در فصل‌های قبل بیان کردیم، ارائه می‌دهیم.

فصل ۱

مقدمات

در این فصل به بیان تعاریف و مقدمات مورد نیاز برای فصل‌های بعدی می‌پردازیم. در بخش اول برخی مفاهیم ابتدایی آنالیز حقیقی را یادآوری می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۱.۱ عنصر x از فضای ضرب داخلی X را نسبت به عنصر $y \in X$ متعامد گویند هر گاه $\langle x, y \rangle = 0$.

تعریف ۲.۱.۱ برای هر $1 \leq p < \infty$، فضای متشکل از تمام توابع اندازه پذیر لبگ $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$ که

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

را فضای $L^p[a,b]$ گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ تابع w، که بر بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال پذیر بوده و بر (a,b) در $w(x) \geq 0$ صدق کند ولی بر هر زیر بازه از (a,b)، $w(x) \neq 0$، یک تابع وزن نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید توابع حقیقی f و g بر بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشند و تابع w بر (a,b) تعریف شده و مثبت باشد. ضرب داخلی f و g نسبت به تابع وزن w برابر با $\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$ تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱ دو تابع f و g را نسبت به تابع وزن w بر بازه‌ی (a,b) متعامد می‌نامند، اگر $\langle f,g\rangle = 0$.

تعریف ۶.۱.۱ گوییم $\{\Psi_0, \Psi_1, ..., \Psi_n\}$ یک مجموعه متعامد از توابع بر بازه‌ی $[a,b]$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ است، اگر:

$$\int_a^b w(x)\Psi_j(x)\Psi_k(x)dx = \begin{cases} 0 & j \neq k, \\ \alpha_k > 0 & j - k. \end{cases}$$

و متعامد یکه نامیده می‌شود هر گاه $\alpha_k = 1$.

تعریف ۷.۱.۱ ضرب داخلی توابع مختلط f و g در L^2 را به صورت

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)dt$$

تعریف می‌کنیم. هم چنین ضرب داخلی وزن دار توابع f و g با تابع وزن w را به صورت

$$(f,g) = \int_a^b w(t)f(t)\bar{g}(t)dt$$

تعریف می‌کنیم.

۲.۱ تاریخچه‌ی معادلات انتگرال

اولین بار اصطلاح معادله انتگرال به وسیله‌ی ریموند[۱] پیشنهاد شد. لاپلاس [۲] در سال ۱۷۸۲ معادله انتگرالی برای تابع f به صورت زیر ارائه داد:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(t)dt. \qquad (۱)$$

بعدها پواسن [۳] عبارت زیر را برای f به دست آورد.

$$f(x)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{tx}F(t)dt \qquad (Ret>a). \qquad (۲)$$

در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات، فوریه [۴] در سال ۱۸۱۱ روی نظریه حرارت کار کرد و مقالاتی از خود به جای گذاشت. آبل [۵] نیز در مسئله‌ی خود که به مسئله آبل معروف است کاربرد معادلات انتگرال را در سال ۱۸۲۳ مطرح کرد. لیوویل [۶] به طور مستقل معادلات انتگرال خاصی را از سال ۱۸۳۲ به بعد حل کرد. یک قدم مهم در راه توسعه معادلات انتگرال توسط لیوویل برداشته شد که چگونگی حل بعضی از معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود. اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال به کار می‌رود، اولین بار توسط هیلبرت[۷] پیشنهاد شد. البته قبل از هیلبرت معادلات آبل و لیوویل به شکل‌های زیر مطرح بود و هر دو از نمونه‌های مهم در معادلات انتگرال هستند:

$$g(t)=\int_{a}^{t}K(t,s)f(s)ds \qquad (Ret>a) \qquad (۳)$$

---

[۱] Reymond
[۲] Laplace
[۳] Poisson
[۴] Fourier
[۵] Abel
[۶] Liouville
[۷] Hilbert

و

$$f(x) = g(t) + \int_a^t f(s)ds \qquad (Ret > a), \tag{۴}$$

که در آن‌ها g, K توابعی معلوم و f تابعی مجهول است. پوانکاره [۸] در سال ۱۸۹٦ معادله انتگرال زیر را به دست آورد:

$$u(t) + \int_a^b K(s,t)u(s)ds \qquad (Ret > a). \tag{۵}$$

فردهلم جهت به دست آوردن جواب معادله (۵) تحقیقات زیادی انجام داد. ارتباط معادلات انتگرال و یا مثال‌های دیگر در ریاضی—فیزیک، یک تکنیک مهمی را جهت حل مسائل مقدار اولیه و مرزی معادلات دیفرانسیل معمولی یا جزئی بوجود آورد که یکی از دست آوردهای مهم مطالعات معادلات انتگرال است. در این تکنیک، شرایط مرزی مسئله در خود معادله گنجانده شده است. برای نمونه:

۱)معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ با شرط اولیه $y(\circ) = y_\circ$ تبدیل به معادله ولترای نوع دوم زیر می‌شود:

$$y(t) = y_\circ + \int_\circ^t f(t,y)dt. \tag{٦}$$

بر عکس، اگر تابعی در معادله (٦) صدق کند، آن گاه $y' = f(t,y)$ با $y(\circ) = y_\circ$ است.

۲)معادله دیفرانسیل $y'' = f(t,y)$ با شرایط اولیه $y(\circ) = y_\circ$ و $y'(\circ) = y_۱$، تبدیل به معادله انتگرال ولترای نوع دوم زیر می‌شود:

$$y(x) = y_\circ + xy_۱ + \int_\circ^x (x-t)f(t,y(x))dt. \tag{۷}$$

۳)معادله دیفرانسیل $y'' = f(x,y)$ با شرایط مرزی $y(\circ) = \alpha$ و $y(b) = \beta$ تبدیل به معادله انتگرال فردهلم نوع غیر خطی زیر می‌شود:

$$y(x) = \alpha + (\frac{\beta - \alpha}{b}) + \int_\circ^b K(x,t)f(t,y)dt, \tag{۸}$$

[۸] Poincare

که در آن $K(x,t)$ یک هسته متقارن به صورت زیر است:

$$K(x,t)=\begin{cases}\frac{t(x-b)}{b}, & \circ\leq t\leq x\\ \frac{x(t-b)}{b}, & x\leq t\leq b.\end{cases} \tag{۹}$$

۳.۱ مقدمه‌ای بر معادلات انتگرال

در روند حل بسیاری از مسائل ریاضی، فیزیک، بیولوژی، شیمی و مهندسی با معادلاتی مواجه می‌شویم که تابع مجهول آن ها زیر علامت انتگرال قرار گرفته است. هم چنین معادلات انتگرال از تبدیل سایر مسائل ریاضی از جمله معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی پدید می آیند. بنابراین نظریه، کاربرد و روش های حل معادلات انتگرال به عنوان یک موضوع مهم در ریاضیات کاربردی مطرح است. در این بخش به معرفی معادلات انتگرال و دسته بندی انواع آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱ به هر معادله که تابع مجهول در داخل علامت انتگرال قرار داشته باشد، معادله انتگرال گویند.

فرض کنید $y(t)$ تابعی مجهول باشد. در این صورت به معادله

$$y(t)=x(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}K(s,t)y(s)ds \tag{۱۰}$$

یک معادله انتگرال گویند که در آن $K(s,t)$ به عنوان هسته معادله انتگرال، یک تابع معلوم، $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ حدود انتگرال و $x(t)$ یک تابع معلوم است. در این معادله تابع مجهول در سمت راست، تنها در داخل علامت انتگرال ظاهر شده است و در حالت های دیگر ممکن است تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال هم حضور داشته باشد. هدف ما تعیین تابع $y(t)$ است به قسمی که در معادله (۱۰) صدق کند. به معادلات انتگرال نظیر معادله (۱۰)، معادله انتگرال خطی گویند زیرا تابع مجهول

$y(t)$ در داخل علامت انتگرال حالت خطی دارد. اما اگر تابع $y(t)$ در داخل علامت انتگرال با توابعی غیرخطی مانند $y^{۲}(t)$، $\cos(y(t))$ و یا $e^{y(t)}$ جا به جا شود، آنگاه معادله انتگرال را غیرخطی گویند.

۴.۱ انواع هسته‌ها

فرض کنید تابع $K(s,t)$ بر ناحیه‌ی $D=\{(s,t)|s,t\in[a,b]\}$ پیوسته باشد. یک نوع تقسیم بندی برای هسته‌ها به صورت زیر است:

۱ — هسته جدایی پذیر[۹] یا تبهگن:

$K(s,t)$ را هسته جدایی پذیر می‌نامیم هر گاه:

$$K(s,t)=\sum_{i=۰}^{n} g_i(s)h_i(t)$$

که در آن g_iها و h_i ها مستقل خطی‌اند.

۲— هسته هرمیتی[۱۰] :

هسته $K(s,t)$ را یک هسته هرمیتی می‌نامیم اگر $K(s,t)=K^*(t,s)$ که در آن $*$ نشانگر مزدوج مختلط است.

۳— هسته نرمال[۱۱] :

هسته $K(s,t)$ را نرمال می‌گوئیم اگر $KK^*=K^*K$.

۴— هسته $L^{۲}$:

تابع $K(s,t)$ تعریف شده بر ناحیه‌ی $D=\{(s,t)|s,t\in[a,b]\}$ را یک هسته $L^{۲}$ گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

---

[۹] Degenerate Kernel

[۱۰] Hermitian Kernel

[۱۱] Normal Kernel

۱) $K(s,t)$ یک تابع اندازه پذیر نسبت به (s,t) در ناحیهٔ $a \leq s,t \leq b$ است. یعنی

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^۲ dsdt < \infty.$$

۲) $K(s,t)$ یک تابع اندازه پذیر نسبت به t است. یعنی

$$\int_a^b |K(s,t)|^۲ dt < \infty, \qquad s \in [a,b],$$

۳) $K(s,t)$ یک تابع اندازه پذیر نسبت به s است. یعنی

$$\int_a^b |K(s,t)|^۲ ds < \infty, \qquad t \in [a,b].$$

شرایط (۳—۱) را شرایط نظم می‌گویند.

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید K یک هسته $L^۲$ باشد. نرم K به عنوان یک هسته $L^۲$ را به صورت

$$\|K\| = \|K\|_۲ = \left(\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^۲ dsdt \right)^{\frac{۱}{۲}}$$

تعریف می‌کنیم.

۵— هسته قطبی:

هسته $K(s,t)$ قطبی نامیده می‌شود هر گاه:

$$K(s,t) = \frac{g(s,t)}{(s-t)^\alpha} + h(s,t), \qquad \alpha \in [a,b].$$

که g و h روی D کراندار هستند و $g(s,s) \neq ۰$.

٦— هسته لگاریتمی:

به هسته $K(s,t)$ لگاریتمی گوییم هر گاه:

$$K(s,t) = g(s,t) ln(s-t) + h(s,t), \qquad \alpha \in [a,b].$$

که g و h روی D کراندار هستند و $g(s,s) \neq ۰$.