بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين اياك نعبد و اياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين انعمت عليهم غير المغضوب عليهم و لا الضالين

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی

گرایش آنالیز عددی

مسائل نقطه زینی و روش های حل آنها

استاد راهنما:

پروفسور محمد تقی درویشی

نگارش:

محسن دارابی

دی ماه 1391

تقدیر و تشکر:

نهایت تشکر و قدردانی خود را از استاد گرامی جناب آقای پروفسور درویشی دارم و همواره برای ایشان آرزوی سعادت و بهروزی از خداوند متعال مسألت دارم.

چکیده:
روش‌های حل عددی دستگاه های خطی بزرگ از نوع نقطه زینی در طیف گسترده ای از برنامه های کاربردی در زمینه‌های مختلف علوم محاسباتی و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. نامعلوم و ضعیف بودن خواص طیفی دستگاه های خطی باعث به وجود آمـدن چالش های قابل توجهی برای محققین شده است. در سال های اخیر علاقه زیادی برای حل مسائل نقطـه زینـی بـه وجـود آمـده و روش های متعددی برای حل این دستگاه ها پیشنهاد شده اند. هدف از این پایان نامه ارائه و بحث در مـورد روش هـای حـل بـرای دستگاه های خطی به شکل نقطه زینی، با تاکید بر روش های تکراری برای مسائل بزرگ و تنک است.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار

در سال های اخیر، وقت و علاقه بسیار زیادی برای حل دستگاه های بزرگ خطی به شکل نقطه زینی اختصاص داده شده است. دلیل این علاقه این واقعیت است که چنین مسائلی را در طیف گسترده ای از برنامه ها و کاربردهای فنی و علمی می توان مشاهده نمود. به عنوان مثال، محبوبیت روزافزون روش های عناصر متناهی در زمینه های مهندسی از قبیل مکانیک جامدات و سیالات یک منبع عمده از دستگاه های نقطه زینی می باشد.

یکی دیگر از دلایل این افزایش علاقه به کار بر روی مسائل نقطه زینی، موفقیت فوق العاده این مسائل در حل الگوریتم های نقطه داخلی در بهینه سازی خطی و غیر خطی است.

توجیه ما برای یک بررسی جامع از این موضوع این است که روش ها و نتایج عددی مربوط به دستگاه های نقطه زینی، در طیف گسترده ای از کتاب ها، مجلات و کنفرانس ها ظاهر می شوند. هدف اصلی در این مقاله مروری بر روش های حل با تاکید بر روش های تکراری بر روی مسائل تنک و بزرگ است. اگر چه بسیاری از این روش ها حل با کاربردهای خاصی در ذهن ما جای گرفته اند(برای مثال، نوع مساله استوکس در دینامیک سیالات)، این امکان وجود دارد تا آن ها را ازطریق مفاهیم جبر خطی عددی مورد بحث قرار دهیم که برجسته ترین آنها شاید متمم شور(فصل دوم بخش 2-2) باشد.

اگر چه نمی توان گفت که بهترین روش برای حل این دستگاه ها وجود دارد، با این حال روش های حل موثری برای حل رده های مختلفی از مسائل نقطه زینی وجود دارد. بنابراین قسمتی از پایان نامه را به بحث در مورد چند کاربرد انتخاب شده از مسائل نقطه زینی اختصاص می دهیم. امید است که مطالعه حاضر کمک و راهنمایی مفیدی در انتخاب روش های حل به محققین و دانشجویانی باشد که در زمینه جبرخطی عددی و محاسبات علمی فعالیت دارند.

پایان نامه شامل چهار فصل است، در فصل اول به یادآوری برخی مفاهیم و قضایای پایه ای و اساسی در مورد مسائل نقطه زینی و چگونگی پیدایش آنها می پردازیم. در فصل دوم به اختصار در خصوص روش های عمومی حل این گونه مسائل مطالبی را بیان می کنیم. در فصل سوم دو روش اخیر را برای حل مسائل نقطه زینی که حالت خاصی دارد بیان می کنیم. در فصل چهارم روش جدیدی را که بر پایه روش های فصل 3 بنانهاده شده است را معرفی و تحلیل می کنیم.

لازم به ذکر است که پیاده سازی الگوریتم ها با کمک نرم افزار MATLAB در پیوست آمده است.

فصل اول

تعاریف و قضایای پایه ای

در این فصل به بیان مفاهیم پایه ای و قضایای اساسی در مورد دستگاه های نقطه زینی و این که در چه مسائلی به وجود می آیند، می پردازیم. در این پایان نامه سعی شده از ذکر تعاریف و قضایای مقدماتی موجود درکتاب‌های آنالیز عددی صرف نظر، در عوض مفاهیم اصلی بحث را با جزئیات بیشتری ارائه می دهیم. علاقه مندان برای مطالعه پیش زمینه می توانند به مراجع معرفی شده در متن رجوع نمایند.

1-1. مقدمه

دستگاه های معادلات خطی از یک سو، با بیشتر مسائل مهندسی و علوم و از سوی دیگر با کاربردهای ریاضیات در علوم اجتماعی و مطالعه کمّی تجارت و مسائل اقتصادی در ارتباط هستند. بنابراین همواره حل دستگاه های معادلات خطی مورد توجه بوده است. محققین همواره در تلاشند که بتوانند دستگاه های خطی را سریعتر و دقیقتر حل کنند. زیرا در صورت بزرگ شدن ابعاد مساله، حل آن نیز مشکل می گردد. چون ضرایب دستگاه ها به صورت ماتریس است لازم می دانیم در مورد ماتریس‌ها تعاریف و قضایایی بیان کنیم. سعی می کنیم تعاریف و قضایای مورد استفاده در فصل های بعد را در این فصل بگنجانیم. هر چند اگر لازم باشد در فصل های بعد نیز تعاریف و یا لم هایی را بیان و اثبات می کنیم.

تعریف (1-1-1) اگر $A=(a_{ij})$ یک ماتریس با درایه های مختلط باشد، مزدوج A را به صورت

$$\bar{A}=(\overline{a_{ij}})$$

تعریف می کنیم.

تعریف (1-1-2) ترانهاده هرمیتی ماتریس A را با A^* نشان می دهیم و تعریف می کنیم:

$$A^*=\overline{A^T}$$

یعنی هرگاه داشته باشیم $A=(a_{ij})$، آن گاه

$$A^*=(\overline{a_{ji}})$$

ترانهاده هرمیتی یک ماتریس را ترانهاده مزدوج نیز می نامند.

مثال: اگر داشته باشیم

$$A=\begin{bmatrix} 3+2i & 4-5i \\ -6i & 9+i\sqrt{2} \\ 7-i & 6+7i \end{bmatrix}$$

آن گاه مزدوج و ترانهاده هرمیتی ماتریس A به صورت زیر حاصل می شوند:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 3-2i & 4+5i \\ +6i & 9-i\sqrt{2} \\ 7+i & 6-7i \end{bmatrix}$$

و

$$A^{*} = \begin{bmatrix} 3-2i & +6i & 7+i \\ 4+5i & 9-i\sqrt{2} & 6-7i \end{bmatrix}$$

تعریف (3-1-1) اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$ را یک مقدار ویژه برای ماتریس $n\times n$، A گوییم، هرگاه بردار غیر صفر $u \in \mathbb{C}^{n}$ موجود باشد به طوری که $Au = lu$، بردار u را بردار ویژه ماتریس A متناظر با مقدار ویژه l گوییم.

تعریف (4-1-1) فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد، مجموعه تمام مقادیر ویژه ی ماتریس A را طیف ماتریس A می گوییم و آن را با $s\,(A)$ نشان می دهیم.

تعریف (5-1-1) بزرگترین مقدار ویژه ی A از لحاظ قدر مطلق را شعاع طیفی A می گوییم وآن را با $r\,(A)$ نشان می دهیم. لذا:

$$r\,(A) = \max_{l \in s\,(A)} |\, l \,|$$

2-1. ماتریس های خاص

روندی که برای حل دستگاه های معادلات خطی در نظر گرفته می شود اغلب به ساختار ماتریس ضرایب بستگی دارد. زیرا برخی از روش های حل دستگاه های خطی برای حالت خاصی از ماتریس ضرایب ممکن است سریعتر و یا دقیق تر به جواب برسد اما برای ماتریس ضرایبی به شکل دیگر کندتر و یا حتی به جواب نرسد. هم چنین بسیاری از خصوصیات مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر ماتریس A به خواص ماتریس بستگی دارد. به عنوان مثال مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس های زیر خواص ویژه ای دارند که با نوع ماتریس ارتباط دارد. فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n\times n$ است، برخی از ماتریس های خاص را به صورت زیر معرفی می کنیم:

ماتریس متقارن: $A^{T} = A$

ماتریس پادمتقارن: $A^{T} = -A$

ماتریس نامنفی: $a_{ij} \geq 0 \;,\; (i, j = 1, 2, \ldots, n)$

ماتریس یکانی: $A^{*}A = I$

در حالتی که درایه های ماتریس مختلط باشند، تعاریف مشابهی برای ماتریس هرمیتی و غیر هرمیتی مانند متقارن و پادمتقارن داریم:

ماتریس هرمیتی: $A^* = A$

ماتریس هرمیتی کج: $A^* = -A$

مثال: ماتریس $H = \begin{bmatrix} 3 & 7+8i \\ 7-8i & 4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس هرمیتی است زیرا:

$$H^* = \overline{H}^T = \begin{bmatrix} 3 & 7+8i \\ 7-8i & 4 \end{bmatrix}$$

برخی از ماتریس ها ساختار ویژه ای دارندکه برای اهداف محاسباتی مناسب تر هستند. تعدادی از این نوع ماتریس ها در زیر ارائه شده اند که نقش مهمی در آنالیز عددی ایفا می کنند.

ماتریس قطری: ماتریسی مربعی است که برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$ و آن را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$A = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$$

ماتریس متعامد : ماتریس مربع A را متعامد گویند هرگاه $A^T = A^{-1}$.

ماتریس بالامثلثی : ماتریسی است که برای هر $i > j$ داشته باشیم:

$$a_{ij} = 0$$

ماتریس پایین مثلثی: ماتریسی است که برای هر $i < j$ داشته باشیم:

$$a_{ij} = 0$$

ماتریس جایگشت: ماتریسی که از جابجایی سطرهای یک ماتریس همانی حاصل شود یک ماتریس جایگشت است.

مثال : ماتریس $\mathrm{M}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس جایگشت است که از جابجایی سطرهای اول و دوم ماتریس همانی I_3 حاصل گردیده است.

ماتریس معین مثبت: یک ماتریس متقارن A را معین مثبت گوییم هرگاه به ازای هر بردار $X \neq 0$ داشته باشیم:

$$X^T AX > 0$$

و نیمه معین مثبت گوییم هرگاه

$$X^T AX \geq 0$$

تعریف های مشابهی نیز برای ماتریس معین منفی و نیمه معین منفی با تغییر جهت نامساوی های بالا حاصل می شوند.

مثال : ماتریس زیر یک ماتریس معین مثبت است:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

زیرا

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3] A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + 2x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 > 0 \text{ و } X = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$$

ماتریس قطر غالب: ماتریس A را قطر غالب سطری گوییم هرگاه به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

و حداقل یکی از روابط به صورت نامساوی اکید باشد. اگر تمام نامساویها به صورت اکید باشند، آن را اکیدا قطر غالب سطری می نامیم.

ماتریس قطر غالب ستونی به روش مشابه تعریف می گردد.

مثال : ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس اکیدا قطر غالب است زیرا

$$10 > 2 + 3$$

$$6 > 1 + 2$$
$$7 > 3 + 1$$

هر ماتریس مربعی حقیقی A را می توان به صورت مجموع دو ماتریس متقارن و پاد متقارن به صورت زیر نوشت:

$$H = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad S = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

که در آن H ماتریسی متقارن و S ماتریسی پاد متقارن است.

به همین ترتیب این تعریف برای ماتریس های مختلط نیز قابل بیان است. یعنی ماتریس مختلط A را می توان به صورت مجموع دو ماتریس هرمیتی و هرمیتی کج به صورت زیر نوشت:

$$H = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad S = \frac{1}{2}(A - A^*)$$

که در آن H ماتریسی هرمیتی و S هرمیتی کج است.

ماتریس غالب(مرجع[1]): فرض کنیم ماتریس A را به صورت مجموع دو ماتریس هرمیتی و هرمیتی کج به صورت بالا داشته باشیم. ماتریس H را نسبت به S غالب گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall\, u \in \mathbb{C}^n, |u^*Hu| > |u^*Su|.$$

در این پایان نامه هرگاه از ماتریس های H و S استفاده شود، فرض می کنیم H نسبت به S غالب باشد.

مثال: رابطه فوق برای هر ماتریس معین مثبت بر قرار است.

ماتریس بلوکی(افراز شده): فرض کنید ماتریسی مانند A داریم این ماتریس را توسط رسم خطوط افقی و عمودی که از میان آنها می گذرد به ماتریس هایی از مرتبه پایین تر به نام زیر ماتریس ها یا بلوک ها تقسیم می کنیم. به عنوان مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]$$

که بلوک یا زیر ماتریس های آن عبارتند از:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

$$R = [a_{31} \quad a_{32}] \qquad , \qquad S = [a_{33}]$$

لذا ممکن است ماتریس A را به عنوان یک ابر ماتریس در نظر بگیریم که عناصر آن عبارتند از زیر ماتریس های $P\ ,Q\ ,S\ ,R$ و می نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

یک ماتریس که به زیرماتریس ها یا بلوک هایی تقسیم شده باشد ماتریس بلوکی(افراز شده) نامیده می شود.

3-1. نرم های برداری و ماتریسی

تعریف(1- 3- 1) یک نرم برداری روی فضای برداری X تابعی است با مقدار حقیقی روی X که دارای خواص زیر باشد:

1- برای هر $x \in X$: $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر تنها و اگر $x = 0$.

2- برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

3- برای هر $x, y \in X$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف (1-3-2) اگر ضرب داخلی دو بردار x و y را با $(x\,,y)$ نشان دهیم و $X = \mathbb{R}^n$، نرم اقلیدسی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\| x \|_2 = (x\,,x)^{1/2}$$

این نرم، نرم L_2 نیز نامیده می شود.

تعریف (1-3-3) نرم هولدر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\| x \|_p = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p)^{1/p}$$

اگر قرار دهیم $P = 1, 2, \infty$ نرم های زیر به دست می آیند:

$$\| x \|_1 = | x_1 | + | x_2 | + ... + | x_n | \qquad L_1 - norm$$

$$\| x \|_2 = (| x_1 |^2 + | x_2 |^2 + ... + | x_n |^2)^{1/2} \qquad L_2 - norm$$

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} | x_i | \qquad L_\infty - norm$$

تعریف(1-3-4) مشابه نرم برداری، نرم ماتریسی نیز تابعی مانند $\|.\|$ است از $\mathbb{R}^{m\times n}$ به مجموعه ی اعداد حقیقی نامنفی، به طوری که در خواص زیر صدق می کند :

1) برای هر ماتریس A داریم: $\|A\| \geq 0$ و $\|A\| = 0$ اگر تنها و اگر $A = 0$.
2) برای هر عدد مختلط a داریم: $\|\alpha \mathrm{A}\| = |\alpha|\|x\|$.
3) برای هر دو ماتریس هم مرتبه ی A و B داریم: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
4) برای ماتریس $m \times n$ ، A و ماتریس $n \times r$ ، B داریم: $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

در این قسمت نرم ماتریسی را به صورت نرمی که وابسته به نرم برداری است به صورت زیر تعریف می کنیم:

و آن را نرم طبیعی(تبعی) می نامیم.

در نرم ماتریسی نیز سه نرم زیر بیشتر مورد استفاده واقع می شوند و به سادگی روابط زیر اثباط می شود.

نرم – یک (نرم مجموع ستونی)
$$\| A \|_1 = \max_j (\sum_{i=1}^{m} | a_{ij} |)$$

نرم – بینهایت (نرم مجموع سطری)
$$\| A \|_\infty = \max_i (\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |)$$

نرم– دو
$$\| A \|_2 = [r (A^H A)]^{\frac{1}{2}} = [r (AA^H)]^{\frac{1}{2}}$$

قضیه (1-3-5).هرگاه A یک ماتریس حقیقی باشد، آن گاه به ازای هر نرم طبیعی $\|.\|$، $r(A) \leq \|A\|$.

اثبات: در مرجع[2].

یک نتیجه جالب و مفید که مشابه اثبات قضیه فوق در مرجع [2] است، آن است که به ازای هر A و هر $e > 0$ نرمی مانند $\|.\|$ وجود دارد با این خاصیت که

$$\|A\| < r(A) + e$$

در نتیجه $r(A)$ بزرگترین کران پایین برای نرم های روی A است. اثبات این نتیجه را می توان در صفحه 23 مرجع [3] یافت.

تعریف زیر در مورد همگرایی ماتریسی است(در مرجع[2] صفحه 512) که ممکن است در مراجع دیگر، به نوع دیگری ماتریس همگرا معرفی شده باشد.

تعریف(1-3-6). ماتریس $n\times n$، A را همگرا نامیم اگر به ازای هر $i=1,2,\ldots,n$ و $j=1,2,\ldots,n$، داشته باشیم:

$$\lim_{k\to\infty}(A^k)_{ij}=0$$

قضیه(1-3-7). احکام زیر معادلند:

(آ) A یک ماتریس همگراست؛

(ب) به ازای هر نرم $\|.\|$، داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}\|A^n\|=0$

(پ) $r(A)<1$

برهان: به مرجع [4] مراجعه شود.

تعریف(1-3-8). گوییم رتبه[1] ماتریس A برابر m است هرگاه کمترین تعداد سطر ها یا ستون های مستقل خطی A برابر m باشد و می نویسیم:

$$rank(A)=m$$

معمولا برای خلاصه نویسی به جای $rank(A)$ از $r(A)$ استفاده می کنیم.

تعریف(1-3-9). فضای جواب دستگاه $AX=0$ را فضای پوچ[2] ماتریس A می نامند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$ker(A)=\{\alpha\in\mathbb{C}^n|A\alpha=0\}$$

برای نمایش فضای پوچ A ،معمولا از نماد $Null(A)$ یا به طور خلاصه از $N(A)$ استفاده می‌شود.

1-4 دستگاه های معادلات خطی

یک دستگاه معادلات خطی شامل n معادله و n مجهول به شکل زیر تعریف می گردد:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\
\vdots\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad&\ \ \vdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n
\end{aligned}$$

که در آن a_{ij}ها ضرایب ثابت و x_j ها مجهول هستند.

[1] Rank
[2] Kernel

می توان دستگاه فوق را با جدا کردن ضرایب و مجهول ها و طرف راست دستگاه به صورت زیر نوشت:

$$Ax = b$$

که در آن A ماتریس ضرایب، x بردار مجهول ها یا $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ و b نیز برابر $(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ است. بسته به نوع ماتریس ضرایب A روش های متفاوتی برای حل آن پیشنهاد می شود. برای حل دستگاه-های معادلات خطی به صورت $Ax = b$، دو روش کلی زیر وجود دارد :

1- روشهای مستقیم
2- روشهای تقریبی(تکراری)

1-4-1روش های مستقیم

روش های مستقیم روش هایی هستند که در آنها با پیمودن تعداد ثابتی مرحله، جوابی که تنها تابع خطاهای گرد کردن است حاصل می شود. به عنوان مثال روش حذفی گاوس و روش های تجزیه مستقیم ماتریس ها مانند QR و ... همگی روش های مستقیم هستند. در حالی که روش های تقریبی بسته به میزان دقت مورد نظر می توانند چندین بار تکرار شوند. اما برای استفاده از روش های مستقیم، شرایط خاصی لازم است. مثلا ماتریس ضرایب معکوس پذیر باشد یا مثلا عناصر روی قطر ماتریس ضرایب ناصفر باشند و ... . هرچند ممکن است با روابط ریاضی برخی از شرایط را فراهم کرد اما همواره این کار امکانپذیر نیست. بحث ما در این پایان نامه راجع به روش های تکراری است. بنابراین برای توضیح بیشتر راجع به روش های مستقیم خواننده می تواند به مراجع [2] و [3] رجوع نماید.

2-4-1روش های تقریبی

به دلایل متعددی همواره روش های مستقیم قابل اجرا نیستند. از جمله این دلایل می توان به هزینه بالای محاسبات، افزایش خطا و یا حتی برقرار نبودن شرایط لازم در این روش ها اشاره کرد. با این وجود روش های تقریبی می توانند در بسیاری از شرایط، یک جواب تقریبی به دست آورند. بنابراین روش های تقریبی به سرعت گسترش یافته اند و روز به روز روش های جدید تری از ترکیب آنها به وجود می آید که برای دسته-های خاصی از ماتریس های ضرایب جواب های بهتری حاصل می شود.
روش SOR یکی از این روش ها است که در زیر به آن اشاره می کنیم. مابقی روش ها را در فصل بعد بیان خواهیم کرد.

روش SOR[3]:

دستگاه خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$Ax = b$$

با تفکیک A به صورت زیر می توانیم یک طرح تکراری برای به دست آوردن جواب بسازیم:

$$A = D - L - U$$

که در آن D ماتریسی قطری، L ماتریسی پایین مثلثی و U ماتریسی بالا مثلثی است. حال طرح تکراری را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_{k+1} = Px_k + \bar{b}$$

که در آن

$$P = (D - \omega L)^{-1}\big((1-\omega)D + \omega U\big),\ \ \bar{b} = (D - \omega L)^{-1} b$$

و ω پارامتری است که برای همگرایی روش، محدودیت هایی دارد و باید همواره داشته باشیم $0 < \omega < 2$. در حالت کلی بهترین مقدار ω یعنی مقداری که مثلا تعداد تکرارهای کمتری را برای رسیدن به جواب تقریبی داشته باشیم معلوم نیست. اما می توان در حالت های خاصی بهترین مقدار(مقدار بهینه) برای ω را به دست آورد که چند مورد آن در مرجع [3] بررسی شده است.

روش محاسبه جواب دستگاه معادلات خطی با استفاده از این طرح تکراری را روش SOR می نامیم.

در بخش بعد یک ماتریس ضرایب را بررسی می کنیم که به شکل خاصی است.

1-5. مسائل نقطه زینی[4]

تعریف (1-5-1) دستگاه خطی بلوکی: موضوع این پایان نامه ،حل دستگاه های خطی بلوکی 2×2 به فرم زیر است:

$$\begin{bmatrix} A & B_1^T \\ B_2 & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \quad or \quad \mathcal{A}u = b \qquad (1.1)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \ C \in \mathbb{R}^{m\times m} \quad with \quad n \geq m \qquad (2.1)$$.

واضح است با یک افراز مناسب، هر دستگاه خطی را می توان به شکل (1.1) و (2.1) نوشت. از این به بعد فرض می کنیم A یا یکی یا هر دو ماتریس B_1 و B_2 همزمان صفر نباشند.

[3] Successive Over Relaxation
[4] Saddle Point Problems

تعریف (1-5-2) دستگاه نقطه زینی: یک دستگاه خطی بلوکی مانند تعریف(1-5-1) را یک دستگاه نقطه زینی نامیم هرگاه بلوک های تشکیل دهنده آن، A، B_1 ، B_2 و C، یک یا بیش از یکی از شرایط زیر را داشته باشند:

الف) A متقارن باشد: $A^T = A$.

ب) بخش متقارن A یعنی $H = \frac{1}{2}(A + A^T)$، نیمه معین مثبت باشد.

پ) $B_1 = B_2 = B$.

ت) C متقارن و نیمه معین مثبت باشد.

ث) $C = O$ یعنی C برابر ماتریس صفر باشد.

واضح است که شرط ث) شرط ت) را نتیجه می دهد. یکی از خاص ترین موارد به دست آمده از این دستگاه حالتی است که تمام شرایط فوق برقرار باشند. در این حالت A یک ماتریس نیمه معین مثبت متقارن است(با توجه به این که می توان هر ماتریس مربعی حقیقی را به صورت مجموع دو ماتریس متقارن و متقارن کج نوشت و در اینجا با توجه به متقارن بودن ماتریس A قسمت متقارن کج آن صفر و لذا ماتریس A نیمه معین مثبت خواهد بود) و یک دستگاه خطی متقارن به صورت زیر داریم :

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

این دستگاه از شرایط بهینگی مرتبه اول برای مساله برنامه ریزی مقید به شکل زیر به وجود می آید:

$$\begin{aligned} &\min\ J(x) = \frac{1}{2} x^T A x - f^T x \qquad (4.1) \\ &Subject\ to \qquad Bx = g \end{aligned}$$

که در ادامه نحوه به دست آمدن دستگاه نقطه زینی از مسئله فوق را در بخش (1-7-1) خواهیم دید.

یکی دیگر ازحالت هایی که از اهمیت ویژه ای برخوردار است زمانی است که شرایط الف) تا ت) برقرار هستند، اما ث) برقرار نیست. در این حالت، یک دستگاه بلوکی خطی به فرم زیر خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

مسائلی از این نوع، اغلب در زمینه گسسته سازی به روش های عناصر متناهی به وجود می آیند که در بحث PDE[5] از آنها استفاده شده است.

یکی دیگر از وضعیت هایی که منجر به C غیر صفرمی شود، گسسته سازی معادلاتی مانند معادلات ناویر-استوکس خطی سازی شده است. برای دیدن مثال های بیشتر می توانید مراجع [6]، [7] و [8] را ببینید.

[5] Partial Differential Equations