به نام خداوند بخشنده‌ی مهربان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان :

ساختارهای جبر لی‌گونه و سیستم‌های لاگرانژی روی کلاف‌های آفین

از:

رضوانه ایوبی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل عزیزپور

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

عزیزترین هایم در زندگی

پدر، مادر و همسرم.

تقدیر و تشکر از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر عزیزپور و تشکر از جناب آقای دکتر احمدی و سرکار خانم دکتر لامعی.

فهرست مطالب

چکیده:

ساختارهای جبر لی‌گونه و سیستم‌های لاگرانژی روی کلاف‌های آفین

رضوانه ایوبی

در این پایان نامه، مفهوم ساختار جبر لی‌گونه روی کلاف آفین را به‌وسیله ایمرشن متعارف از کلاف آفین به دوگان دوم آن مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین به امتداد، ارتقاهای گوناگون و ترسیم هندسی از دینامیک‌های لاگرانژین‌گونه روی یک جبر لی‌گونه آفین توجه ویژه‌ای خواهیم داشت .

کلید واژه:
جبر لی‌گونه، فضاهای آفین، امتداد، سیستم‌های لاگرانژی .

Abstract:

Lie Algebroid Structures And Lagrangian Systems On Affine Bundles

Rezvaneh Ayoubi

In this text, we study the concept of Lie algebroid structures on an affine bundle by means of the canonical immersion of the affine bundle into its bidual. We pay particular attention to the prolongation and various lifting procedures, and also to the geometrical construction of Lagrangian-type dynamics on an affine Lie algebroid.

Key words:
Lie algebroid, affine spaces, prolongation, Lagrangian systems.

پیشگفتار:

در فصل اول جنبه‌های جبری قضیه‌های بیان شده در این فصل را به تفصیل توضیح می‌دهیم. ابتدا به معرفی فضای آفین و نگاشت آفین می‌پردازیم و سپس با تعریف یک کنج آفین، مختصات روی فضای آفین را بررسی می‌کنیم. همچنین مفهوم ساختار جبر لی و جبر خارجی روی فضای آفین را بیان می‌نماییم.

درفصل دوم ابتدا ساختار جبرلی‌گونه روی کلاف آفین $\tau : E \longrightarrow M$ تعریف شده است که اساساً از ساختار جبر لی‌گونه قدیمی روی دوگان $\tilde{E}$ از دوگان توسعه‌یافته E^t از E برمی‌آید، با این خاصیت که براکت بخش‌های تصویر نگاشت شمول $i : E \longrightarrow \tilde{E}$ در تصویر زیر کلاف برداری قرار می‌گیرد. توصیف معادل این ویژگی را می‌توان در بخش بعدی روی دیفرانسیل خارجی و ساختار پواسن یافت. در بخش آخر این فصل مثال‌هایی از جبر لی‌گونه آفین ارائه شده است.

در فصل سوم مفهوم مهم امتداد از یک جبرلی‌گونه که با ترسیم روی جبرلی‌گونه‌های برداری آغاز شده، بیان گردیده است. در آنجا نشان داده شده است که کلاف امتداد داده شده ساختار آفین روی E را زمانی که جبرلی‌گونه برداری روی $\tilde{E}$ است به ارث می‌برد. در ادامه نشان داده‌ایم که نگاشت متعارف روی بخش‌های کلاف امتداد داده شده باعث اندومورفیسم عمود می‌شود. ترسیم طبیعی این مطلب که در دسترس است ارتقاهای کامل و عمودی می‌باشند. آنها نقش تعریف هندسی از سیستم‌های لاگرانژین روی جبر لی‌گونه‌های آفین را بازی می‌کنند. در بخش ۳-۵ روی یک دسته از منحنی‌های خاص روی E بحث می‌کنیم که به آنها منحنی‌هایی پذیرفتنی گوییم و همچنین به مفهوم سیستم‌های دینامیکی می‌پردازیم که منحنی‌های انتگرال آنها به دسته‌ی خاصی تعلق دارند و معادلات دیفرانسیل شبه-$SODE$ را تشکیل می‌دهند. در بخش آخر ۱-فرمی و ۲-فرمی کارتان و معادلات شبه- لاگرانژین گونه را معرفی کرده و پس از بیان معادلات اویلر-لاگرانژ، به رابطه با فرمول‌سازی همیلتون‌گونه اشاره خواهیم کرد.

فصل ۱

ساختار جبر لی روی فضای آفین

۱-۱ ایمرشن از فضای آفین به فضای برداری

قبل از تعریف ساختار جبرلی‌گونه روی کلاف آفین، نیاز به بیان تعاریفی مرتبط به فضاهای آفین داریم. به این دلیل در این بخش ابتدا چند تعریف مقدماتی را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۱. [۶] فضای آفین[۱] یک سه تایی $\langle A, \overline{A}, +\rangle$ است که A یک مجموعه، $\overline{A}$ یک فضای برداری حقیقی متناهی البعد و $+ : A\times\overline{A} \longrightarrow A$ یک عمل متعدی آزاد از گروه جمعی $\overline{A}$ روی A است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

- به ازای هر $a \in A$، $a + \circ = \circ$،
- به ازای هر $a \in A$ و $\overline{a}_1, \overline{a}_2 \in \overline{A}$، $(a+\overline{a}_1)+\overline{a}_2 = a+(\overline{a}_1+\overline{a}_2)$،
- برای هر دو نقطه $a, b \in A$، بردار یکتای $\overline{u} \in \overline{A}$ موجود است به طوریکه $a + \overline{u} = b$.

بعد A توسط بعد $\overline{A}$ مشخص می‌شود.

مثال ۱-۱-۲. سه تایی $\langle \mathbb{R}, \mathbb{R}, +\rangle$ یک فضای آفین است.

تعریف ۱-۱-۳. [۶] فرض کنید که $\langle A, \overline{A}, +\rangle$ و $\langle B, \overline{B}, +\rangle$ دو فضای آفین باشند، نگاشت $\varphi : A \longrightarrow B$ یک نگاشت آفین[۲] نامیده می‌شود هرگاه یک نگاشت خطی $\overline{\varphi} : \overline{A} \longrightarrow \overline{B}$ موجود باشد بطوریکه برای هر $a \in A$ و $\overline{a} \in \overline{A}$ داشته باشیم

$$\varphi(a+\overline{a}) = \varphi(a) + \overline{\varphi}(\overline{a}). \qquad (۱-۱)$$

نگاشت‌های آفین خواص زیر را دارا می‌باشند:

- ترکیب دونگاشت آفین، یک نگاشت آفین است، زیرا اگر فرض کنیم $\varphi : A \longrightarrow A'$ و $\psi : A' \longrightarrow A''$ دو نگاشت آفین باشند، آنگاه
$$\psi(\varphi(a+\overline{a})) = \psi(\varphi(a)+\overline{\varphi}(\overline{a})) = \psi(f(a)) + \psi(\overline{\varphi}(\overline{a})).$$
- نگاشت آفین $\varphi : A \longrightarrow B$ یک به یک است اگر و تنها اگر نگاشت خطی متناظر با آن، $\overline{\varphi} : \overline{A} \longrightarrow \overline{B}$، یک به یک باشد.
- نگاشت آفین $\varphi : A \longrightarrow B$ پوشا است اگر و تنها اگر نگاشت خطی متناظر با آن، $\overline{\varphi} : \overline{A} \longrightarrow \overline{B}$ پوشا باشد.

---

[۱] Affine space [۲] Affine map

در حالت خاص اگر $B = \mathbb{R} = \overline{B}$ باشد φ را یک تابع آفین می‌گوییم. مجموعه‌ی تمام توابع آفین روی A را با $\mathit{Aff}(A, \mathbb{R})$ و دوگان $\overline{A}$ را با $\overline{A}^*$ نمایش می‌دهیم. یک تابع آفین $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ به ازای $\overline{\varphi} \in \overline{A}^*$ در رابطه (۱-۱) صدق می‌کند. مجموعه توابع آفین ساختار فضای برداری دارند زیرا به ازای توابع آفین φ_1 و φ_2 فرض کنید $\varphi_1 + \varphi_2$ تابعی باشد که به صورت $(\varphi_1 + \varphi_2)(a) := \varphi_1(a) + \varphi_2(a)$ تعریف شود. در این صورت تابع $\varphi_1 + \varphi_2$ هم یک تابع آفین است که روی $\overline{\varphi_1} + \overline{\varphi_2} \in \overline{A}^*$ شکل گرفته است. فضای برداری $A^t = \mathit{Aff}(A, \mathbb{R})$ دوگان توسعه یافته از A نامیده می‌شود. دوگان دوم (دوگان مضاعف) A را با نماد $\tilde{A} = (A^t)^*$ نمایش می‌دهیم. می‌دانیم که در مورد فضای برداری V، دوگان دوم $\tilde{V} = (V^*)^*$، با خود V ایزومورف است. در ادامه نشان خواهیم داد که دوگان دوم یک فضای آفین، $\tilde{A}$، شامل یک کپی از خود فضای آفین A است.

حال قبل از بیان و اثبات چند قضیه، مباحثی از جبر خطی را از [۲۴] بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۴. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد، هر تبدیل خطی $f : V \longrightarrow F$ را یک تابعک خطی می‌نامیم.

مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی روی V را با V^* نمایش می‌دهیم و آن را دوگان V می‌نامیم.

دوگان دوگان فضای V را دوگان مضاعف (دوگان دوم) V می‌نامیم و با V^{**} نمایش می‌دهیم.

ملاحظه ۱-۱-۵. *فرض کنیم $x \in V$ باشد، عضو $\widehat{x} \in V^{**}$ را چنان در نظر می‌گیریم که به ازای هر $f \in V^*$ و $\widehat{x} : V^* \longrightarrow F$ داشته باشیم $\widehat{x}(f) = f(x)$.*

لم ۱-۱-۶. *اگر $x \in V$ به طوریکه برای هر $f \in V^*$ داشته باشیم $\widehat{x}(f) = 0$، آنگاه $x = 0$.*

نکته ۱-۱-۷. *اگر $x_1, x_2 \in V$ و $\lambda \in F$، آنگاه $\widehat{\lambda x_1 + x_2} = \lambda \widehat{x_1} + \widehat{x_2}$.*

قضیه ۱-۱-۸. *فرض کنید V یک فضای برداری روی F باشد، در این صورت $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$ بطوریکه برای هر $x \in V$، $\varphi(x) = \widehat{x}$ یک یکریختی است.*

قضیه ۱-۱-۹. *نگاشت $i : A \longrightarrow \tilde{A}$ تعریف شده به صورت $i(a)\varphi = \varphi(a)$ نگاشت آفین یک به یک است که نگاشت برداری وابسته به آن $\overline{i} : \overline{A} \longrightarrow \tilde{A}$ با ضابطه‌ی $\overline{i}(\overline{a})\varphi = \overline{\varphi}(\overline{a})$ می‌باشد.*

برهان. ۱ اگر $a \in A$ و $\overline{a} \in \overline{A}$، آنگاه برای هر $\varphi \in A^t$، $i(a + \overline{a})(\varphi) = \varphi(a + \overline{a})$.

چون عناصر A^t تابعک بوده لذا دارای خاصیت خطی می‌باشند و از آنجایی که متناظر با نگاشت آفین $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ نگاشت خطی منحصر به فرد $\overline{\varphi} : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ موجود است پس خواهیم داشت:

$$\varphi(a + \overline{a}) = \varphi(a) + \overline{\varphi}(\overline{a}) = i(a)\varphi + \overline{i}(\overline{a})\varphi,$$

که از آن نتیجه می‌شود که i یک نگاشت آفین است و نگاشت خطی وابسته به آن $\overline{i}$ می‌باشد.

برای اثبات یک به یک بودن i کافی است یک به یک بودن $\overline{i}$ را ثابت کنیم. اگر $\overline{a}$ عنصری از هسته‌ی $\overline{i}$ باشد، آنگاه $\overline{i}(\overline{a}) = ۰$. لذا برای هر $\varphi \in A^t$ ، $\overline{i}(\overline{a})(\varphi) = ۰$ و چون $\overline{i}(\overline{a})(\varphi) = \overline{\varphi}(\overline{a})$ پس برای هر $\overline{\varphi} \in \overline{A}^*$ خواهیم داشت $\overline{\varphi}(\overline{a}) = ۰$. در نتیجه بنا به لم بالا $\overline{a} = ۰$. بنابراین $Ker\overline{i} = ۰$ و $\overline{i}$ یک به یک است. □

ملاحظه ۱-۱-۱۰. *[۶] مجموعه H از ریشه‌های معادله $\lambda_۱ x_۱ + ... + \lambda_m x_m = \mu$ یک زیر فضای آفین از $\mathbb{R}^m$ است و اگر همه $\lambda_۱, ..., \lambda_n$ صفر نباشند در این صورت H زیرفضایی از بعد $m-۱$ است که به آن ابرصفحه[۱] می‌گوییم.*

می‌توانیم معادله بالا را به صورت نگاشت $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ تفسیر کنیم که به ازای هر $(x_۱, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ داشته باشیم

$$\varphi(x_۱, ..., x_m) = \lambda_۱ x_۱ + ... + \lambda_m x_m - \mu.$$

واضح است که φ یک نگاشت آفین بوده و مجموعه H از ریشه‌های معادله

$$\lambda_۱ x_۱ + ... + \lambda_m x_m = \mu$$

مجموعه صفر یا هسته نگاشت آفین $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ است پس

$$H = \varphi^{-۱}(۰) = \{x \in \mathbb{R}^m | \varphi(x) = ۰\}$$

که $x = (x_۱, ..., x_m)$.

لم ۱-۱-۱۱. *[۶] فرض کنید A یک فضای آفین باشد در این صورت*

- *به ازای هر تابع آفین غیرثابت $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $H = Ker\varphi$ یک ابرصفحه است.*

- *با ازای هر ابرصفحه H در A یک تابع آفین غیرثابت $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد بطوریکه $H = Ker\varphi$. برای هر تابع آفین دیگر $\psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ بطوریکه $H = Ker\psi$ باشد در این صورت $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq ۰)$ وجود دارد بطوریکه $\psi = \lambda\varphi$.*

- *به ازای هر ابر صفحه H در A و هر تابع آفین (غیر ثابت) $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ که $H = Ker\varphi$، هر ابر صفحه H' موازی با H توسط تابع آفین غیر ثابت ψ تعریف می‌شود بطوریکه به ازای هر $a \in E$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\psi(a) = \varphi(a) - \lambda$.*

فضای برداری $\tilde{A}$ توسط ابر صفحه های موازی با تصویر $\overline{i}$ تولید شده است. هر بردار $\tilde{a} \in \tilde{A}$ یا به صورت $\tilde{a} = \overline{i}(\overline{a})$ است برای $\overline{a} \in \overline{A}$ ها و یا به فرم $\tilde{a} = \lambda i(a)$ برای $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{۰\}$ و $a \in A$ می‌باشد.(چون $A \neq \varnothing$

[۱] hyperplane

پس یک $a \in A$ وجود دارد که $i(a) \in \tilde{A}$ و چون $\tilde{A}$ فضای برداری است پس برای هر $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ هم $\lambda i(a) \in \tilde{A}$. حال فرض کنید $b \in A$ عضوی دلخواه و مخالف a باشد پس

$$\exists \overline{a} \in \overline{A}; \quad b = a + \overline{a} \quad \Longrightarrow \quad i(b) = i(a) + \overline{i}(\overline{a})$$

و برای $\mu i(b) \in \tilde{A}$ داریم $\overline{b} = \mu\overline{a}$ ($\mu i(b) = \mu i(a) + \overline{i}(\overline{b})i;$).

علاوه‌براین λ، a و $\overline{a}$ به صورت منحصربه‌فرد توسط $\tilde{a}$ تعیین می‌گردند. تصویر نگاشت i شامل نقاطی است که $\lambda = 1$ می‌باشد. برای درک بیشتر این موضوع ثابت می‌کنیم که یک دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow \overline{A} \xrightarrow{\overline{i}} \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

از فضاهای برداری را داریم و پس از آن دوگان دنباله را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱-۱-۱۲. *فرض کنید $l : \mathbb{R} \longrightarrow A^t$ نگاشتی باشد که تابع ثابت λ روی A را به $\lambda \in \mathbb{R}$ وابسته می‌کند و $k : A^t \longrightarrow \overline{A}^*$ نگاشتی باشد که به هر تابع آفین روی A تابع خطی متناظر روی $\overline{A}$ را وابسته می‌کند. بنابراین، دنباله‌ی فضاهای برداری*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{l} A^t \xrightarrow{k} \overline{A}^* \longrightarrow 0$$

دقیق است.

برهان. نگاشت l یک به یک است زیرا

$$\begin{aligned} l : \mathbb{R} &\rightarrow A^t \\ x &\mapsto l(x) \qquad (\, l(x) : A \longrightarrow \mathbb{R}) \end{aligned}$$

و چون $l(x)$ تابع ثابت λ روی A را به $\lambda \in \mathbb{R}$ وابسته می‌کند پس $\lambda = l(\lambda)$. درنتیجه، اگر فرض کنیم $l(x_1) = l(x_2)$ پس $l(x_1)(a) = l(x_2)(a)$ و درنتیجه $x_1 = x_2$. لذا l یک به یک است.

حال ثابت می‌کنیم که k پوشاست. فضاهای آفین $\langle A, \overline{A}, +\rangle$ و $\langle \mathbb{R}, \mathbb{R}, +\rangle$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به تعریف ۱-۱-۲، برای نگاشت $\overline{\varphi} : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ نگاشت آفین $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ موجود است که $k(\varphi) = \overline{\varphi}$.

همچنین $k \circ l = 0$، زیرا

$$\overline{l}(x) = l(x + \overline{a}) - l(x) = x - x = 0$$

درنتیجه $Img(l) \subset Ker(k)$. اگر $\varphi \in A^t$ در هسته‌ی k باشد، آنگاه قسمت خطی φ به صفر میل می‌کند؛ زیرا $Ker(\varphi) = \{f | f : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ و با توجه به فرض ما $\varphi \in Ker(k)$. درنتیجه $k(\varphi)(\overline{v}) = 0$. چون

$k(\varphi) \in \overline{A}^*$ پس با درنظر گرفتن $k(\varphi) = \overline{\varphi}$ خواهیم داشت $\overline{\varphi}(\overline{a}) = 0$.
بنابراین به ازای هر دو جفت از نقاط a و $b = a + \overline{a}$ $(a, b \in A, \overline{a} \in \overline{A})$، داریم

$$\varphi(b) = \varphi(a + \overline{a}) = \varphi(a) + \overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a).$$

چون $\varphi(a + \overline{a}) = \varphi(a)$ پس نتیجه می‌شود که φ ثابت است، بنابراین در تصویر l قرار دارد یعنی $Ker(k) \subset Img(l)$. لذا دنباله‌ی فوق دقیق است. $\square$

نگاشت $\bar{i}$ دوگان نگاشت k در قضیه بالا است. بنابراین، برای $\overline{a} \in \overline{A}$ داریم:

$$\langle k(\varphi), \overline{a} \rangle = \langle \overline{\varphi}, \overline{a} \rangle = \langle \varphi, \bar{i}(\overline{a}) \rangle.$$

زیرا

$$\begin{aligned} \langle k(\varphi), \overline{a} \rangle &= k(\varphi)(\overline{a}) = \overline{\varphi}(\overline{a}) \in \mathbb{R}, \\ \langle \overline{\varphi}, \overline{a} \rangle &= \overline{\varphi}(\overline{a}) \in \mathbb{R}, \\ \langle \varphi, \bar{i}(\overline{a}) \rangle &= \bar{i}(\overline{a})(\varphi) = \overline{\varphi}(\overline{a}) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

نگاشت j که به صورت $j(\alpha i(a) + \bar{i}(\overline{a})) = \alpha$ تعریف می گردد دوگان نگاشت l است. در واقع برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\begin{aligned} j(\tilde{a})\lambda &= \langle \tilde{a}, l(\lambda) \rangle \\ &= \langle \alpha i(a) + \bar{i}(\overline{a}), l(\lambda) \rangle \\ &= \alpha \langle i(a), l(\lambda) \rangle + \langle \bar{i}(\overline{a}), l(\lambda) \rangle \\ &= \alpha\lambda. \end{aligned}$$

زیرا $l(\lambda) \in A^t$ و $i(a) \in \tilde{A}$ پس $i(a)(l(\lambda))(a) = i(a)(\lambda) = \lambda(a) = \lambda$. در نتیجه خواهیم داشت $\langle i(a), l(\lambda) \rangle = \lambda$. اما $\langle \bar{i}(\overline{a}), l(\lambda) \rangle = 0$ زیرا $\bar{i}(\overline{a}) \in \tilde{A}$ و $\bar{i}(\overline{a})(\lambda) = \overline{\lambda}(\overline{a})$ و بنا به تعریف داریم $\overline{\lambda}(\overline{a})(a) = \lambda(a) - \lambda(a + \overline{a}) = 0$.

نتیجه ۱-۱-۱۳. *اگر A متناهی باشد، آنگاه دنباله*

$$0 \longrightarrow \overline{A} \xrightarrow{\bar{i}} \tilde{A} \xrightarrow{j} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

دقیق است.

برهان. با توجه به ضابطه ی نگاشت j به ازای هر $\overline{a} \in \overline{A}$ داریم $j \circ \overline{i}(\overline{a}) = \circ$. لذا دنباله‌ی فوق دقیق است. $\square$

توجه کنید که در این روش به راحتی می‌توانیم تصویر $\overline{A}$ را به عنوان ابرصفحه‌ای از $\tilde{A}$ با معادله $j(\tilde{a}) = \circ$ و تصویر A را به عنوان ابرصفحه‌ای از $\tilde{A}$ با معادله $j(\tilde{a}) = ۱$ بشناسیم. به عبارت دیگر $\overline{i}(\overline{A}) = j^{-۱}(\circ)$ و $i(A) = j^{-۱}(۱)$. توجه کنید که اگر دنباله

$$\circ \longrightarrow \overline{A} \xrightarrow{\overline{\alpha}} W \xrightarrow{j} \mathbb{R} \longrightarrow \circ$$

دقیق را داشته باشیم با تعریف $A = j^{-۱}(۱)$ نتیجه می‌شود که A یک فضای آفین شکل گرفته روی فضای برداری V و W به طور استاندارد با $\tilde{A}$ ایزومرف است.ایزومرفیسم دوگان نگاشت $\Psi : W^* \longrightarrow A^t$ با ضابطه $\Psi(\varphi)(a) = \varphi(i(a))$ است که $i : A \longrightarrow W$ شمول متعارف است.

۱-۲ مختصات روی فضای آفین

فرض کنیم $\langle A, \overline{A}, + \rangle$ یک فضای آفین و $(a_\circ, ..., a_m)$ یک خانواده از $m + ۱$ نقطه در A باشد. $(a_\circ, ..., a_m)$ یک خانواده از m بردار $(\overline{a_\circ a_۱}, ..., \overline{a_\circ a_m})$ در $\overline{A}$ را مشخص می کند که در آن $\overline{a_\circ a_i}$ برداری در $\overline{A}$ است که $\overline{a_\circ a_i} = a_i - a_\circ$. برعکس، به ازای نقطه $a_\circ$ در یک خانواده m تایی از بردارهای $(\overline{u}_۱, ..., \overline{u}_m)$ در $\overline{A}$، می‌توانیم خانواده $m + ۱$ نقطه ای $(a_\circ, ..., a_m)$ در A را به‌دست آوریم که به ازای $۱ \leq i \leq m$، $a_i = a_\circ + \overline{u_i}$.

درواقع عبارات بالا معادل با این است که به ازای هر $m \geq ۱$، می‌توانیم هر خانواده $m+۱$ نقطه ای $(a_\circ, ..., a_m)$ از نقاط A را با زوج $(a_\circ, (\overline{u}_۱, ..., \overline{u}_m))$ که در آن $\overline{u}_i$ بردارهایی در $\overline{A}$ هستند، متناظر در نظر بگیریم.

هنگامی که $(\overline{u}_۱, ..., \overline{u}_m)$ یک پایه از $\overline{A}$ باشد آنگاه به ازای هر $x \in A$، چون $x = a_\circ + \overline{a_\circ x}$، یک خانواده منحصربفرد $(x_۱, ..., x_m)$ از اسکالر ها وجود دارد بطوریکه

$$x = a_\circ + x_۱\overline{a_\circ a_۱} + ..., x_m\overline{a_\circ a_m}.$$

اسکالرهای $(x_۱, ..., x_m)$ مختصات مرتبط با $(a_\circ, (\overline{u}_۱, ..., \overline{u}_m))$ هستند.

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنید $\langle A, \overline{A}, + \rangle$ یک فضای آفین باشد. یک کنج آفین [۱] با مبدأ $a_\circ$ یک خانواده $(a_\circ, ..., a_m)$ از $m + ۱$ نقطه در A است بطوریکه $(\overline{a_\circ a_۱}, ..., \overline{a_\circ a_m})$ یک پایه از $\overline{A}$ می‌باشد.

زوج $(a_\circ, (\overline{a_\circ a_۱}, ..., \overline{a_\circ a_m}))$ یک کنج آفین با مبدأ $a_\circ$ نامیده می‌شود. بنابراین، هر $x \in A$ می‌تواند به ازای خانواده منحصر بفرد از اسکالرهای $(x_۱, ..., x_m)$ که مختصات x نامیده می‌شوند، به صورت زیر بیان می گردد

$$x = a_\circ + x_۱\overline{a_\circ a_۱} + ..., x_m\overline{a_\circ a_m}.$$

[۱] affine frame

فرض کنید A از بعد n باشد. حال ساختار پایه‌ی A^t را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید $(O, \overline{e_1}, ... \overline{e_n})$ یک کنج آفین روی A باشد. بنابراین، هر نقطه دارای نمایش $a = O + v^i \overline{e_i}$ است. خانواده‌ای از نگاشت‌های آفین$\{e^\circ, e^1, ..., e^n\}$ که به صورت $e^\circ(a) = 1$ و $e^i(a) = v^i$ تعریف شده‌اند یک پایه برای A^t می‌باشد. اگر $\varphi \in A^t$ و قرار دهیم $\varphi_\circ = \varphi(O)$ و $\varphi_i = \overline{\varphi}(\overline{e_i})$ در این صورت

$$\forall \varphi \in A^t; \;\; \varphi(a) = \varphi(O + v^i e_i) = \varphi(O) + v^i \overline{\varphi}(e_i) = \varphi_\circ e^\circ(a) + \varphi_i e^i(a).$$

لذا $\varphi = \varphi_\circ e^\circ + \varphi_i e^i$.

توجه کنید که برخلاف $e^1, ..., e^n$، نگاشت e° به کنجی که روی A انتخاب کرده‌ایم بستگی ندارد. درواقع e° بر نگاشت j منطبق است.

حال فرض کنید $\{e_\circ, e_1, ..., e_n\}$ نشانگر پایه $\tilde{A}$ و دوگان $\{e^\circ, e^1, ..., e^n\}$ باشد، در این صورت با تعریف تصویر ایمرشن متعارف به صورت $i(O) = e_\circ$ و $\overline{i}(\overline{e_i}) = e_i$ نتیجه می‌شود که برای $a = O + v^i e_i$، داریم

$$i(a) = i(O + v^i e_i) = i(O) + v^i \overline{i}(e_i) = e_\circ + v^i e_i.$$

اگر سیستم مختصاتی وابسته به پایه $\{e_\circ, ..., e_n\}$ روی $\tilde{A}$ را با $\{x^\circ, x^1, ..., x^n\}$ نمایش دهیم معادله تصویر نگاشت i به صورت $x^\circ = 1$ است در حالی که معادله تصویر نگاشت $\overline{i}$ به صورت $x^\circ = \circ$ می‌باشد. زیرا به ازای هر e^i داریم که $\overline{i}(\overline{e_i})(e^j) = \delta^i_j$. حال اگر عضو دلخواه $\tilde{a}$ از $\tilde{A}$ را در نظر بگیریم می‌توانیم آن را به صورت $\tilde{a} = \Sigma_{i=\circ}^n x^i e_i$ بنویسیم. در نتیجه به ازای هر $b \in A$ ، $i(b) \in \tilde{A}$. لذا با توجه به تعریف، $b = O + \Sigma_{i=\circ}^n v^i \overline{e_i}$. در این صورت

$$i(b) = i(\circ) + \Sigma_{i=1}^n v^i \overline{i}(\overline{e_i}) = e_\circ + \Sigma_{i=1}^n v^i e_i.$$

لذا معادله تصویر نگاشت i به صورت $x^\circ = 1$ بوده و همچنین

$$\overline{i}(\overline{a}) = \overline{i}(\Sigma_{i=\circ}^n v^i \overline{e_i}) = \Sigma_{i=1}^n v^i \overline{i}(\overline{e_i}) = \Sigma_{i=1}^n v^i e_i = \circ e_\circ + \Sigma_{i=1}^n v^i e_i.$$

در نتیجه معادله تصویر نگاشت $\overline{i}$ به صورت $x^\circ = \circ$ است.

مختصات وابسته به پایه بالا در $\tilde{A}^* = A^t$ با $(\mu_\circ, \mu_1, ..., \mu_n)$ نمایش داده می‌شود که برای هر$\varphi \in A^t$، $\mu_\alpha(\varphi) = \langle e_\alpha, \varphi \rangle$.

۱-۳ ساختار جبر لی روی فضای آفین

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنید A یک فضای آفین روی فضای برداری $\overline{A}$ باشد. یک ساختار جبر لی روی A به صورت زیر بیان می گردد:

۱. یک ساختار جبر لی $[\ ,\ ]$ روی $\overline{A}$،

۲. یک عملگر مشتق از A روی $\overline{A}$ ، به عبارت دیگر یک نگاشت $D:A\times\overline{A}\longrightarrow\overline{A}$ و $(a,\overline{a})\longmapsto D_a\overline{a}$ با خواص

$$
\begin{aligned}
D_a(\lambda\overline{a}) &= \lambda D_a\overline{a}\\
D_a(\overline{a}_1+\overline{a}_2) &= D_a\overline{a}_1+D_a\overline{a}_2\\
D_a[\overline{a}_1,\overline{a}_2] &= [D_a\overline{a}_1\ ,\ \overline{a}_2]+[\overline{a}_1\ ,\ D_a\overline{a}_2]
\end{aligned}
$$

۳. در شرط سازگاری صدق کند

$$D_{a+\overline{a}_1}\overline{a}_2=D_a\overline{a}_2+[\overline{a}_1,\overline{a}_2].$$

در مورد اول تنها به R-خطی و متقارن‌کج بودن براکت روی $\overline{A}$ نیاز است و سپس اتحاد ژاکوبی از نیاز روی D_a نتیجه می‌شود.

اگر از نماد $D_a\overline{a}\equiv[a,\overline{a}]$ استفاده کنیم آنگاه شرایط بالا به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$[a,\lambda\overline{a}] = \lambda[a,\overline{a}] \tag{۱-۲}$$

$$[a,\overline{a}_1+\overline{a}_2] = [a,\overline{a}_1]+[a,\overline{a}_2] \tag{۱-۳}$$

$$[a,[\overline{a}_1,\overline{a}_2]] = [[a,\overline{a}_1],\overline{a}_2]+[\overline{a}_1,[a,\overline{a}_2]] \tag{۱-۴}$$

$$[a+\overline{a}_1,\overline{a}_2] = [a,\overline{a}_2]+[\overline{a}_1,\overline{a}_2]. \tag{۱-۵}$$

این مسئله اجازه‌ی تعریف براکت روی عناصر A را به ما می‌دهد. با قرار دادن $[\overline{a},a]=-[a,\overline{a}]$ و اگر $b=a+\overline{a}$ باشد داریم

$$[a,b]=[a,a+\overline{a}]=[a,a]+[a,\overline{a}]=[a,\overline{a}].$$

این براکت متقارن کج است، زیرا اگر فرض کنیم $a,b\in A$ بطوریکه $b=a+\overline{a}$، در این صورت

$$[b,a]=[a+\overline{a},a]=[a,a]+[\overline{a},a]=-[a,\overline{a}]=-[a,b]$$

و در شرط اتحاد ژاکوبی صدق می‌کند، یعنی اگر $a,b,c\in A$ بطوریکه $b=a+\overline{a_1},c=a+\overline{a_2}$، آنگاه

$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$ ، زیرا

$$[a,[a+\overline{a}_1,a+\overline{a}_2]]+[a+\overline{a}_1,[a+\overline{a}_2,a]]+[a+\overline{a}_2,[a,a+\overline{a}_1]]$$

$$=[a,[a,\overline{a}_2]]+[a,[\overline{a}_1,a]]+[a,[\overline{a}_1,a_2]]$$

$$+[a,[\overline{a}_2,a]]+[\overline{a}_1,[\overline{a}_2,a]]+[a,[a,\overline{a}_1]]+[\overline{a}_2,[a,\overline{a}_1]]$$

$$=[a,[\overline{a}_1,\overline{a}_2]+[\overline{a}_1,[\overline{a}_2,a]]+[\overline{a}_2,[a,\overline{a}_1]]$$

حال اگر به جای $[a,[\overline{a}_1,\overline{a}_2]]$ معادل آن را از رابطه (۱-۴) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$=[a,[\overline{a}_1,\overline{a}_2]]=[[a,\overline{a}_1],\overline{a}_2]+[\overline{a}_1,[a,\overline{a}_2]]-[\overline{a}_1,[a,\overline{a}_2]]+[\overline{a}_2,[a,\overline{a}_1]]$$

$$=0$$

قضیه ۱-۳-۲. *یک ساختار جبر لی روی فضای آفین A معادل با توسیع جبر لی از جبر لی بدیهی $\mathbb{R}$ توسط $\overline{A}$ می باشد. به بیان صریح‌تر، هم‌ارز با این است که دنباله دقیق از فضاهای برداری*

$$0\longrightarrow\overline{A}\xrightarrow{\ \overline{i}\ }\tilde{A}\xrightarrow{\ j\ }\mathbb{R}^*\longrightarrow 0$$

یک دنباله دقیق از جبر لی‌ها باشد.

برهان. اگر دنباله دقیق یکی از جبر لی‌ها باشد به یقین یک ساختار جبر لی روی $\overline{A}$ و نگاشت D با ضابطه $D_a\overline{a}=[i(a),\overline{i}(\overline{a})]$ که در تمام شرایط مورد نیاز برای تعریف ساختار جبر لی روی A صدق می کند، چون $i,\overline{i}$ نگاشت های آفین هستند لذا خاصیت خطی دارند و با توجه به اینکه دنباله فوق یک جبر لی است خواهیم داشت

$$\begin{aligned}D_a(\lambda\overline{a}) &= [i(a)+\overline{i}(\lambda\overline{a})]\\ &= [i(a),\lambda\overline{i}(\overline{a})]\\ &= \lambda[i(a),\overline{i}(\overline{a})]\\ &= \lambda D_a\overline{a}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_a(\overline{a}_1+\overline{a}_2) &= [i(a),\overline{i}(a+\overline{a}_1)] \\ &= [i(a)\ ,\ \overline{i}(\overline{a}_1)+\overline{i}(\overline{a}_2)] \\ &= [i(a)\ ,\ \overline{i}(\overline{a}_1)]+[i(a),\overline{i}(\overline{a}_2)] \\ &= D_a\overline{a}_1+D_a\overline{a}_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_a([\overline{a}_1,\overline{a}_2]) &= [i(a),\overline{i}[\overline{a}_1,\overline{a}_2]] \\ &= [[i(a),\overline{i}(\overline{a}_1)],\overline{i}(\overline{a}_2)]+[\overline{i}(\overline{a}_1),[i(a),\overline{i}(\overline{a}_2)]] \\ &= [D_a\overline{a}_1,\overline{i}(\overline{a}_2)]+[\overline{i}(\overline{a}_1),D_a\overline{a}_2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{a+\overline{a}_1}\overline{a}_2 &= [i(a+\overline{a}_1),\overline{i}(\overline{a}_2)] \\ &= [i(a)+\overline{i}(\overline{a}_1),\overline{i}(\overline{a}_2)]=[i(a),\overline{i}(\overline{a}_2)]+[\overline{i}(\overline{a}_1)\ ,\ \overline{i}(\overline{a}_2)] \\ &= D_a\overline{a}_2+[\ \overline{i}(\overline{a}_1),\overline{i}(\overline{a}_2)\ ]. \end{aligned}$$

برعکس، فرض کنیم یک ساختار جبر لی روی فضای آفین A داشته باشیم. اگر عنصر $a\in A$ را ثابت در نظر بگیریم، آنگاه هر عنصر $\tilde{a}\in\tilde{A}$ را می‌توان به صورت $\tilde{a}=\lambda i(a)+\overline{i}(\overline{a})$ نوشت. می‌توانیم براکت از دو عنصر $\tilde{a}_1=\lambda_1 i(a)+\overline{i}(\overline{a}_1)$ و $\tilde{a}_2=\lambda_2 i(a)+\overline{i}(\overline{a}_2)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$[\tilde{a}_1,\tilde{a}_2]=\overline{i}(\ [\overline{a_1},\overline{a_2}]+\lambda_1 D_a\overline{a_2}-\lambda_2 D_a\overline{a_1}\ )$$

این براکت دو-خطی و متقارن کج است و در شرط اتحاد ژاکوبی صدق می کند.

متقارن کج:

$$\begin{aligned} [\tilde{a}_2,\tilde{a}_1] &= \overline{i}(\ [\overline{a}_2,\overline{a}_1]+\lambda_2 D_a\overline{a}_1-\lambda_1 D_a\overline{a}_2\ ) \\ &= \overline{i}(-[\overline{a}_1,\overline{a}_2]-(-\lambda_{12} D_a\overline{a}_1+\lambda_1 D_a\overline{a}_2\ )) \\ &= -\overline{i}(\ [\overline{a}_1,\overline{a}_2]-\lambda_1 D_a\overline{a}_2+\lambda_2 D_a\overline{a}_1]\ ) \\ &= -[\tilde{a}_1,\tilde{a}_2]. \end{aligned}$$

دوخطی:

اگر فرض کنیم $\tilde{a}_1 = \lambda_1 i(a) + \bar{i}(\overline{a}_1)$ و $\tilde{a}_2 = \lambda_2 i(a) + \bar{i}(\overline{a}_2)$ و $\tilde{a}' = \lambda' i(a) + \overline{a}(\overline{a}')$، در این صورت

$$\begin{aligned}
[\alpha\tilde{a}_1 + \tilde{a}', \tilde{a}_2] &= \bar{i}([\alpha\overline{a}_1 + \overline{a}', \overline{a}_2] + (\alpha\lambda_1 + \lambda')D_a\overline{a}_2 - \lambda_2 D_a(\alpha\overline{a}_1 + \overline{a}'))\\
&= \bar{i}(\alpha[\overline{a}_1, \overline{a}_2] + [\overline{a}', \overline{a}_2] + \alpha\lambda_1 D_a\overline{a}_2 + \lambda' D_a\overline{a}_2 - \alpha\lambda_2 D_a\overline{a}_1 - \lambda_2 D_a\overline{a}')\\
&= \alpha\,\bar{i}([\overline{a}_1, \overline{a}_2] + \lambda_1 D_a\overline{a}_2 - \lambda_2 D_a\overline{a}_1) + \bar{i}([\overline{a}', \overline{a}_2] + \lambda' D_a\overline{a}_2 - \lambda_2 D_a\overline{a}')\\
&= \alpha[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2] + [\tilde{a}', \tilde{a}_2].
\end{aligned}$$

علاوه بر این، این تعریف به انتخاب نقطه a وابسته نیست زیرا اگر a' یک نقطه دیگر در A باشد، آنگاه $a' = a+\bar{b}$ برای بعضی از $\bar{b} \in \overline{A}$ و شرط سازگاری ایجاب می کند که نتیجه به آن انتخاب وابسته نباشد. زیرا اگر فرض کنیم $\tilde{a}_1 = \lambda_1 i(a) + \bar{i}(\overline{a}_1)$ و $\tilde{a}'_1 = \lambda'_1 i(a) + \bar{i}(\overline{a}'_1)$ و $\tilde{a}_2 = \lambda_2 i(a) + \bar{i}(\overline{a}_2)$ و $\tilde{a}'_2 = \lambda'_1 i(a) + \bar{i}(\overline{a}'_2)$ و همچنین $a' = a + \bar{b}$ و $\overline{a}'_1 = \overline{a}_1 - \lambda_1\bar{b}$ و $\overline{a}'_2 = \overline{a}_2 - \lambda_2\bar{b}$، آنگاه با توجه به تعریف $[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2]$ داریم:

$$\begin{aligned}
[\tilde{a}'_1, \tilde{a}'_2] &= \bar{i}([\overline{a}'_1, \overline{a}'_2] + \lambda_1 D_{a'}\overline{a}'_2 - \lambda_2 D_{a'}\overline{a}'_1)\\
&= \bar{i}([\overline{a}'_1, \overline{a}'_2] + \lambda_1 D_{a+\bar{b}}\overline{a}'_2 - \lambda_2 D_{a+\bar{b}}\overline{a}'_1)\\
&= \bar{i}([\overline{a}'_1, \overline{a}'_2] + \lambda_1 D_a\overline{a}_{2'} + \lambda_1[\bar{b}, \overline{a}'_2] - \lambda_2 D_a\overline{a}'_1 - \lambda_2[\bar{b}, \overline{a}'_1])\\
&= \bar{i}([\overline{a}_1 - \lambda_1\bar{b}, \overline{a}_2 - \lambda_2\bar{b}] + \lambda_1 D_a(\overline{a}_2 - \lambda_2\bar{b}) + \lambda_1[\bar{b}, \overline{a}_2 - \lambda_2\bar{b}] - \lambda_2 D_a(\overline{a}_1 - \lambda_1\bar{b}))\\
&= \bar{i}([\tilde{a}_1, \tilde{a}_2] - \lambda_2[\overline{a}_1, \bar{b}] - \lambda_1[\bar{b}, \overline{a}_2] + \lambda_1\lambda_2[\bar{b}, \bar{b}] + \lambda_1 D_a\overline{a}_2 - \lambda_1\lambda_2 D_a\bar{b} + \lambda_1[\bar{b}, \overline{a}_2]\\
&\quad - \lambda_1\lambda_2[\bar{b}, \bar{b}] - \lambda_2 D_a\overline{a}_1 + \lambda_2\lambda_1 D_a\bar{b} - \lambda_2[\bar{b}, \overline{a}_1] + \lambda_2\lambda_1[\bar{b}, \bar{b}])\\
&= \bar{i}([\overline{a}_1, \overline{a}_2] + \lambda_1 D_a\overline{a}_2 - \lambda_2 D_a\overline{a}_1)\\
&= [\tilde{a}_1, \tilde{a}_2].
\end{aligned}$$

در پایان واضح است که نگاشت‌های i و j هومورفیسم‌های جبر لی هستند. $\square$

توجه کنید که تنها شرط لازم برای اینکه ساختار جبر لی روی $\tilde{A}$ توسیع $\mathbb{R}$ توسط $\overline{A}$ باشد این است که براکت مقدار خود را در $\overline{A}$ بگیرد، به طور نمادین یعنی $[\tilde{A}, \tilde{A}] \subset \overline{A}$. باز هم کنج آفین روی A را در نظر می گیریم. داریم که براکت روی $\tilde{A}$ توسط براکت‌های عناصر پایه وابسته بیان می گردد. چون همه‌ی براکت‌ها باید مقادیر خود را در تصویر نگاشت $\bar{i}$ بگیرند، لذا باید به‌صورت زیر باشند

$$[e_0, e_0] = 0, \qquad [e_0, e_0] = C^k_{0j} e_k, \qquad [e_i, e_j] = C^k_{ij} e_k.$$