بسم الله الرحمن الرحيم

٤٧٩٣٦

دانشگاه تبریز

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

تجزیه اولیه: سازگاری، استقلال و رشد خطی

اساتید راهنما:

آقای دکتر علی اکبر مهرورز- آقای دکتر احد مهدی زاده

استاد مشاور:

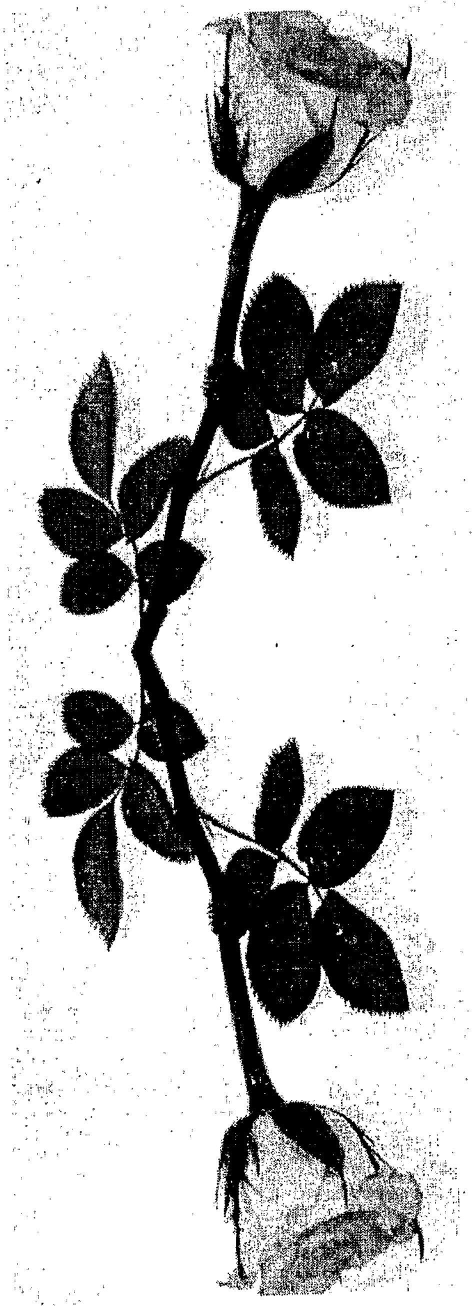
آقای دکتر رضا نقی پور

پژوهشگر:

جعفر اعظمی

۱۳۸۲ /۸/ ۲۰

شهریور ۸۲



تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

و

برادران و خواهران مهربانم

بنام خدا

حمد وسپاس به درگاه یگانه معبود هستی که با یاری و نظر لطفش توانستیم گامی چند در راه تحصیل علم برداریم. اکنون که به یاری خداوند متعال دوره کارشناسی‌ارشد را به پایان می‌رسانم وظیفه خود می‌دانم که از اساتید راهنمایم جناب آقای دکتر علی‌اکبر مهرورز و جناب آقای دکتر احد مهدی‌زاده به خاطر راهنمائیهای ایشان در تدوین این پایان‌نامه صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم. از استاد مشاورم جناب آقای دکتر رضا نقی‌پور به خاطر زحمات جبران ناپذیر ایشان در طول تحصیلم و همچنین به خاطر راهنمائیهای ارزنده ایشان در تدوین پایان‌نامه بسیار تقدیر و تشکر می‌کنم از اساتید محترم داور آقای دکتر عظیم اهری و آقای دکتر محمد شهریاری که زحمت داوری این پایان‌نامه را قبول نمودند بسیار تقدیر و تشکر می‌کنم از رئیس دانشکده علوم ریاضی جناب آقای دکتر علی‌اکبر مهرورز و معاون دانشکده جناب آقای دکتر پوررضا و مدیر محترم گروه ریاضی محض جناب آقای دکتر فاروقی به خاطر فراهم آوردن شرایط و امکانات لازم در تدوین پایان‌نامه تقدیر و تشکر می‌کنم.

از همه اساتید محترم گروه ریاضی در دوره کارشناسی و کارشناسی‌ارشد که از علم و معرفتشان بهره‌مند شده‌ام تقدیر و تشکر می‌کنم از همه دوستان عزیز بویژه آقای احمد خوجالی که در تدوین پایان‌نامه اینجانب را یاری نمودند تقدیر و تشکر می‌کنم.

از پدر و مادر عزیزم و سایر اعضای محترم خانواده به خاطر زحمات جبران‌ناپذیر ایشان در طول تحصیلم که همواره مشوق اینجانب بوده‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم. از خداوند متعال برای همه عزیزان موفقیت و سربلندی را در تمام مراحل زندگی خواستارم.

جعفر اعظمی

نام‌خانوادگی دانشجو: اعظمی **نام:** جعفر

عنوان پایان‌نامه: تجزیه اولیه: سازگاری، استقلال و رشد خطی

اساتید راهنما: آقای دکتر علی‌اکبر مهرورز- آقای دکتر احد مهدی‌زاده

استاد مشاور: آقای دکتر رضا نقی‌پور

مقطع تحصیلی: کارشناسی‌ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر **دانشگاه:** تبریز

دانشکده: علوم‌ریاضی **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** شهریور ۸۲ **تعداد صفحه:** ۶۳

کلید واژه: مدول انژکتیو، رشد خطی، تجزیه اولیه، ایده‌آل‌های اول وابسته

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و نوتری باشد. فرض کنیم M یک R- مدول با تولید متناهی و N یک زیر مدول M باشد در این پایان‌نامه خواص زیر در مورد تجزیه اولیه را ثابت می‌کنیم.

۱- اگر $\mathrm{Ass}(M/N)=\{P_1,\dots,P_s\}$ و Q_i یک مولفه P_i- اولیه N باشد $(1\leq i\leq s)$ در این صورت $N=Q_1\cap\dots\cap Q_s$

۲- به ازای هر زیر مجموعه $X=\{P_1,\dots,P_r\}\subseteq \mathrm{Ass}(M/N)$، X یک زیرمجموعه باز $\mathrm{Ass}(M/N)$ است اگر و فقط اگر به ازای مولفه‌های P_i- اولیه Q_i و Q_i' از N، داشته باشیم.

$$Q_1\cap\dots\cap Q_r=Q_1'\cap\dots\cap Q_r'$$

۳- به ازای ایده‌آلهای ثابت $I_1,\dots,I_t$ از R یک عدد طبیعی مانند k موجود است بطوری که به ازای هر $n_1,\dots,n_t$ از اعداد طبیعی یک تجزیه اولیه برای زیر مدول $I_1^{n_1}\dots I_t^{n_t}M$ از M موجود است بطوری که به ازای هر مؤلفه P-اولیه مانند Q، داریم:

$$P^{k(n_1+\dots+n_t)}M\subseteq Q$$

فهرست مطالب

عنوان .... صفحه

مقدمه ۱

فصل اول: بررسی منابع

تعاریف مقدماتی ۳

حلقه‌های مدرج ۱۸

حلقه‌های ریس ۲۰

فصل دوم: روش تحقیق

پیشنیاز ۳۳

قضیه اصلی شارپ ۳۴

فصل سوم: نتایج و بحث

پیشنیاز ۴۱

قضیه مربوط به خاصیت سازگاری ۴۶

قضیه مربوط به خاصیت باز بودن ۴۷

قضیه مربوط به رشد خطی ۵۰

منابع ۶۳

مقدمه:

در سراسراین پایان‌نامه R را یک حلقه نوتری جابجائی و یکدار و M را یک مدوّل با تولید متناهی روی R در نظر می‌گیریم. این پایان‌نامه در سه فصل نوشته شده که در فصل اول تمامی تعاریف و قضایایی را که لازم خواهند بود آورده‌ایم و فصل دوم و سوم بر اساس دو مقاله تهیه شده‌اند فصل دوم براساس مقاله:

Injective modules and linear growth of primary decompositions

که توسط R.Y. Shrap در سال ۱۹۹۹ نوشته شده و فصل سوم براساس مقاله:

Primary decompostion: compatibity, Independence and linear growth

که توسط Yongwei Yao در سال ۲۰۰۱ در جهت تعمیم و همچنین ارائه برهانهای کوتاه برای مقاله R.Y. Sharp نوشته شده است در واقع قضیه اصلی که R.Y. Sharp در مقاله خود اثبات کرده همین قضیه را Yongwei Yao به عنوان نتیجه‌ای از قضایای اصلی خود بیان کرده است.

فصل اول

بررسی منابع

(۱-۱) **تعریف.** فرض کنید R یک حلقه و E یک R- مدول باشد. E را یک R- مدول انژکتیو می‌گوئیم در صورتیکه در یکی از شرطهای هم ارز زیر صدق کند.

(i) به ازای هر دیاگرام از R- مدولها و R- هوموموفیسمها به صورت

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

، که در آن دنبالهٔ سطر اول دقیق است، یک R- هوموموفیسم مانند $h: B\to E$ موجود باشد، بطوریکه دیاگرام تکمیل شده جابجائی باشد، یعنی $hof=g$.

(ii) به ازای هر ایده‌آل I از R و هر دیاگرام به صورت

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "inc"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

، یک R- هوموفیسم مانند $h: R\to E$ موجود باشد بطوریکه $hoinc = f$، که در آن inc نگاشت شمول می‌باشد.

(iii) به ازای هر رشته دقیق از R- مدولها و R- هوموموفیسمها به صورت $0\to A\to B\to C\to 0$، رشته $0\to Hom_R(C, E)\to Hom_R(B, E)\to Hom_R(A, E)\to 0$ دقیق باشد.

(۱-۲) **تعریف.** فرض کنید R یک حلقه و A و E دو R- مدول باشند بطوریکه $A\subseteq E$، E را یک توسیع اساسی A می‌نامیم در صورتیکه به ازای هر زیر مدول غیر صفر E' از E، داشته باشیم. $E'\cap A\neq 0$. یا به عبارت معادل به ازای هر عضو غیر صفر e از E، $r\in R$ موجود باشد بطوریکه $0\neq re\in A$.

(۱-۳) **مثال.** هر R- مدول توسیع اساسی خودش می‌باشد.

(۱-۴) **مثال.** اگر R یک حوزه صحیح باشد میدان کسرهای آن به عنوان R- مدول یک توسیع اساسی R می‌باشد.

(۱-۵) **تعریف.** فرض کنید A و E دو R- مدول باشند بطوریکه $A\subseteq E$. E را یک پوشش انژکتیو برای A می‌نامیم در صورتیکه E در یکی از سه شرط معادل زیر صدق کند.

(i) E یک توسیع اساسی انژکتیو A است.

(ii) E یک توسیع اساسی ماکسیمال A است.

(iii) E یک توسیع انژکتیو می‌نیمال A است.

(۱-۶) **تبصره.** پوشش انژکتیو هر مدول تحت ایزومرفیسم منحصر بفرد است.

(۱-۷) **تعریف.** فرض کنید R یک حلقه و E یک R- مدول باشد. E را متلاشی نشدنی می‌نامیم در صورتیکه در دو شرط زیر صدق کند.

(i) $E\neq 0$.

(ii) جمعوندهای مستقیم آن زیر مدول صفر و خود E است.

(۱-۸) **تعریف.** فرض کنید E یک R- مدول و M یک زیر مدول E باشد. M را زیر مدول تحویل‌ناپذیر از E می‌نامیم در صورتیکه:

(i) $M\neq E$.

(ii) اگر M_1 و M_2 زیر مدولهایی از E باشند، بطوریکه $M=M_1\bigcap M_2$ آنگاه $M=M_1$ یا $M=M_2$.

(۱-۹) **قضیه.** فرض کنید E یک R- مدول انژکتیو باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(i) E متلاشی نشدنی است.

(ii) $E\neq 0$ و E پوشش انژکتیو هر زیر مدول خودش می‌باشد.

(iii) زیر مدول صفر از E تحویل‌ناپذیر است.

برهان. (i) $\Leftarrow$ (ii) فرض کنید E متلاشی نشدنی باشد ثابت می‌کنیم $E\neq 0$ و E پوشش انژکتیو هر زیر مدول غیر صفر خودش می‌باشد. چون E متلاشی نشدنی است بنا به تعریف $E\neq 0$. حال فرض میکنیم M یک زیر مدول غیر صفر E باشد. در این صورت E دارای زیر مدولی مانند E' است که پوشش انژکتیو M می‌باشد. بنابراین E' جمعوند مستقیم E می‌باشد. چون E' مخالف صفر است بنابه فرض $E'=E$ واثبات به پایان می‌رسد.

(ii) $\Leftarrow$ (iii) حال فرض کنید $E\neq 0$ و پوشش انژکتیو هر زیر مدول غیر صفر خود باشد ثابت می‌کنیم زیر مدول صفر از E تحویل‌ناپذیر است. فرض کنید M_1 و M_2 زیر مدولهایی از E باشند بطوریکه $M_1 \cap M_2 = 0$. فرض کنید $M_1\neq 0$ بنا به فرض $E=E(M_1)$ که در آن $E(M_1)$ پوشش انژکتیو M_1 است بویژه E توسیع اساسی M_1 می‌باشد در نتیجه $M_2=0$ و حکم به پایان می‌رسد.

(iii) $\Leftarrow$ (i) بالاخره فرض کنید زیر مدول صفر از E تحویل‌ناپذیر باشد ثابت می‌کنیم E متلاشی نشدنی است.

بنا به فرض $E\neq 0$، فرض کنیم E_1 و E_2 زیر مدولهایی از E باشند بطوریکه

$$E = E_1 \oplus E_2$$

در این صورت $E_1 \cap E_2 = 0$ و این هم یک تناقض است لذا نتیجه می‌شود که E متلاشی نشدنی است.

(۱-۱۰) **قضیه**. فرض کنید R یک حلقه نوتری و E یک R- مدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

(i) E یک R- مدول انژکتیو متلاشی نشدنی است.

(ii) ایده‌آل اولی مانند P از R موجود است، بطوریکه $E \approx E(\frac{R}{P})$.

برهان. (ر.ک. [۱۵] صفحه ۵۳).

(۱-۱۱) **قضیه**. فرض کنید M یک R- مدول نوتری باشد. در این صورت $E(M)$ به صورت جمع مستقیم تعداد متناهی زیر مدولهای انژکتیو متلاشی نشدنی خود می‌باشد.

برهان. (ر.ک. [۱۵] صفحه ۸۹)

(۱-۱۲) **قضیه**. فرض کنید R حلقه نوتری و P ایده‌آل اولی از R باشد. فرض کنید $E = E(\frac{R}{P})$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$، $A_n = 0 :_E P^n$، در این صورت $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. بعلاوه اگر P یک ایده‌آل ماکزیمال R باشد. آنگاه $0_R : A_n = P^n$ و $0 :_R E = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$.

برهان. (ر.ک. [۱۵] صفحه ۱۰۷)

(۱-۱۳) **تعریف.** فرض کنید M یک R- مدول و $a\in R$. می‌گوئیم a یک مقسوم‌علیه صفر روی M است، اگر $0\neq x\in M$ وجود داشته باشد بطوریکه $ax=0$. در غیر این صورت a را یک M- منظم می‌نامیم.

(۱-۱۴) **تبصره.** طبق تعریف بالا $a\in R$ رایک عضو نامقسوم‌علیه صفر از R می‌نامیم، در صورتی که به ازای هر $x\in R$ اگر $ax=0$ آنگاه $x=0$.

(۱-۱۵) **قضیه.** فرض کنید R یک حلقه نوتری و m ایده‌آل ماکزیمالی از R باشد. در این صورت $E=E(\frac{R}{m})$ یک R- مدول آرتینی است.

برهان. (ر.ک. [۱۵] صفحه ۱۱۶).

(۱-۱۶) **تبصره.** فرض کنید $S=R\setminus P$ که در آن P یک ایده‌آل اول R می‌باشد. در این صورت S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R می‌باشد و $S^{-1}R$ را حلقه کسرهای R می‌نامیم و آنرا با نماد R_P نشان می‌دهیم. و یا

$$S^{-1}R=\left\{\frac{r}{s}\,|\, r\in R\ ,\ \ s\in R\setminus P\right\}$$

بنا به ([۱۵] صفحه ۱۲۷) $E=E(\frac{R}{P})$ یک R_P- مدول است.

(۱-۱۷) **قضیه.** فرض کنید R یک حلقه و P یک ایده‌ال اول R باشد. در این صورت $E=E(\frac{R}{P})$ و $E_{R_P}(\frac{R_P}{PR_P})$ به عنوان R_P- مدول ایزومرف‌اند. که در آن PR_P تنها ایده‌ال ماکزیمال R_P می‌باشد.

برهان. فرض کنید $x\in\frac{R}{P}$ در این صورت x توسط هر عضو غیر یکه از R_P صفر خواهد شد. یعنی هر عضو غیر یکه R_P اثرش بر x برابر صفر خواهد شد. ولی اعضای غیر یکه R_P دقیقاً

عضوهایی بصورت $\varphi(r)\varphi(t)^{-1}$ است که $r\in P$ و $t\in R\backslash P$، حال اگر $x = r'+P$ عضوی از $\frac{R}{P}$ باشد. آنگاه داریم.

$$\varphi(r)(x) = rr' + P = \overline{0} \Rightarrow \varphi(r)\varphi(t)^{-1}(x) = 0$$

از طرفی چون اعضای غیر یکه R_P در PR_P قرار دارند. پس $0\underset{R_P}{:}x = PR_P$ و در نتیجه $R_Px \approx \frac{R_P}{PR_P}$. حال چون E به عنوان R_P- مدول پوشش انژکتیو R_Px است لذا می‌توان نوشت که:

$$E(R_Px) = E(\frac{R}{P}) \approx E_{R_P}(\frac{R_P}{PR_P})$$

(۱-۱۸) **تعریف.** فرض کنید M یک R- مدول و S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد در این صورت مجموعه $S^{-1}M = \left\{\frac{m}{s} \mid m\in M,\, s\in S\right\}$ یک $S^{-1}R$- مدول است. و اگر $S=R\backslash P$، که P یک ایده‌آل اول R است، آنگاه $S^{-1}M$ را با نماد M_P نشان می‌دهیم.

(۱-۱۹) **تعریف.** فرض کنید M یک R- مدول و N یک زیر مدول واقعی از M باشد. N را یک زیر مدول اولیه M می‌نامیم در صورتیکه به ازای هر $x\in M$ و هر $a\in R$، اگر $ax\in N$ آنگاه $x\in N$ یا

$$a \in \sqrt{N\underset{R}{:}M}$$

(۱-۲۰) **تبصره.** $N\underset{R}{:}M = 0\underset{R}{:}\frac{M}{N}$. لذا N یک زیر مدول اولیه است اگر و تنها اگر برای هر $x\in M$ و $a\in R$ اگر $ax\in N$ آنگاه $x\in N$ یا $a \in \sqrt{0\underset{R}{:}\frac{M}{N}}$.

(۱-۲۱) **تبصره.** اگر M و N دو R- مدول باشند بطوریکه $N\subseteq M$ برای هر $a\in R$ هomomorphism $\varphi_a : \frac{M}{N} \to \frac{M}{N}$ برای هر $x\in M$، با ضابطه $\varphi_a(x) = ax+N$ یک به یک یا پوچتوان است اگر و تنها اگر N یک زیر مدول اولیه M باشد.

برهان. لزوم شرط: فرض کنید φ_a پوچتوان نباشد ثابت می‌کنیم φ_a یک به یک است.

بنا به فرض برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $\varphi_a^n \neq 0$ در نتیجه $a^n\left(\frac{M}{N}\right) \neq 0$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و لذا $a \notin \sqrt{0 :_R \frac{M}{N}}$ حال فرض کنید $\varphi_a(x+N) = \bar{0}$ در این صورت $ax \in N$ چون N یک زیر مدول اولیه است پس $x \in N$ لذا φ_a یک به یک است. اثبات کفایت شرط بطور مشابه ثابت می‌شود.

(۲۲-۱) **تبصره.** اگر N یک زیر مدول اولیه M باشد آنگاه $N :_R M$ یک ایده‌ال اولیه R است.

(۲۳-۱) **تعریف.** فرض کنید M یک R- مدول و P ایده‌ال اولی از R باشد. P را یک ایده‌ال اول وابسته M می‌نامیم در صورتیکه $x \in M$ موجود باشد بطوریکه $P = 0 :_R x$.

(۲۴-۱) **تبصره.** اگر R یک حوزه صحیح و P یک ایده‌ال اول وابسته آن باشد آنگاه $P = 0$. همچنین اگر P یک ایده‌ال اول R باشد در این صورت تنها ایده‌ال اول وابسته $\frac{R}{P}$ خود P است.

(۲۵-۱) **تبصره.** مجموعه همه ایده‌ال‌های اول وابسته R- مدول M را با علامت $\mathrm{Ass}_R(M)$ یا به اختصار با علامت $\mathrm{Ass}(M)$ نشان می‌دهیم.

(۲۶-۱) **لم.** فرض کنید M یک R- مدول و P یک ایده‌ال اول R باشد در این صورت $P \in \mathrm{Ass}(M)$ اگر و تنها اگر زیر مدولی مانند M' از M موجود باشد بطوریکه $M' \approx \frac{R}{P}$.

برهان. با توجه به تعریف (۲۳-۱) اثبات بدیهی است.

(۲۷-۱) **قضیه.** اگر R یک حلقه نوتری و M یک R- مدول باشد آنگاه $\mathrm{Ass}M = \varnothing \Leftrightarrow M = 0$.

برهان. اگر $M = 0$ آنگاه حکم بدیهی است. حال فرض کنید $M \neq 0$ ثابت می‌کنیم $\mathrm{Ass}(M) \neq \varnothing$ برای اینکار فرض کنید $\sum = \{0 :_R x \mid x \in M; x \neq 0\} \neq \varnothing$. چون R نوتری است پس Σ دارای عضو ماکزیمال است. فرض کنید $P = 0 :_R y$ که $y \in M$، عضو ماکزیمال Σ باشد. نشان می‌دهیم P یک ایده‌ال اول است. فرض کنید $a,b \in R$ و $ab \in P$ ثابت می‌کنیم $a \in P$ یا $b \in P$. فرض کنید $b \notin P$ ثابت می‌کنیم $a \in P$. بنا به فرض $by \neq 0$ و $aby = 0$ لذا $a \in 0 :_R by$ پس $a \in 0 :_R by \supseteq 0 :_R y$ ماکزیمال بودن P نتیجه می‌دهد که $0 :_R by = 0 :_R y$ لذا $a \in 0 :_R y$.

(۲۸-۱) **قضیه.** فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R- مدول با تولید متناهی باشد. آنگاه $Ass(M)$ یک مجموعه متناهی است.

برهان. می‌دانیم که اگر R یک حلقه نوتری و M یک R- مدول ناصفر با تولید متناهی باشد در این صورت یک زنجیر بصورت زیر:

$$0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n = M$$

موجود است که در آن M_iها زیر مدول‌های M هستند و برای هر $1 \le i \le n$ رابطه زیر برقرار است.

$$\frac{M_i}{M_{i-1}} \approx \frac{R}{P_i}$$

که در آن P_iها ایده‌ال‌های اول از حلقه R می‌باشند.

اگر $M \neq 0$ در این صورت چون حلقه R نوتری است پس نتیجه می‌شود که $Ass_R(M) \neq \varnothing$

فرض کنید $P_1 \in Ass(M)$ پس بنا به تعریف یک زیر مدول مانند M_1 از M موجود است بطوریکه

$$M_1 \approx \frac{R}{P_1}$$

حال اگر $M_1 = M$ حکم تمام است در غیر این صورت $\frac{M}{M_1} \neq 0$ لذا $Ass_R\left(\frac{M}{M_1}\right) \neq \varnothing$.

فرض کنید $P_2 \in Ass_R\left(\frac{M}{M_1}\right)$ لذا $\frac{M}{M_1}$ دارای یک زیر مدول مانند $\frac{M_2}{M_1}$ است بطوریکه

$$\frac{M_2}{M_1} \approx \frac{R}{P_2}$$

پس $0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq M_2 \subseteq M$ حال اگر $M_2 = M$ حکم تمام است در غیراینصورت طبق حالت‌های قبل اثبات را ادامه می‌دهیم چون M نوتری است پس زنجیر صعودی حاصل متوقف می‌شود. لذا زنجیر $0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n = M$ یک زنجیر از زیر مدول‌های M است و $\frac{M_i}{M_{i-1}} \approx \frac{R}{P_i}$.