بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش کاربردی)

برخی ویژگی های معادلات جزیی دیفیوژن کسری از مرتبه ساده یا توزیع شده

از :

نسیم عباسی رودکناری

استاد راهنما :

دکتر آرمان عقیلی

(تیر ۱۳۸۸)

تقدیم به ...

این مجموعه را با تمام عشق و ارادتم تقدیم می کنم به محضر شریف آقا امام زمان (عـج) ، روح بلنـد مرتبه شهدای گلگون کفن کشور سرافرازمان و در پایان بر اسطوره های جاوید زنـدگیم، پـدر و مـادر عزیزم، باشد که لیاقت آن را داشته باشم که دین خود را به همه ی آن عزیزان و به سـرزمین مـادری ادا نمایم.

تقدیر و تشکر ...

تقدیر و تشکر می کنم از استاد عالیقدرم در دوره ی کارشناسی ارشد، جناب آقای دکتر عقیلـی، کـه مجدانه در رشد و بالندگی فکری و روحی من تلاش کردند. و نیز اساتید محترم گروه ریاضـی کـه در طول این سالها افتخار شاگردی این بزرگان را داشتم. امیدوارم در پنـاه الطـاف خداونـد بـاری تعـالی سلامت و موفق باشند.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل دوم ـ معرفی برخی توابع

فصل سوم ـ مشتقات و انتگرالهای کسری کاپوتو و ریمان ـ لیوول

فصل چهارم ـ حل معادلات دیفیوژن کسری از مرتبه ی ساده

فهرست اشکال

چکیده

برخی ویژگی های معادلات جزیی دیفیوژن کسری از مرتبه ساده یا توزیع شده

نسیم عباسی رودکناری

معادله دیفیوژن کسری زمان، از معادله دیفیوژن استاندارد، با قرار دادن مشتق کسری از مرتبه $\beta \in (0,1)$ به جای مشتق زمان مرتبه اول به دست می آید.

جواب اساسی مساله کوشی به عنوان چگالی احتمال برای یک فرایند تصادفی غیر مارکوف خود متشابه، وابسته به یک رخداد **Sub-diffusion** تفسیر شده است.

یک تعمیم دیگر به وسیله در نظر گرفتن یک توزیع پیوسته یا گسسته از یک مشتق کسری زمان از مرتبه کمتر از یک به دست می آید. سپس جواب اساسی هنوز یک تابع چگالی احتمالی از یک فرایند غیر مارکوف است که دیگر خود متشابه نیست. اما یک توزیع متناظر از یک مقایس زمان را نشان می دهد.

کلید واژه : دیفیوژن ناهنجار ; مشتقات کسری; تبدیلات انتگرالی; انتگرال ملین ـ بارنز ; فرایندهای تصادفی; قوانین نیروی مجانبی

Abstract

Some aspects of fractional diffusion equations of single and distributed order
Nassim Abbasi

The time fractional equation is obtained from the standard diffusion equation by replacing the first-order time derivative with a fractional derivative of order $\beta \in (0,1)$. The fundamental solution for the Cauchy problem is interpreted as a probability density of a self-similar non-Markovian stochastic process related to a phenomenon of sub-diffusion (the variance grows in time sub-linearly). A further generalization is obtained by considering a continuous or discrete distribution of fractional time derivatives of order less than one. Then the fundamental solution is still a probability of a non-Markovian process that, however, is no longer self-similar but exhibits a corresponding distribution of time-scales.

Keywords: Anomalous diffusion; Fractional derivatives; Integral transforms; Mellin-Barnes integrals; Stochastic processes; Asymptotic power laws.

پیشگفتار

معادلات دیفرانسیل یکی از رشته های علوم پایه و مهندسی است، کارایی بالای ایـن رشـته در حـل مـسائل فیزیکـی سبب شده است که یک شاخه پویا در علم و صنعت باشد. در مسائل کـاربردی بـرای توصـیف اشـکال یـا رفتـار یـک سیستم فیزیکی از مدل های ریاضی استفاده می شود که با رعایت اصول فیزیکی، معادلاتی متناسب با مجموعه هـای سازگار با شرایط مناسب ایجاد می نمایند. حل این معادلات روشهای متعددی دارد.

در این پایان نامه ما به معرفی دو دسته از معادلات دیفرانسیل شامل، معـادلات دیفیـوژن کـسری ـ زمـان از مرتبـه‌ی ساده و معادلات دیفیوژن کسری از مرتبه توزیع داده شده مـی پـردازیم و روشـهایی بـرای حـل ایـن معـادلات ارائـه می‌نماییم.

فصل صفر

مفاهیم مقدماتی

۰-۱ مقدمه

۰-۲ قضیه لایب نیتز

۰-۲-۱ مشتق گیری زیر علامت انتگرال در انتگرال های ناسره

۰-۳ توابع تحلیلی

۰-۴ مانده ها و قطب ها

۰-۵ برخی قضایای مهم برای انتگرال توابع مختلط

۰-۱ مقدمه

در این فصل به بیان برخی مفاهیم مقدماتی که در فصول آینده مورد استفاده قرار می گیرند، می پردازیم. البته دانشجویان در مقطع کارشناسی ارشد با اغلب این مفاهیم کاملاً آشنا هستند و این فصل صرفاً جنبه یادآوری دارد.

۰-۲ قضیه لایب نیتز

قضیه ۰-۱: تابع دو متغیره و پیوسته $f(x,y)$ را که روی مستطیل محدود با خطوط $x=a, x=b, y=c, y=d$ تعریف شده، هم چنین انتگرال

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx,$$

را در نظر می گیریم. می توان ثابت کرد که، $\varphi(y)$ تابعی پیوسته از y است. به علاوه فرض می کنیم تابع $f(x,y)$ دارای مشتق نسبی مرتبه‌ی اول پیوسته نسبت به y باشد که آن را با $f_y(x,y)$ نمایش می دهیم. می توان ثابت کرد که

$$\varphi'(y)=\int_a^b f_y(x,y)dx. \qquad (۰-۱)$$

یا به عبارت دیگر

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)dx. \qquad (۰-۲)$$

یعنی می توان ترتیب دو عمل مشتق گیری و انتگرال گیری را تعویض نمود. (برای اثبات رجوع کنید به [۲].)

قضیه ۰-۲: فرض کنیم $f(x,y)$ تابع دو متغیر در قضیه قبل باشد و $h(y)$, $g(y)$ توابعی از y هستند که دارای مشتقات مرتبه‌ی اول پیوسته نسبت به y می باشند و فرض می کنیم:

$$\varphi(y)=\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx,$$

در این صورت می‌توان ثابت کرد که:

$$\varphi'(y)=\int_{g(y)}^{h(y)} f_y(x,y)dx+h'(y)f(h(y),y)-g'(y)f(g(y),y). \qquad (۰-۳)$$

(برای اثبات رجوع کنید به [۲].)

۰-۲-۱ مشتق گیری زیر علامت انتگرال در انتگرال های ناسره

نتایج حاصل در بخش قبل را نمی توان عیناً در انتگرال های ناسره به کار برد. برای استفاده از این نتایج در انتگرالهای ناسره شرایط به خصوصی لازم است که از بحث ما خارج است، لذا در مورد این نوع انتگرال ها فرض ما بر برقراری شرایط لازم خواهد بود.

مثال ۰-۱: ثابت کنید که

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}. \qquad (۰-۴)$$

برای حل انتگرال فوق، تعریف می کنیم:

$$f(a,b)=\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)\,dx. \qquad (۰-۵)$$

یک شرط اولیه با قرار دادن $b=0$ برای انتگرال فوق به صورت زیر خواهیم داشت:

$$f(a,0)=\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \qquad (۰-۶)$$

از طرفین رابطه (۰-۵) نسبت به متغیر b مشتق می گیریم. با استفاده از قضیه لایب نیتز و با فرض برقراری کلیه شرایط جهت استفاده از این قضیه، داریم:

$$f_b(a,b)=\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}(-x\sin(bx))\,dx=\int_{0}^{\infty} -xe^{-ax^2}\sin(bx)\,dx,$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء و قراردادن $\sin(bx)=u$ و $-xe^{-ax^2}dx=dv$ خواهیم داشت:

$$f_b(a,b)=\frac{e^{-ax^2}\sin(bx)}{2a}\Big|_0^{\infty}-\frac{b}{2a}\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)\,dx.$$

در نتیجه داریم:

$$f_b(a,b)=-\frac{b}{2a}f(a,b),$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}=-\frac{b}{2a}f(a,b),$$

$$\frac{df(a,b)}{f(a,b)}=-\frac{b}{2a}db.$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه فوق

$$Ln\, f(a,b)=-\frac{b^2}{4a}+C,$$

$$f(a,b)=C'e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

با استفاده از رابطه (۰-۶) و قراردادن $b=0$ در رابطه فوق داریم:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=C'.$$

در نتیجه داریم:

$$f(a,b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

با قرار دادن مقدار فوق، به جای $f(a,b)$ در رابطه (۰-۵) داریم:

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{-ax^{2}} \cos(bx)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^{2}}{4a}}.$$

۰-۳ توابع تحلیلی

تعریف ۰-۳-۱: تابع f از متغیر مختلط z در یک مجموعه باز تحلیلی است اگر در هر نقطه از آن مجموعه مشتق پذیر باشد. به خصوص تابع f در نقطه $z_{\circ}$ تحلیلی است اگر در یک همسایگی $z_{\circ}$ تحلیلی باشد[۳].

تعریف ۰-۳-۲: یک تابع تام، تابعی است که در تمام صفحه ی متناهی، تحلیلی باشد. چون مشتق یک چند جمله ای همه جا موجود است، نتیجه می شود که هر چند جمله ای یک تابع تام است[۳].

تعریف ۰-۳-۳: نقطه ی $z_{\circ}$ یک نقطه ی تکین تابع f نامیده می شود، اگر f در $z_{\circ}$ تحلیلی نباشد اما در نقطه ای از هر همسایگی $z_{\circ}$ تحلیلی باشد.نقطه ی تکین $z_{\circ}$ را تنها می نامند هرگاه علاوه بر این، همسایگی محذوفی از $z_{\circ}$ مانند $0<|z-z_{\circ}|<R$ موجود باشد که f در سراسر آن تحلیلی است. در این صورت تابع f را می توان در قرص سوراخ دار $0<|z-z_{\circ}|<R$ با سری

$$f(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty} a_{n}(z-z_{\circ})^{n}+\frac{b_{1}}{(z-z_{\circ})}+\frac{b_{2}}{(z-z_{\circ})^{n}}+\ldots\frac{b_{n}}{(z-z_{\circ})^{n}}+\ldots \qquad (۰-۷)$$

نشان داد. بسط فوق را بسط لوران تابع f گویند که در آن:

$$a_{n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)dz}{(z-z_{\circ})^{n+1}} \quad (n=\circ,1,2,\ldots) \qquad (۰-۸)$$

$$b_{n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)dz}{(z-z_{\circ})^{-n+1}} \quad (n=1,2,\ldots) \qquad (۰-۹)$$

می باشند و C معرف مسیر سادهٔ بسته ای در جهت مثبت حول $z_{\circ}$ و واقع در حوزه $0<|z-z_{\circ}|<R$ است. بخش

$$\frac{b_{1}}{(z-z_{\circ})}+\frac{b_{2}}{(z-z_{\circ})^{n}}+\ldots+\frac{b_{n}}{(z-z_{\circ})^{n}}+\ldots$$

از این سری را که شامل توانهای منفی $z-z_{\circ}$ است، قسمت اصلی f در $z_{\circ}$ می نامند. حال با استفاده از قسمت اصلی، نقطه ی تکین تنهای $z_{\circ}$ را به عنوان یکی از سه نوع خاص مشخص می سازیم.

اگر قسمت اصلی f در $z_{\circ}$ شامل حداقل یک جمله نا منفی بوده اما تعداد این گونه جملات متناهی باشد، عدد صحیح مثبتی مانند m هست به قسمتی که

$$b_{m}\neq \circ,\ b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=\circ,$$

یعنی بسط (۰-۷) به صورت زیر در می آید:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m},$$

که در آن $b_m \neq 0$. در این حالت نقطه ی تکین تنهای z_0 را قطب مرتبه ی m می نامند. هر قطب مرتبه ی $m=1$ را یک قطب ساده می گویند.

وقتی همه ی b_nها در بسط (۰-۷) صفر باشند، به طوری که

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

نقطه ی z_0 به نقطه ی تکین برداشتنی موسوم است.

وقتی تعداد نامتناهی از ضرایب b_n در سری (۰-۷) ناصفر باشند، z_0 را یک نقطه ی تکین اساسی f می نامند[۳].

۰-۴ مانده ها و قطب ها

اگر z_0 یک نقطه ی تکین تنهای تابع f باشد، همان طوری که در بخش قبل ذکر کردیم، تابع f در همسایگی $0<|z-z_0|<R$ از نقطه ی z_0 دارای بسط (۰-۷) می باشد که در آن b_n, a_n دارای نمایش انتگرالی اند. به خصوص

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^n}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

که در آن C مسیر ساده ی بسته ای حول نقطه ی z_0 در جهت مثبت و واقع در قرص سوراخ دار $0<|z-z_0|<R$ است.

وقتی $n=1$ این فرمول برای b_n را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\, b_1. \tag{۰-۱۰}$$

عدد مختلط b_1 را که ضریب $\frac{1}{(z-z_0)}$ در بسط (۰-۷) است مانده ی f در نقطه ی تکین تنهای z_0 می نامند. اغلب برای نمایش مانده ی b_1 از نماد $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ استفاده می کنند[۳].

قضیه ۰-۴-۱: z_0 نقطه ی تکین تنهای تابع f، یک قطب از مرتبه ی m است اگر و تنها اگر $f(z)$ را بتوان به صورت زیر نوشت.

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m} \tag{۰-۱۱}$$

که در آن، $\phi(z)$ در z_0 تحلیلی و ناصفر است. به علاوه اگر $m=1$، آن گاه $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\phi(z_0)$ و اگر $m\geq 0$، آن گاه $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ (برای اثبات رجوع کنید به [۳].)

قضیه ۰-۴-۲: فرض کنید تابع f در نقطه ی z_0 تحلیلی باشد. در این صورت همه ی مشتقات آن یعنی $f^{(n)}(z)$ $(n=1,2,\ldots)$ در z_0 موجودند. (برای اثبات رجوع کنید به [۳].)

اگر $f(z_\circ)=\circ$ و عدد صحیح مثبتی مانند m موجود باشد به طوری که $f^m(z_\circ)\neq\circ$ و همه ی مشتقات مرتبه های پایین تر در $z_\circ$ صفر شوند، آن گاه گویند f در $z_\circ$ دارای صفر مرتبه ی mاست.

قضیه ۰-۴-۲: تابع f که در نقطه $z_\circ$ تحلیلی است، در این نقطه، صفر مرتبه ی m دارد اگر و تنها اگر تابعی مانند g موجود باشد به طوری که در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر بوده و رابطه زیر برقرار باشد :

$$f(z)=(z-z_\circ)^m g(z).$$

(برای اثبات رجوع کنید به [۳].)

قضیه ۰-۴-۳: فرض کنید دو تابع q,p در نقطه ی $z_\circ$ تحلیلی باشند. و $p(z_\circ)\neq\circ$. اگر p در $z_\circ$، صفر مرتبه ی m داشته باشد، آن گاه خارج قسمت $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ در آن نقطه، قطب مرتبه ی m دارد.

(برای اثبات رجوع کنید به [۳].)

قضیه ۰-۴-۴: فرض کنید دو تابع q,p در نقطه ی $z_\circ$ تحلیلی باشند. اگر

$$q'(z_\circ)\neq\circ\,,\ q(z_\circ)=\circ\,,\ p(z_\circ)\neq\circ$$

، آن گاه $z_\circ$ یک قطب ساده ی کسر $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ است و

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\circ}\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(z_\circ)}{q'(z_\circ)}.$$

قضیه (۰-۴-۵): اگر تابع f در نقطه ی $z_\circ$ تحلیلی و $z_\circ$ قطب مرتبه ی m تابع باشد، آن گاه

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} f(z)=\lim_{z=z_\circ}(z-z_\circ)f(z);\quad m=۱,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} f(z)=\lim_{z=z_\circ}\frac{۱}{(m-۱)!}\frac{d^{m-۱}}{dz^{m-۱}}(z-z_\circ)^m f(z);\quad m>۱.$$

(برای اثبات رجوع کنید به [۱].)

۰-۵ برخی قضایای مهم برای انتگرال توابع مختلط

قضیه کوشی گورسا: اگر تابع f در همه ی نقاط درون و روی مسیر ساده ی بسته ی C تحلیلی باشد، آن گاه

$$\int_C f(z)dz=\circ\,.$$

قضیه مانده ها: فرض کنید C مسیر ساده ی بسته ای در جهت مثبت باشد. اگر تابع f در درون و روی C به جز تعداد متناهی نقطه ی تکین z_k $(k=۱,۲,\ldots,n)$ که در داخل C هستند، تحلیلی باشد، آن گاه

$$\int_C f(z)dz=۲\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\,.$$

(برای اثبات قضایای فوق رجوع کنید به [۳].)

نامساوی ژوردان:

برمبنای این نامساوی داریم:

$$\int_{\circ}^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta < \frac{\pi}{R}; \quad (R > \cdot)$$

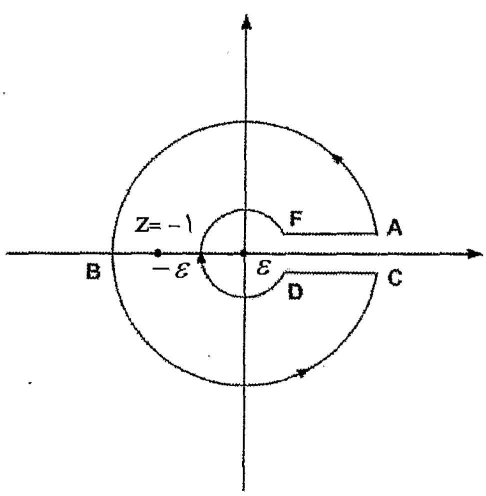
(برای اثبات نامساوی فوق رجوع کنید به [۳].)

مثال ۰-۱: انتگرال $\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$ ، $\cdot < p < 1$, را محاسبه کنید.

برای محاسبه انتگرال فوق تعریف می کنیم:

$$f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z}; \; z \in \mathbb{C}.$$

واضح است که تابع f در $z = \circ$ دارای صفر شاخه ای و در $z = -1 = e^{i\pi}$ دارای نقطـه ی تکـین تنهـا اسـت. مـسیر انتگـرال گیری را مطابق شکل زیر در نظر می گیریم.



شکل (۱-۱)

با انتگرال گیری روی مسیر فوق و با استفاده از قضیه ی مانده ها داریم:

$$\int_{FA} F(z)dz + \int_{ABC} F(z)dz + \int_{CD} F(z)dz + \int_{DEF} F(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} F(z).$$

واضح است که $z = -1 = e^{i\pi}$ قطب ساده تابع $F(z)$ است و بنابر قضیه ۰-۴-۱ داریم:

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = (e^{i\pi})^{p-1} = -e^{ip\pi}.$$

در نتیجه:

$$\int_{FA} F(z)dz + \int_{ABC} F(z)dz + \int_{CD} F(z)dz + \int_{DEF} F(z)dz = -2\pi i e^{ip\pi}. \quad (۰-۱۲)$$

واضح است که روی مسیر FA مقدار z برابر است با $z = xe^{i\circ}$ و بنابراین:

$$\int_{FA} F(z)dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{(xe^{i\circ})^{p-1}}{1+x}dx. \qquad (۱۳-۰)$$

روی مسیر ABC داریم $z = xe^{i\circ}$ و بنابراین:

$$\int_{ABC} F(z)dz + \int_{\circ}^{۲\pi} \frac{(\mathrm{Re}^{i\theta})^{p-1}(Rie^{i\theta})}{1+\mathrm{Re}^{i\theta}}d\theta. \qquad (۱۴-۰)$$

روی مسیر CD داریم $z = xe^{۲\pi i}$ و بنابراین:

$$\int_{CD} F(z)dz = \int_{R}^{\varepsilon} \frac{(xe^{۲\pi i})^{p-1}}{1+x}dx. \qquad (۱۵-۰)$$

و روی مسیر DEF داریم $z = \varepsilon e^{io}$ و در نتیجه:

$$\int_{DEF} F(z)dz = \int_{۲\pi}^{\circ} \frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{p-1}(\varepsilon ie^{i\theta})}{1+\varepsilon e^{i\theta}}d\theta. \qquad (۱۶-۰)$$

با قراردادن رابط (۰-۱۳)، (۰-۱۴)، (۰-۱۵) و (۰-۱۶) در رابطه (۰-۱۲) داریم:

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{(xe^{i\circ})^{p-۱}}{۱+x}dx + \int_{R}^{\varepsilon} \frac{(xe^{۲\pi i})^{p-۱}}{۱+x}dx + \int_{\circ}^{۲\pi} \frac{(\mathrm{Re}^{i\theta})^{p-۱}(Rie^{i\theta})}{۱+\mathrm{Re}^{i\theta}}d\theta + \int_{۲\pi}^{\circ} \frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{p-۱}(\varepsilon ie^{i\theta})}{۱+\varepsilon e^{i\theta}}d\theta = -۲\pi e^{i\pi p}. \qquad (۱۷-۰)$$

حال ثابت می کنیم که در رابطه فوق وقتی که $\varepsilon \to \circ$, $R \to \infty$ مقدار انتگرال روی مسیرهای ABC و DEF برابر با صفر است. روی مسیر ABC داریم:

$$\left| \int_{ABC} F(z)dz \right| = \left| \int_{\circ}^{۲\pi} \frac{(\mathrm{Re}^{i\theta})^{p-۱}(Rie^{i\theta})}{۱+\mathrm{Re}^{i\theta}}d\theta \right| \le \int_{\circ}^{۲\pi} \left| \frac{(\mathrm{Re}^{i\theta})^{p-۱}(Rie^{i\theta})}{۱+\mathrm{Re}^{i\theta}}d\theta \right|$$

$$= \int_{\circ}^{۲\pi} \frac{R^p d\theta}{|۱+\mathrm{Re}^{i\theta}|} \le \int_{\circ}^{۲\pi} \frac{R^p d\theta}{۱-R} = \frac{۲\pi R^p}{۱-R}.$$

واضح است که چون $\circ < p < ۱$، $\lim_{R\to+\infty} \frac{۲\pi R^p}{1-R} = \circ$ در نتیجه:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{ABC} f(z)dz = \circ$$

روی مسیر DEF واضح است که وقتی $\varepsilon \to \circ$ داریم:

$$\lim_{\varepsilon\to\circ} \int_{DEF} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to\circ} \int_{۲\pi}^{\circ} \frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{p-1}(\varepsilon ie^{i\theta})}{1+\varepsilon e^{i\theta}}d\theta = \circ$$

در نتیجه از رابطه (۰-۱۷) داریم:

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{(xe^{oi})^{p-1}}{1+x}dx + \int_{\circ}^{\infty} \frac{(xe^{۲\pi i})^{p-1}}{1+x}dx = -۲\pi ie^{ip\pi}.$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{p-۱}}{۱+x}(۱-e^{۲\pi(p-۱)i})dx+=-۲\pi i e^{ip\pi}.$$

و از رابطه فوق داریم:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{p-۱}}{۱+x}dx=\frac{۲\pi i e^{ip\pi}}{e^{۲\pi(p-۱)i}-۱}=\frac{۲\pi i e^{ip\pi}}{e^{۲\pi pi}-۱}=\pi\frac{۲ie^{ip\pi}}{e^{۲\pi pi}-۱}=\frac{\pi}{\sin\pi p}.$$