بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم لیلا ثقفی** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۱۰۸ تحت عنوان: «**درباره اعداد همنهشت**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر علی رجایی	استادیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر آرش رستگار	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	

آیین نامه چاپ پایان نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته**ریاضی محض (هندسه‌ی جبری)** است که در سال **۱۳۹۰** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **علی رجایی** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: :دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **لیلا ثقفی** دانشجوی رشته **ریاضی محض (هندسه‌ی جبری)** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: **لیلا ثقفی**

تاریخ و امضا: ۱۳۹۰/۱/۱۵

آیین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه : با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱: حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲: انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳: انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه (حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴: ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵: این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۱/۴/۸۷ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۲۳/۴/۸۷ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۱۵/۷/۸۷ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم الاجرا است.

«اینجانب **لیلا ثقفی** دانشجوی رشته **ریاضی محض (هندسه ی جبری)** ورودی سال تحصیلی **۱۳۸۸** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله براساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم.»

امضا:

تاریخ:۹۰/۱۱/۱۵

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

عنوان :

درباره ی اعداد همنهشت

دانشجو:

لیلا ثقفی

استاد راهنما:

دکتر علی رجایی

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر حکیم

و

مادر مهربانم

که رفتارشان به پاکی و شایستگی بلندای آسمان هاست آنچنانکه نه من و نه احساسات من هیچ یک قادر به وصف صفاتشان نیست و تمامی کسانی که به من در رسیدن به این نقطه یاری رسانیده اند، به خصوص

خواهران عزیزم

بنام آنکه جان را فکرت آموخت

زیبایی مهتاب گاه با پوشش ابری زائل می گردد و حال آن که نام او چون ستاره ای درخشان بر صفحه ی گیتی پرتو فکن و جاوید خواهد بود. خوشا به حال آسمان علم و دانش و ایمان که چنین نگینی در بر دارد.

سپاس ایزد یگانه را که به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی و ایمان در مشکلات را عنایت فرمود.

سپاس از پدر و مادر مهربانم که از نخستین گام‌های زندگی یگانه حامی من بوده‌اند.

با احترام از استاد راهنمای گرانقدرم **جناب آقای دکتر علی رجایی** ، که نه تنها در مراحل پایان‌نامه بلکه در تمامی مدت این دو سال از رهنمودهای ایشان بهره‌مند شده‌ام، سپاسگزارم و سلامتی و توفیق ایشان را از خداوند منان مسئلت نمایم.

چکیده

عدد طبیعی n را یک "عدد همنهشت" می نامند اگر مثلثی قائم الزاویه با اضلاع گویا و مساحت n وجود داشته باشد. مطالعه اعداد همنهشت در حالت های خاص مورد توجه یونانیان بود واولین باربه طور سیستماتیک توسط ریاضیدانان مسلمان در قرن ۱۰ مورد بحث قرار گرفت.

فرما نشان دادکه $n = ۱$عدد همنهشت نیست.تنها اثبات کامل ریاضی مکتوب فرما این حالت مساله فوق بود که با حالت $n = ۴$ مساله فرما مرتبط است و روش اثبات وی نزول نا متناهی نام دارد که از مهمترین تکنیکهای اثبات در نظریه اعداد است.مسئله تعیین اعداد همنهشت به سرعت از لحاظ محاسباتی پیچیده می‌شود.

مثلا از جهت پیچیدگی محاسباتی کوچکترین کسر از جهت تعداد ارقام که وتر یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع گویا ومساحت ۱۵۷ است ، صورتش

۲۲۴۴۰۳۵۱۷۷۰۴۳۳۶۹۶۹۹۲۴۵۵۷۵۱۳۰۹۰۶۷۴۸۶۳۱۶۰۹۴۸۴۷۲۰۴۱ و مخرجش ۸۹۱۲۳۳۲۲۶۸۹۲۸۸۵۹۵۸۸۰۲۵۵۳۵۱۷۸۹۶۷۱۶۵۷۰۰۱۶۴۸۰۸۳۰ می باشد.

پیشرفت بزرگ در قرن بیستم توسط تانل [1] انجام شدکه مساله تعیین اعداد همنهشت را به کمک نتایج شیمورا [2] و والدسپورژه [3] به حدسی مهم در نظریه خم های بیضوی مربوط کرد.

این حدس که به حدس برچ-سوینرتوندایر [4] مشهور است نظریه حسابی خم های بیضوی را به نظریه تحلیلی خم های بیضوی مرتبط می کند وهمچنان حل نشده باقی مانده است. این حدس یکی از هفت مساله مشهور انجمن علوم ریاضی کلی [5] است که یک میلیون دلار جایزه دارد. جالب توجه است که ۳,۱۴۸,۳۷۹,۶۹۴ عدد همنهشت جدید که توسط قضایای قبل قابل پیدا کردن نبودند در سال ۲۰۰۹ توسط گروهی از محققان در کشور های مختلف به کمک سوپر کامپیوترهایشان در یک پروژه مشترک محاسبه شدند.[۶] در این پایان نامه مفاهیم اصلی بکاررفته در اثبات تانل را شرح داده و چند مثال اساسی ارایه خواهیم کرد که ریاضیات قوی پشت الگوریتم وی رانشان می دهد. . مراجع اصلی این پایان نامه [۸] و [۱۴] می باشند.

کلمات کلیدی: خم های بیضوی، فرم های مدولار از وزن صحیح،فرم های مدولار از وزن نیمه صحیح

---

[1] Tunnell

[2] Shimura

[3] Waldspurger

[4] Birch-Swinnerton-Dyer

[5] Clay Mathematics Institute

فهرست

فصل ۱

اعداد همنهشت

۱.۱ تاریخچه

یک عدد مثبت صحیح را عددی همنهشت گوییم اگر مساحت مثلث قائم الزاویه با اضلاع گویا باشد. به عنوان مثال ۶و ۵ اعدادی همنهشت هستند. (شکل ۱:۱.۱)

مساله‌ی مربوط به این موضوع اولین بارتوسط ریاضیدان ایرانی به نام الکرجی[۱] (تولد۳۳۲ ه.ش- وفات ۴۰۸ ه.ش) مطرح شد (شکل ۵:۵.۱) که به صورت زیر بود:

برای کدام عددصحیح n عدد گویایی مانندa وجود دارد به طوری که $a^{۲} - n$ و $a^{۲} + n$ نیز مربع عدد گویاباشند؟ اگر چنین a ای وجود داشت در این صورت n عددی همنهشت است .

در سال ۱۲۲۵ فیبوناچی [۲] نشان داد که [۳] ۵ و۷ اعدادی همنهشت هستند و بدون اثبات بیان کرد که "یک" عددی همنهشت نیست و اثبات آن توسط فرما [۴] در سال ۱۶۵۹ صورت گرفت.

تا سال ۱۹۱۵ کمتر از ۱۰۰ عدد همنهشت مشخص شد و در سال ۱۹۵۲ هیگنر [۵] ثابت کرد که همه‌ی اعداد اول دنباله ی $۵, ۱۳, ۲۱, ۲۹, \ldots$ همنهشتند.

---

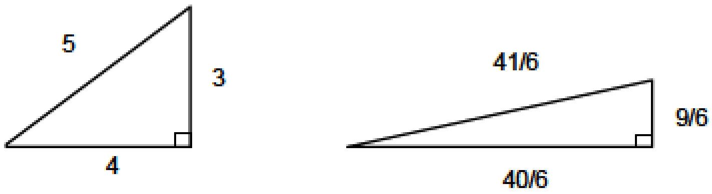
[۱] al-Karaji

[۲] Fibonavhi

[۳] of "Fibonachi numbers" fame

[۴] of "Fermat's last theorem" fame

[۵] Kurt Heegner



$$3^2+4^2=5^2,$$
$$(\frac{40}{6})^2+(\frac{9}{6})^2=(\frac{41}{6})^2.$$

شکل ۱.۱: ۱

تا سال ۱۹۸۰ کمتر از ۱۰۰۰ عدد گویا مشخص شده بود تا اینکه در سال ۱۹۸۲ تانل [۶] رابطه ای بین خم های بیضوی و اعداد همنهشت پیدا کرد.

او راه ساده ای را یافت که ایا عدد داده شده همنهشت هست یا نه و به این وسیله چند هزار عدد همنهشت به سرعت مشخص شد.

۲.۱ اعداد همنهشت

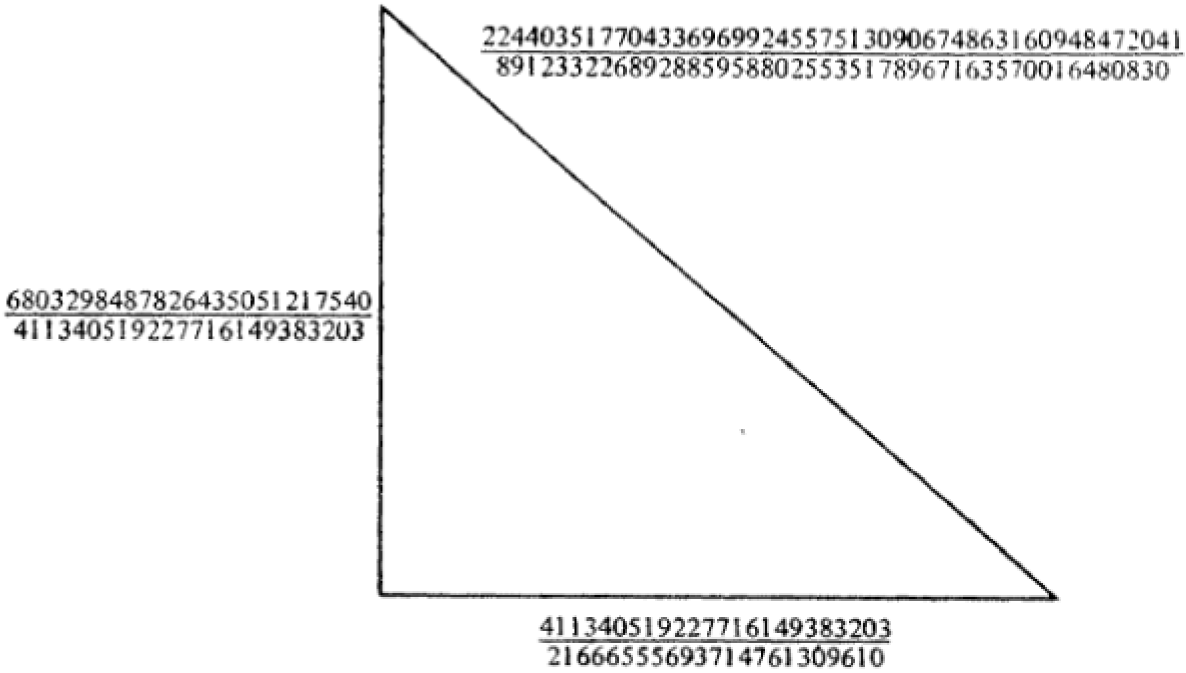
یک عدد مثبت صحیح را عددی همنهشت گوییم اگر مساحت مثلث قائم الزاویه با اضلاع گویا باشد. عدد همنهشت تعریف معادل دیگری نیز دارد که درصورت گزاره ی زیر می بینیم.

قرارداد: بدون کم شدن از کلیت مساله می توانیم فرض کنیم n خالی از مربع [۷] است زیرا اگر $n=s^2r$ باشد و r عددی همنهشت خالی از مربع مساحت مثلثی به اضلاع X,Y,Z باشد مثلثی قائم الزاویه به اضلاع sX,sY,sZ مساحتش $n=s^2r$ خواهد بود.

تبصره ۱.۲.۱. برای پیدا کردن جواب های گویای $a^2+b^2=c^2$ با فرض $\frac{1}{2}ab=n$ چنین عمل می کنیم: (برای یک n داده شده استفاده از این روش ایده ی خوبی نیست زیرا که نمی دانیم این n چه زمانی ظاهر می‌شود و ترتیبی هم در کار نیست مثلا ۱۵۷ عددی همنهشت است ولی سه تایی اقلیدسی که این مساحت

[۶] tunnell

[۷] squarefree



شکل ۱.۲: ۲

را دارد دارای صورت و مخرجی است که در (شکل ۲) مشخص شده است.)

برای هر عدد گویا دلخواه مانند $\frac{s}{r}$ با فرض اینکه r و s نسبت به هم اولند و یکی زوج و دیگری فرد است و با فرض $r > s$ ، دایره ای به شعاع واحد در نظر می گیریم و خطی به شیب $t = \frac{s}{r}$ به گونه ای رسم می‌کنیم که از نقطه ی $(-۱, ۰)$ بگذرد و محل تقاطع دیگر این خط با دایره را نقطه (u, v) می نامیم (شکل۳) دراین صورت داریم:

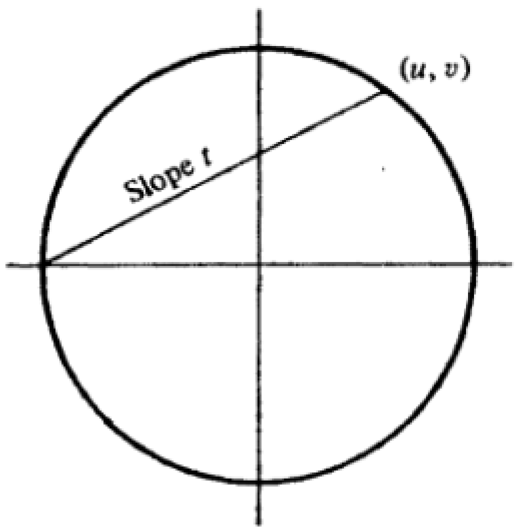
$$u^۲ + v^۲ = ۱$$

$$tan\theta = \frac{s}{r} = \frac{v}{u+۱} \Longrightarrow \frac{s^۲}{r^۲} = \frac{v^۲}{u^۲+۱+۲u}$$

$$\frac{s^۲+r^۲}{r^۲} = \frac{۲(u+۱)}{(۱+u)^۲} = \frac{۲}{u+۱}$$

بنابراین $u = \frac{r^۲-s^۲}{s^۲+r^۲}$ و $v = \frac{۲rs}{s^۲+r^۲}$ می باشد و با فرض $a' = r^۲ - s^۲$ ، $b' = ۲rs$ و $c' = s^۲ + r^۲$ جواب‌های صحیح و با گرفتن λ عددی گویای دلخواه جواب های گویا $a = \lambda a'$ و $b = \lambda b'$ را خواهیم داشت. با توجه به اینکه $ab = ۲n$ داریم:

$$\lambda^۲ rs(r^۲ - s^۲) = n$$



شکل ۱.۳: ۳

و با قرار دادن $y = \frac{n^۲}{\lambda r^۲}$ و $x = \frac{-ns}{r}$ رابطه ی زیر را خواهیم داشت:

$$y^۲ = x^۳ - n^۲ x \qquad (۱.۱)$$

وبه طور برعکس اگر جواب های گویای x و y ای مخالف صفر معادله ی (۱.۱) را داشته باشیم تحت شرایطی که در گزاره‌ی زیربیان شده می توانیم اضلاع مثلث قائم الزاویه ای به مساحت n را از روابط زیر به دست آوریم.

$b = |\frac{۲nx}{y}|$

$a = |\frac{n^۲ - x^۲}{y}|$

$c = |\frac{n^۲ + x^۲}{y}|$

.

گزاره ۲.۲.۱. n عددی همنهشت است اگرو فقط اگر عدد گویا مربعی مانند x وجود داشته باشدبه طوری که $x - n, x + n$ مربع اعداد گویا باشند.

برهان. فرض کنید n عددی همنهشت باشد در این صورت $X < Y < Z$ وجود دارند که

$X^۲ + Y^۲ = Z^۲$ و $\frac{۱}{۲}XY = n$ پس $X^۲ + Y^۲ \pm ۴.\frac{۱}{۲}XY = Z^۲ \pm ۴.\frac{۱}{۲}XY$

و نتیجه می دهد: $(X \pm Y)^۲ = Z^۲ \pm ۴n$ یعنی $(\frac{X \pm Y}{۲})^۲ = (\frac{Z}{۲})^۲ \pm n$

n	sides
5	3/2, 20/3, 41/6
6	3, 4, 5
7	24/5, 35/12, 337/60
13	780/323, 323/30, 106921/9690
14	8/3, 63/6, 65/6
15	15/2, 4, 17/2
21	7/2, 12, 25/2
22	33/35, 140/3, 4901/105
23	80155/20748, 41496/3485, 905141617/72306780

شکل ۴.۱: ($Table$ ۱- اعداد همنهشت خالی از مربع کوچکتر از ۲۵)

با فرض $x = (\frac{Z}{۲})^{۲}$ خواهیم داشت $x \pm n$ مربع عددی گویا هستند.

برعکس: اگر x و $x \pm n$ مربع عددی گویا باشند با قرار دادن

$$X = \sqrt{x+n} - \sqrt{x-n},\ Y = \sqrt{x+n} + \sqrt{x-n},\ Z = ۲\sqrt{x} \tag{۲.۱}$$

داریم:

$$X^{۲} + Y^{۲} = Z^{۲}, \frac{۱}{۲}XY = n$$

که این نشان می دهد n عددی همنهشت است. □

گزاره ۳.۲.۱. [۸] فرض کنید (x,y) نقطه ای با مختصات گویا روی خم $y^{۲} = x^{۳} - n^{۲}x$ باشد و x در دو شرط زیر صدق می کند:

۱) مربع یک عدد گویا است.

۲) مخرج آن زوج است.

در این صورت مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع گویا و مساحت n که از رابطه (۲.۱) به دست می آیدوجود دارد.

مثال ۴.۲.۱. برای $n = ۳۱$ نقطه $Q = (\frac{۴۱^{۲}}{۷^{۲}}, \frac{۲۹۵۲۰}{۷^{۳}})$ روی خم است ولی این نقطه مثلثی قائم الزاویه با اضلاع گویا و مساحت ۳۱ نمی دهد.(چون مخرج x زوج نیست)

ازسوی دیگر دو برابر این نقطه $۲Q = (\frac{۶۵۸۷۲۲۳۵۳۶۶۷۲۱}{۴۲۷۰۰۰۸۹۶۰۰}, \frac{-۱۶۵۶۱۶۷۴۴۳۶۴۰۰۷۳۶۴۸۱}{۸۸۲۳۵۴۶۵۱۴۹۴۴۰۰۰})$

روی خم بیضوی قرار دارد ومخرج زوج دارد پس مثلثی قائم الزاویه با اضلاع گویاومساحت ۳۱ به شرح زیر می‌دهد، لذا ۳۱ عددی همنهشت است. با استفاده از گزاره ی (۲.۲.۱) و نرم افزار پری [۸] اضلاع مثلث به صورت زیر است:

$X = \frac{720}{287}, Y = \frac{8897}{360}, Z = \frac{2566561}{103320}$

نکته ۵.۲.۱. اگر P نقطه ای گویا از مرتبه ی غیر دو (تعریف ۱۷.۲.۲) روی خم بیضوی $y^2 = x^3 - n^2x$ باشد در این صورت مولفه ی اول نقطه ی $2P$ مربع یک عدد گویا است که مخرج زوج دارد.
مثلا در مثال فوق مولفه ی اول $2Q$ مربع عدد گویای $\frac{2566561}{2566561}$ است.

نکته ۶.۲.۱. اگر معادله $y^2 = x^3 - n^2x$ که به آن معادله خم بیضوی گویند جواب گویایی با فرض $y \neq 0$ داشته باشد n عددی همنهشت است و چون

$$E_n : y^2 = x^3 - n^2x = x(x^2 - n^2) = x(x-n)(x+n)$$

برای اینکه معادله فوق جواب گویایی داشته باشد باید $x, x-n, x+n$ مربع باشند و اصطلاح همنهشتی(همنهشتی تعمیم یافته)به این مربوط میگردد که $x + n \equiv \ x - n \equiv \ x \pmod{n}$ می باشد.

در مورد یافتن اعداد همنهشت ،تانل محک ساده ای را ارائه داد که به کمک آن اعدادی که همنهشت نباشند را می شود تشخیص دادو همچنین اگر حدس برچ-سوینرتوندایر درست باشدعکس آن نیز برقرار است.

قضیه ۷.۲.۱. [۱۴] فرض کنید n عددی طبیعی و خالی از مربع باشد.اگر n عددی همنهشت باشد در این صورت

$$|\left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : x^2 + 2ay^2 + 8z^2 = \frac{n}{a}\right\}| =$$

$$2|\left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : x^2 + 2ay^2 + 32z^2 = \frac{n}{a}\right\}|$$

که برای n فرد $a = 1$ و برای n زوج $a = 2$ می باشد(در هر دو حالت $\frac{n}{2}$ فرد است.)

[۸] PARI

Al-Fakhri fi'l-jabr wa'l-muqabala, by al-Karaji.

شکل ۱.۵: ۵

واگر حدس برچ-سوینرتوندایر [۹] (حدس ۱.۵.۲) صحیح باشد آنگاه عکس قضیه فوق نیز برقرار است.

نکته ۸.۲.۱. می توان حالت فوق را به صورت ساده تر بیان کرد:

اگر n عددی همنهشت باشد در این صورت درمعادله $x^2 + 2ay^2 + 8z^2 = \frac{n}{a}$ تعداد جواب هایی که در آن z فرد است برابر تعداد جواب هایی است که در آن z زوج است.

مثال ۹.۲.۱. می خواهیم با استفاده از رابطه ی $x^2 + 2ay^2 + 8z^2 = \frac{n}{a}$ نشان دهیم ۱ عددی همنهشت نیست، $n = 1$ است بنابراین $a = 1$ خواهد بود و رابطه ی $x^2 + 2y^2 + 8z^2 = 1$ را داریم ، z فقط می‌تواند مقدار صفر را انتخاب کند، بنابراین برای حالتی که z فرد است تعداد جواب صفر است.

برای حالتی که $z = 0$ است ، با توجه به رابطه ی $x^2 + 2y^2 = 1$ ، $y = 0$ و $x = \pm 1$ است و دو جواب $(1, 0, 0)$ و $(-1, 0, 0)$ را داریم. چون تعداد جواب های z در حالتی که زوج و فرد است یکسان نیست بنابراین ۱ عددی همنهشت نیست.

[۹] Birch-Swinnerton-Dyer

قضیه‌تانل‌با استفاده‌از مفاهیم مهمی از جمله خم های بیضوی, فرم های مدولار از وزن صحیح و فرم های مدولار از وزن نیمه صحیح و L-نگاشت هسه -ویل [۱۰] اثبات می شود که به مطالعه ی آنها خواهیم پرداخت.

[۱۰] the Hasse-Weil L-function

فصل ۲

خم های بیضوی و تابع هسه

۱.۲ چند گوناهای جبری و تصویری

فرض کنید K میدان کامل باشد(یعنی هر توسیع جبری آن جداپذیر باشد)و $\overline{K}$ بستار جبری K باشد.

تعریف ۱.۱.۲. فضای آفین n بعدی روی K مجموعه‌ی $\mathbb{A}_K^n = \{P = (x_۱, ...x_n) : x_i \in K\}$ است که با $\mathbb{A}_K^n$ نمایش داده می شود ، چنانچه میدان K از قرینه‌ی کلام مشخص باشد $\mathbb{A}_K^n$ را به طور ساده تر با $\mathbb{A}^n$ نمایش می دهیم.

تبصره ۲.۱.۲. فرض کنید $A = K[x_۱, ..., x_n]$ حلقه ی چند جمله ای های n متغیره روی K باشد در این صورت برای $T \subset A$ منظور از $Z(T)$ مجموعه ی زیر است:

$$Z(T) = \{p \in \mathbb{A}^n | f(p) = ۰, \forall f \in T\}$$

تعریف ۳.۱.۲. زیر مجموعه ی Y از $\mathbb{A}_K^n$ را مجموعه ی جبری گویند اگر

$$\exists T \subseteq A \ : \ Y = Z(T)$$

گزاره ۴.۱.۲. اجتماع متناهی مجموعه ی جبری ، یک مجموعه ی جبری است و اشتراک هر تعداد مجموعه‌ی جبری باز ، یک مجموعه ی جبری است. تهی و $\mathbb{A}^n$ هم ، مجموعه های جبری هستند.

تعریف ۵.۱.۲. (بنا بر گزاره ی قبل) مجموعه های جبری در $\mathbb{A}^n$ تشکیل مجموعه های بسته ی یک توپولوژی را می دهند که به آن توپولوژی زاریسکی روی $\mathbb{A}^n$ گویند.

تعریف ۶.۱.۲. زیر مجموعه ی ناتهی Y از یک فضای توپولوژی X را تحویل ناپذیر گویند اگر Y به صورت اجتماع دو مجموعه ی سره بسته از زیر مجموعه هایش نوشته نشود.

تعریف ۷.۱.۲. یک زیر مجموعه ی تحویل ناپذیر بسته ی $\mathbb{A}^n$ تحت توپولوژی زاریسکی را چندگونای آفین گویند .

تعریف ۸.۱.۲. چند گوناهای تصویری

فضای آفین $\mathbb{A}^n$ یک توسیع فشرده ی طبیعی دارد که همان فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ است که با افزودن بینهایت دور در هر جهت به دست می آید.

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim} \tag{۱.۲}$$

که $\sim$ معرف رابطه هم ارزی نقاط واقع بر یک خط گذرنده از مبدا است، یعنی:

$$(x_0, ..., x_n) \sim (y_0, ...y_n)$$

اگر وتنها اگر برای $\lambda \in K^*$ داشته باشیم:

$$(y_0, ...y_n) = (\lambda x_0, ..., \lambda x_n)$$

و هر نقطه در فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ را به صورت رده ی هم ارزی زیرمی توان تعبیر کرد:

$$[(x_0, ..., x_n)] = \{(\lambda x_0, ..., \lambda x_n) | \lambda \in K^*\}$$

تبصره ۹.۱.۲. در نماد گذاری فوق باید حداقل یکی از مختصات $x_0, ..., x_n$ ناصفر باشد.

همانند هر رده ی هم ارزی یک نقطه $p \in \mathbb{P}^n$ معمولا با یکی از نماینده هایش نمایش داده می شود.

برای تمییز یک رده ی هم ارزی از نماینده ی آن رده از گذاردن علامت (:) بین مختصات نقطه نماینده استفاده می کنیم و آنها را مختصات همگن نقطه در فضای تصویری می نامیم.

$$[(x_0 : ... : x_n)] \in \mathbb{P}^n$$

این نمادگذاری موید این است که مختصات همگن با تقریب یک ضریب غیر صفر تعریف شده اند.