دانشگاه صنعتی شیراز

دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی گرایش کاربردی

جنبه‌های نظری و محاسباتی حل معادلات ماتریسی سیلوستر روی جبر ماکس ـ پلاس

نگارش:

مهتاب میرزائی خلیل آبادی

استاد راهنما:

دکتر بهنام هاشمی

استاد مشاور:

دکتر اسماعیل حسام الدینی

شهریورماه ۱۳۹۲

تقدیم به مهربانانی

که دستان مهربانشان

سایه‌بان خستگی‌هایم هستند،

پدر و مادر عزیزتر از جانم

و

برادر و خواهر و دوستان عزیزم.

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است. بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب" من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" : ازپدر و مادر عزیزم...این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از جناب آقای دکتر هاشمی که در کمال سعه صدر، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛ از استاد صبور، جناب آقای دکتر حسام‌الدینی که زحمت مشاوره این رساله را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم. در پایان بر خود لازم می‌دانم از تمامی استادان، دوستان و عزیزانی که در طول این دوره تا به ثمر رسیدن آن مرا یاری و همراهی نمودند سپاسگزاری نمایم.

چکیده

جنبه‌های نظری و محاسباتی حل معادلات ماتریسی سیلوستر روی جبر ماکس ـ پلاس

نگارش:
مهتاب میرزائی خلیل آبادی

در این پایان‌نامه، ابتدا جبر ماکس-پلاس و مسئله‌ی حل دستگاه‌های معادلات خطی روی آن را مرور می‌کنیم. سپس روش‌هایی کارا برای پیاده‌سازی عملیات پایه‌ای برداری و ماتریسی روی جبر ماکس-پلاس معرفی می‌شود. روش‌ها به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که با برنامه‌نویسی ستونی، میزان انتقال داده در سطوح مختلف حافظه‌ی کامپیوتر در MATLAB2011 کاهش یابد. سپس این روش‌ها در الگوریتمی برای پیدا کردن جواب اصلی معادله‌ی ماتریسی سیلوستر روی جبر ماکس-پلاس به‌کار گرفته می‌شوند. این الگوریتم پیچیدگی محاسباتی یافتن جواب اصلی را از مرتبه‌ی ۴ بر حسب اندازه‌ی ماتریس به مرتبه‌ی ۳ کاهش می‌دهد.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست جدول‌ها

عنوان صفحه

فهرست شکل‌ها

عنوان صفحه

فصل ۱

مقدمه و پیش نیازها

۱-۱ تاریخچه

جبر ماکس-پلاس از اوایل دهه‌ی ۱۹۶۰ در مقالات پژوهشی و کتاب‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است[۵]. از اولین مقالات منتشر شده شاید بتوان به مقاله [۹] که در سال ۱۹۶۰ ارائه شده است و همچنین مقالات متعدد دیگری مانند [۱۰، ۱۱] اشاره کرد. به طور مستقل، تعدادی از مقالات پیشگام در زمینه‌های مختلفی مانند جبر برنامه‌ریزی توسط گیفلر[۱] [۱۵]، جبر اکسترمم توسط وارویبوف[۲] [۱۸]و جبر خطی دیویدها توسط گوندران[۳] و مینو[۴][۱۷] منتشر شده است. پیشرفت بیشتر جبر ماکس-پلاس از سال ۱۹۸۵ در آثار آکیان[۵]، بورکارد[۶]، کوهن[۷]، گاورد[۸]، زیمرمن[۹] و بسیاری دیگر، قابل مشاهده است. توجه داشته باشید که خودتوانی جمع در جبر ماکس-پلاس باعث می‌شود که آن را بخشی از ریاضیات خودتوان به‌شمار آوریم.

[۱] Giffler

[۲] Vorobyov

[۳] Gondran

[۴] Minoux

[۵] Akian

[۶] Burkard

[۷] Cohen

[۸] Goverde

[۹] Zimmermann

۱-۲ نمادها، تعاریف و خواص پایه‌ای جبری

در جبر ماکس-پلاس ما با نیم‌حلقه‌ها کار می‌کنیم. در این بخش به‌خواص جبری در ماکس-پلاس نگاهی می‌اندازیم. برخی از نمادهایی که در این پایان نامه استفاده می‌شوند[۵، ص. ۱]، عبارتند از:

- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
- $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{+\infty\}$.
- برای $a, b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$، داریم:

$$a \oplus b = \max\{a, b\}$$

و

$$a \otimes b = a + b.$$

- برای $a, b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ عملگرهای دوگان را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \oplus^{'} b = \min\{a, b\}$$

و

$$a \otimes^{'} b = a + b\ ;\ \{a, b\} \neq \{-\infty, +\infty\}.$$

توجه کنید که به‌عنوان تعریف داریم :

$$(-\infty) \otimes (+\infty) = -\infty = (+\infty) \otimes (-\infty)$$

و هم‌چنین

$$(+\infty) \otimes^{'} (-\infty) = +\infty = (-\infty) \otimes^{'} (+\infty).$$

اگر $a \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$، آن‌گاه a^{-1} را $-a$ و هم‌چنین $e = 0$ و $\varepsilon = -\infty$ تعریف می‌کنیم .

لم ۱.۱: [۱۳، ص. ۹] برای هر $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ خواص زیر برقرار است :

۱. شرکت‌پذیری :

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c,$$

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c.$$

۲. جابه‌جایی:

$$a \oplus b = b \oplus a,$$

$$a \otimes b = b \otimes a.$$

۳. پخش‌پذیری:

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c).$$

۴. وجود عنصر همانی جمع:

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a.$$

۵. وجود عنصر همانی ضرب:

$$a \otimes e = e \otimes a = a.$$

۶. وجود معکوس ضربی: اگر $a \neq \varepsilon$، آن‌گاه عدد منحصر به‌فردی مانند b وجود دارد به‌طوری که $a \otimes b = \varepsilon$.

۷. وجود عنصر جاذب ضرب:

$$a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon.$$

۸. خودتوانی جمع:

$$a \oplus a = a.$$

تذکر: توجه کنید که اگر $\oplus$ با $'\oplus$ و $\otimes$ با $'\otimes$ جایگزین شود کلیه خواص ۱.۱ برقرار خواهند بود. تعاریف فوق با برخی از نمونه‌های عددی به‌صورت زیر نشان داده شده‌اند:

$$۵ \oplus ۳ = \max\{۵, ۳\} = ۵,$$

$$۵ \oplus \epsilon = \max\{۵, -\infty\} = ۵,$$

$$۵ \otimes \epsilon = ۵ - \infty = -\infty = \epsilon,$$

$$e \oplus ۳ = \max\{۰, ۳\} = ۳,$$

$$۵ \otimes ۳ = ۵ + ۳ = ۸.$$

همانند آن‌چه که در جبر معمولی داریم، برای ساده‌سازی، علامت $\otimes$ نسبت به $\oplus$ در اولویت قرار دارد. برای مثال عبارت

$$۵ \otimes -۹ \oplus ۷ \otimes ۱$$

به‌شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$(۵ \otimes -۹) \oplus (۷ \otimes ۱).$$

توجه کنید که $(۵ \otimes -۹) \oplus (۷ \otimes ۱) = ۸$، اما $۵ \otimes (-۹ \oplus ۷) \otimes ۱ = ۱۳$ خواهد شد[۳، ص. ۱۴].

تعریف ۲.۱: [۱۳، ص. ۱۰] می‌گوییم $a \leq b$ اگر $a \oplus b = b$ باشد.

تعریف ۳.۱: [۱۹، ص. ۱۵۰] مجموعه‌ی ناتهی R یک حلقه است اگر در R دو عمل $+$ و $.$ موجود باشند به‌طوری که روابط زیر برقرار باشند:

الف. $a,b \in R$ ایجاب کند که $a+b \in R$؛

ب. به‌ازای $a,b \in R$ داشته باشیم $a+b=b+a$؛

پ. به‌ازای $a,b,c \in R$ داشته باشیم $(a+b)+c=a+(b+c)$؛

ت. عنصری مانند $\circ \in R$ موجود باشد به‌طوری که به ازای هر $a \in R$ داشته باشیم $a+\circ=a$؛

ث. به‌ازای هر $a \in R$ عنصری مانند $b \in R$ موجود باشد به‌طوری که $a+b=\circ$؛

ج. $a,b \in R$ ایجاب کند که $a.b \in R$؛

چ. به‌ازای $a,b,c \in R$ داشته باشیم $a.(b.c)=(a.b).c$؛

ح. به‌ازای $a,b,c \in R$ داشته باشیم

$$a.(b+c)=a.b+a.c$$

و

$$(b+c).a=b.a+c.a.$$

تعریف ۴.۱: [۲] گوییم R نیم‌حلقه است اگر دو عمل‌گر دوتایی $+$ و $.$ موجود باشند به‌طوری که

۱. $(R,+)$ یک مونوئید جابجایی‌پذیر با عنصر همانی صفر است:

الف. به‌ازای $a,b,c \in R$ داشته باشیم $(a+b)+c=a+(b+c)$؛

ب. عنصری مانند $\circ \in R$ موجود باشد به‌طوری که به ازای هر $a \in R$ داشته باشیم $a+\circ=\circ+a=a$؛

پ. به‌ازای $a,b \in R$ داشته باشیم $a+b=b+a$؛

۲. $(R,.)$ یک مونوئید با عنصر همانی یک است:

الف. به‌ازای $a,b,c \in R$ داشته باشیم $a.(b.c) = (a.b).c$؛

ب. عنصری مانند $۱ \in R$ موجود باشد به‌طوری که به ازای هر $a \in R$ داشته باشیم $a.۱ = ۱.a = a$؛

۳. پخش‌پذیری ضرب از چپ و راست روی جمع:

الف. به‌ازای $a,b,c \in R$ داشته باشیم

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

و

$$(b+c).a = b.a + c.a.$$

۴. صفر عنصر جاذب ضرب است:

الف. به ازای هر $a \in R$ داشته باشیم $a.۰ = ۰.a = ۰$؛

دو خاصیت مهم جبر ماکس-پلاس این است که اولاً معکوس جمع ندارد و ثانیاً خودتوان است. این بیان می‌کند که چرا ماکس-پلاس یک نیم‌حلقه است و نه یک حلقه.

۱-۳ بردارها و ماتریس‌ها در جبر ماکس-پلاس

مجموعه ماتریس‌های $m \times n$ برای $m,n \in \mathbb{N}$ روی $\overline{\mathbb{R}}$ را با $\overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$ نشان می‌دهیم که m نشان دهنده تعداد سطرها و n تعداد ستون‌ها است . جمع و ضرب بردارها و ماتریس‌ها در ماکس-پلاس به روش معمول تعریف می‌شوند، $+$ با $\oplus$ و $\times$ با $\otimes$ جایگزین می‌شود.

تعریف ۵.۱: ۱. برای $A,B \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ جمع $A \oplus B$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم[۱۳،

ص. ۱۲]:

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\},$$

به‌طور مشابه

$$[A \oplus^{'} B]_{ij} = a_{ij} \oplus^{'} b_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\}.$$

به‌عنوان مثال فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} e & \epsilon \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -۱ & ۱۱ \\ ۱ & \epsilon \end{bmatrix}, \qquad (۱-۱)$$

آن‌گاه

$$[A \oplus B]_{۱۱} = e \oplus -۱ = \max\{۰, -۱\} = ۰ = e$$

$$[A \oplus B]_{۱۲} = \epsilon \oplus ۱۱ = \max\{-\infty, ۱۱\} = ۱۱$$

$$[A \oplus B]_{۲۱} = ۳ \oplus ۱ = \max\{۳, ۱\} = ۳$$

$$[A \oplus B]_{۲۲} = ۲ \oplus \epsilon = \max\{۲, -\infty\} = ۲.$$

در فرم ماتریسی خواهیم داشت:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} e & ۱۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}.$$

۲. برای $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times k}$ و $B \in \overline{\mathbb{R}}^{k\times n}$ ضرب $A \otimes B$ عبارت است از[۱۳، ص. ۱۲]:

$$[A \otimes B]_{il} = \bigoplus_{j=۱}^{k} (a_{ij} \otimes b_{jl}) = \max_{j\in\{۱,\ldots,k\}} \{a_{ij} + b_{jl}\},$$

به‌طور مشابه

$$[A \otimes' B]_{ij} = \bigoplus_{j=۱}^{k}{}' (a_{ij} \otimes' b_{jl}) = \min_{j \in \{۱,\ldots,k\}} \{a_{ij} + b_{jl}\}.$$

به‌عنوان مثال فرض کنید A و B همانند (۱−۱) باشند. در این‌صورت عناصر $A \otimes B$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$[A \otimes B]_{۱۱} = e \otimes (-۱) \oplus \epsilon \otimes ۱ = \max\{۰ - ۱, -\infty + ۱\} = -۱,$$

$$[A \otimes B]_{۱۲} = e \otimes ۱۱ \oplus \epsilon \otimes \epsilon = \max\{۰ + ۱۱, -\infty - \infty\} = ۱۱,$$

$$[A \otimes B]_{۲۱} = ۳ \otimes (-۱) \oplus ۲ \otimes ۱ = \max\{۳ - ۱, ۲ + ۱\} = ۳$$

و

$$[A \otimes B]_{۲۲} = ۳ \otimes ۱۱ \oplus ۲ \otimes \epsilon = \max\{۳ + ۱۱, ۲ - \infty\} = ۱۴.$$

که فرم ماتریسی آن به شکل

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} -۱ & ۱۱ \\ ۳ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

است.

۳. ترانهاده‌ی ماتریس A را با A^T نشان می‌دهیم و داریم [۱۳، ص. ۱۲]:

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}.$$

۴. مزدوج ماتریس $A = (a_{ij}) \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m \times n}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم[۵، ص. ۲۹]:

$$A^* = -A^T \in \overline{\overline{R}}^{n\times m}.$$

۵. ماتریس همانی $I_{m\times m}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳، ص. ۱۲]:

$$[I_m]_{ij} = \begin{cases} e, & i = j, \\ \varepsilon, & i \neq j. \end{cases}$$

۶. برای هر ماتریس $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$ و هر اسکالر $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$، $\alpha \otimes A$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود[۱۳، ص. ۱۲]:

$$[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes [A]_{ij}.$$

به‌عنوان مثال فرض کنید A همانند (۱−۱) و $\alpha = ۲$ باشد. در این‌صورت

$$[۲ \otimes A]_{۱۱} = ۲ \otimes e = ۲ + ۰ = ۲,$$

هم‌چنین

$$[۲ \otimes A]_{۱۲} = ۲ \otimes e = ۲ + ۰ = ۲,$$

$$[۲ \otimes A]_{۲۱} = ۵$$

و

$$[۲ \otimes A]_{۲۲} = ۴$$

خواهد بود که فرم ماتریسی آن به‌شکل زیر است:

$$۲ \otimes A = \begin{bmatrix} ۲ & \epsilon \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}.$$

لم ۶.۱: [۵، ص. ۳] برای ماتریس‌های A, B, C و I که دارای ابعاد سازگار در $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ و $a \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ باشند داریم:

$$A \oplus B = B \oplus A,$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C),$$

$$A \oplus \varepsilon = A = \varepsilon \oplus A,$$

$$A \oplus B \geq A,$$

$$A \oplus B = A \quad \Leftrightarrow \quad A \geq B,$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C),$$

$$A \otimes I = A = I \otimes A,$$

$$A \otimes \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon \otimes A,$$

$$(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C),$$

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C),$$

$$a \otimes (B \oplus C) = (a \otimes B) \oplus (a \otimes C)$$

و

$$a \otimes (B \otimes C) = B \otimes (a \otimes C).$$

مشاهده می‌شود که $\otimes$ روی $\oplus$ پخش‌پذیر است و هم‌چنین $\oplus$ در $\overline{\mathbb{R}}^{m\times m}$ خودتوان است. چون $A \oplus A = A$، $\overline{\mathbb{R}}^{m\times m}$ نیز یک نیم‌حلقه خودتوان است. برای ماتریس‌ها، ماتریس خنثی یک ماتریس با همه‌ی درایه‌های ε برای $\oplus$ و I برای $\otimes$ است.

تذکر: توجه کنید که اگر $\oplus$ با $\oplus'$ و $\otimes$ با $\otimes'$ جایگزین شود کلیه خواص ۶.۱ برقرار خواهند بود.

یکی از خواص مقدماتی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد، خاصیت یکنوایی $\oplus$ و $\otimes$ است که در لم زیر آن را بیان می‌کنیم:

لم ۷.۱: [۵، ص. ۴] اگر A, B, C ماتریس‌های با ابعاد سازگار در $\overline{\mathbb{R}}$ و $c \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ باشند، آن‌گاه روابط زیر را داریم

$$A \geq B \quad \Rightarrow \quad A \oplus C \geq B \oplus C,$$

$$A \geq B \quad \Rightarrow \quad A \otimes C \geq B \otimes C,$$

$$A \geq B \quad \Rightarrow \quad C \otimes A \geq C \otimes B$$

و

$$A \geq B \quad \Rightarrow \quad c \otimes A \geq c \otimes B.$$

نتیجه ۸.۱: [۵، ص. ۴] اگر $A, B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ و $x, y \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n}$ ، آن‌گاه

$$A \geq B \quad \Rightarrow \quad A \otimes x \geq B \otimes x$$

و

$$x \geq y \quad \Rightarrow \quad A \otimes x \geq A \otimes y.$$

قضیه ۹.۱: [۵، ص. ۲۹] اگر $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$، $b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m}$ و $x \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{n}$، آن‌گاه

$$A \otimes x \leq b \quad \Leftrightarrow \quad x \leq A^* \otimes' b.$$

نتیجه ۱۰.۱: [۵، ص. ۲۹] اگر $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ و $v \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m}$، آن‌گاه

$$A \otimes (A^* \otimes' v) \leq v.$$

نتیجه ۱۱.۱: [۵، ص. ۲۹] اگر $A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$ و $B \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times k}$، آن‌گاه

$$A \otimes (A^* \otimes' B) \leq B.$$

تعریف ۱۲.۱: [۵، ص. ۵] یک ماتریس $m\times m$ را قطری می‌گوییم و آن را با $diag(d_۱, \ldots, d_m)$ یا تنها $diag(d)$ نشان می‌دهیم، اگر درایه‌های قطری آن $d_۱, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$ و همه‌ی درایه‌های غیر قطری آن ε باشد. بنابراین $I = diag(۰, \ldots, ۰)$ و به هر ماتریسی که از جایگشت سطرها و یا ستون‌های یک ماتریس قطری حاصل شود یک ماتریس جایگشت تعمیم یافته گفته می‌شود.

قضیه ۱۳.۱: [۵، ص. ۵] فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times m}$ باشد. آن‌گاه ماتریس $B = (b_{ij})$ وجود دارد به‌طوری که

$$A \otimes B = I = B \otimes A,$$

اگر و تنها اگر A یک ماتریس جایگشت تعمیم یافته باشد .

واضح است که اگر معکوس ماتریس A وجود داشته باشد، یکتاست و آن را با $A^{-۱}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۱: [۵، ص. ۶] اگر $X = diag(x_۱, \ldots, x_m)$ که در آن $x_۱, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ یک ماتریس قطری باشد، آن‌گاه معکوس آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X^{-۱} = diag(x_۱^{-۱}, \ldots, x_m^{-۱}).$$

تعریف ۱۵.۱: [۵، ص. ۶] ماتریس $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$ را $\mathbb{R}-astic$ ستونی (یا سطری)گوییم اگر برای هر $j \in N$، $\bigoplus_{i\in M} a_{ij} \in \mathbb{R}$ (برای هر $i \in M$، $\bigoplus_{j\in N} a_{ij} \in \mathbb{R}$) که A هیچ ستون (یا سطر) ε ندارد. ماتریس A را $\mathbb{R} - astic$ دوتایی می‌گوییم اگر هم $\mathbb{R} - astic$ سطری و هم $\mathbb{R} - astic$ ستونی باشد.