بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه جهت اخذ کارشناسی ارشد رشته
ریاضی محض، گرایش جبر و توپولوژی

قضیه بناشفسکی برای S – سیستم‌های مرتب انژکتیوی منظم و کامل‌سازی

استاد راهنما:

آقای دکتر غلامرضا مقدسی

استاد مشاور:

آقای دکتر علی اکبر استاجی

نگارنده

محمد علی عالم زاده

آذرماه ۱۳۹۰

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه تربیت معلم سبزوار

قضیه بناشفسکی برای S – سیستم‌های مرتب انژکتیوی منظم و کامل‌سازی

نام نویسنده: محمد علی عالم زاده

استاد راهنما: آقای دکتر غلامرضا مقدسی

استاد مشاور: آقای دکتر علی اکبر استاجی

دانشکده: دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر گروه: ریاضی محض رشته تحصیلی: ریاضی محض

تاریخ دفاع: ۱۳۹۰/۹/۱۶

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد تعداد صفحات: ۹۴

چکیده پایان‌نامه : می‌دانیم در رسته S –سیستم‌ها، شی انژکتیو موجود است، نشان می دهیم مجموعه‌های مرتب جزئی و S –سیستم‌های مرتب، شی انژکتیو غیر بدیهی ندارند و همچنین مجموعه‌های مرتب جزئی انژکتیو منظم دقیقا مجموعه‌های مرتب جزئی کامل هستند. سپس نشان می‌دهیم که هر S –سیستم مرتب انژکتیو منظم کامل است و عکس آن نیز در حالتی که S –گروه جزئی مرتب باشد برقرار می‌شود.
در این پایان نامه ابتدا مفاهیم مورد نیاز از مجموعه‌های مرتب جزئی را بیان می‌کنیم و سپس به مفاهیم کلی رسته‌ها و S –سیستم‌ها می‌پردازیم. پس از آن رسته S –سیستم‌های مرتب و کامل را معرفی می‌کنیم و رابطه همنهشتی و تکریختی و بروریختی در رسته S –سیستم‌های مرتب را بیان می‌نماییم. در ادامه M–انژکتیوهای منظم و کامل را در مجموعه‌های منظم و کامل سازی روی S –سیستم‌های مرتب را بیان کرده و ارتباط بین انژکتیوهای منظم و کامل را در مجموعه‌های مرتب جزئی و S–سیستم‌های مرتب را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.
ایده اصلی این تحقیق از مقاله زیر که در سال ۲۰۱۰ تحت عنوان
Banaschewskis theorem for S-Poset: regular injectivity and completeness
توسط ابراهیمی، محمودی و رسولی به چاپ رسیده، گرفته شده است و با استفاده از سایر منابع، سعی شده اکثر مفاهیم به طور پایه‌ای و دقیق مورد بررسی قرار گیرند.

واژگان کلیدی: S –سیستم مرتب، M–انژکتیو منظم، کامل سازی.

امضای استاد راهنما: تاریخ:

تقدیم به

پدر عزیزم

که از پای ننشسته، تا من پای بگیرم.

مادر عزیزم

که هر تپش قلبم او را فریاد می‌زند.

همسر عزیزم

که حامی من است.

دختر عزیزم

که مایه امید من است.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس و قدردانی

سپاس مهربان خداوندی را که آفریدگاری و آموزگاری، هر دو در آستین منت اوست و تمامی هستی یک جرعه از دریای همت اوست. قادری که به این بنده ناتوان، غفران اندیشیدن آموخت.

حال که با فضل و مساعدت یاران، موفق به تنظیم و تدوین این پایان‌نامه شده‌ام بر خود واحب می‌دانم از تمامی بزرگوارانی که در به فرجام رسانیدن این مهم از سرچشمه معرفتشان، بهر برده‌ام، کمال تشکر و قدر دانی را بنمایم و امیدوارم مراتب امتنان و احترام مرا پذیرا باشند.

در آغاز، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و از همسر مهربانم، که مشوق من در این امر بوده تشکر می‌کنم. از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر غلامرضا مقدسی صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم که قطعا بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر علی‌اکبر استاجی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده‌سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

به اساتید گرامی جناب آقای دکتر ابراهیمی و سرکار خانم محمودی که زحمت داوری رساله را برعهده گرفتند و مرا مرهون لطف خویش قرار دادند، ادای احترام می‌نمایم.

محمد علی عالم زاده
آذرماه ۱۳۹۰

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

اساس کار این پایان نامه قضیه بناشفسکی برای M−انژکتیوهای منظم و کامل‌سازی روی S −سیستم‌های مرتب است. تحقیق در زمینه انژکتیوی S −سیستم‌ها برای اولین بار در سال ۱۹۶۷ در مقاله‌ای تحت عنوان پوشش انژکتیوی روی S −سیستم‌ها توسط بختیوم[1] در [۵] صورت پذیرفت. در همان سال مطالعات در مورد انژکتیوهای منظم و کامل‌سازی در S −سیستم‌های مرتب توسط بناشفسکی در [۳] صورت پذیرفت و در سال ۱۹۷۰ بناشفسکی انژکتیو و توسیع‌های اساسی در کلاس‌های معادلاتی جبرها ارائه داد و هم چنین او در مقاله‌ای ثابت کرد که مجموعه‌های مرتب جزئی کامل دقیقاً مجموعه‌های جزئی مرتب انژکتیو نسبت به تکریختی‌ها (نشاننده ترتیب) هستند.

وی ابتدا به معرفی تکواره‌های جزئی مرتب که از چپ ساده شدنی هستند پرداخت و در ادامه M−انژکتیوهای منظم در S −سیستم‌های مرتب برای یک گروه جزئی مرتب را مورد بررسی قرار داد.

در واقع هدف اصلی در مقاله ذکر شده نقطه همتای قضیه باناشفسکی برای S −سیستم‌های مرتب است. در این کار پس از بیان مفاهیم و تعاریف اولیه که فصل اول را به آن اختصاص داده‌ایم، فصل دوم را با رسته S −سیستم‌های مرتب جزئی و کامل آغاز می‌کنیم، در این فصل که اساس کار مرجع [۱۰] می‌باشد در ابتدا رسته S −سیستم‌های مرتب جزئی را تعریف نموده، در ادامه رابطه همنهشتی روی یک S −سیستم مرتب جزئی، که به اختصار $\mathrm{S}-\mathrm{Po\,set}$ نمایش می‌دهیم، را تعریف می‌کنیم.

فصل سوم که مهمترین قسمت این پایان‌نامه می‌باشد، مشتمل بر چهار بخش است. در این فصل اساس کار، مرجع [۱۳] است. در بخش اول M−انژکتیوها را تعریف می‌کنیم و به بیان روابط الحاقی در رسته $\mathrm{S}-\mathrm{Pos}$ با رسته Pos می‌پردازیم که براساس مرجع [۱۰] می‌باشد. سپس نشان می‌دهیم که رسته Pos و رسته $\mathrm{S}-\mathrm{Pos}$ شیء انژکتیو غیر بدیهی ندارند.

در بخش دوم، نشان می‌دهیم مجموعه‌های مرتب جزئی انژکتیو منظم دقیقاً مجموعه‌های مرتب

[1] Berthiaume

جزئی کامل می‌باشند. هم چنین شرایط لازم و کافی برای $\mathrm{S}-$سیستم‌های مرتبی که انژکتیو منظم هستند را بیان می‌کنیم.

در بخش سوم، نشان می‌دهیم اگر ترتیبی روی S برای تساوی روی $\mathrm{S}-$سیستم‌های مرتب انتخاب کنیم نتیجه می‌گیریم $\mathrm{S}-$سیستم‌های مرتب انژکتیو منظم کامل هستند که براساس مرجع [۲۰] است. هم چنین نشان می‌دهیم که بر خلاف مجموعه‌های مرتب جزئی هر $\mathrm{S}-$سیستم کامل، انژکتیو منظم نیست و نمونه‌هایی بدست می‌آوریم که کامل‌ها انژکتیو منظم هستند.

در بخش چهارم به مطالعه $M-$انژکتیوهای منظم روی $\mathrm{S}-$سیستم‌های مرتب برای گروه جزئی مرتب S می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که اگر S یک گروه جزئی مرتب باشد، در این صورت یک $\mathrm{S}-$سیستم کامل است اگر و فقط اگر انژکتیو منظم باشد. هم چنین نشان می‌دهیم که اگر S گروه جزئی مرتب باشد مجموعه‌های مرتب کامل، $\mathrm{S}-$سیستم منظم با عمل بدیهی هستند و مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد عکس آن در حالت کلی برقرار نیست.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل تقریباً تمام مطالب پیش‌نیاز پایان‌نامه آورده شده است. برای مطالب این فصل از مراجع [۱] و [۱۱] و [۱۷] استفاده شده است.

۱.۱ مجموعه‌های مرتب جزئی

با توجه به اهمیت مطلب و کار صورت گرفته روی مجموعه‌های مرتب جزئی در فصل‌های آینده اولین بخش این فصل را به این موضوع اختصاص داده‌ایم.

تعریف ۱.۱.۱. یک ترتیب جزئی روی مجموعه A، یک رابطه دوتایی "$\leq$" روی A است، یعنی؛ زیر مجموعه‌ای از $A \times A$ است که خواص زیر را دارد:

۱. خاصیت انعکاسی: برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \leq a$.

۲. خاصیت پادتقارنی: برای هر $a, b \in A$ اگر $a \leq b$ و $b \leq a$، آنگاه $a = b$.

۳. خاصیت تعدی: برای هر $a, b, c \in A$، اگر $a \leq b$ و $b \leq c$، آنگاه $a \leq c$.

زوج $(A, \leq)$ را یک مجموعه مرتب جزئی[۱] می‌گوییم و چنانچه ابهامی پیش نیاید به اختصار می‌گوییم A یک مجموعه مرتب جزئی است. اگر علاوه بر شرط فوق برای هر b, a در A داشته باشیم $a \leq b$ یا $b \leq a$ رابطه دوتایی $\leq$ یک ترتیب کلی نامیده می‌شود. مجموعه ناتهی A با یک ترتیب کلی زنجیر[۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. یک رابطه دوتایی $\sim$ تعریف شده روی مجموعه A، رابطه هم ارزی نامیده می‌شود هرگاه دارای خواص بازتابی، تقارنی (برای هر $a, b \in A$ اگر $(a \sim b)$ آنگاه $(b \sim a)$) و تعدی باشد.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنیم $\varphi : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت باشد رابطه

$$\ker \varphi = \{(x, x') \in X \times X \mid \phi(x) = \varphi(x')\}$$

یک رابطه هم ارزی روی X است که هم ارزی هسته‌ای نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{B}(X)$ نشان دهنده مجموعه تمام روابط دوتایی روی مجموعه X، باشد. در این صورت ترکیب روابط $\rho, \sigma \in \mathcal{B}(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho\sigma = \{(x, z) \in X \times X \mid \exists y \in X \ y\rho z, x\sigma y\}$$

---

[1]Poset

[2]chain

همچنین اگر $\rho \in X \times X$ معکوس این رابطه، عبارت است از:

$$\rho^{-۱} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in \rho\}$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم P و Q دو مجموعه مرتب جزئی باشند، نگاشت $h : P \longrightarrow Q$ را

۱. حافظ ترتیب یا یکنوا [۱] (همنوا) می‌گوییم هرگاه $p \leq q$ در P نتیجه دهد $h(p) \leq h(q)$ در Q.

۲. نشاننده ترتیب می‌گوییم[۲] گوییم چنانچه داشته باشیم $p \leq q$ در P اگر و تنها اگر $h(p) \leq h(q)$ در Q.

تذکر ۶.۱.۱. *در رسته* $\mathrm{S}-$ *سیستم‌های مرتب جزئی هر نشاننده ترتیب، یک به یک است.*

برهان. فرض کنیم $h : P \longrightarrow Q$ یک نشاننده ترتیب باشد و $h(x) = h(y)$. در این صورت $h(x) \leq h(y)$ و $h(y) \leq h(x)$. چون h نشاننده ترتیب است. نامساوی اول نتیجه می‌دهد $x \leq y$ و نامساوی دوم نتیجه می‌دهد $y \leq x$ و بنابر خاصیت پادتقارنی $\leq$ داریم $x = y$.

توجه می‌کنیم که عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست. □

مثال ۷.۱.۱. نگاشت h را نگاشت همانی از مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\} = ۱ \sqcup ۱$ (یعنی اعضا با هم قابل مقایسه نیستند) به روی زنجیر دو عضوی $\{۰, ۱\} = \mathbf{۲}$ که $۰ \leq ۱$ در نظر می‌گیریم. h یک به یک است، ولی نشاننده ترتیب نیست. زیرا $h(۰) = ۰ \leq h(۱) = ۱$ در حالی که $\{۰, ۱\} = ۱ \sqcup ۱$ هیچ ترتیبی بین ۰ و ۱ وجود ندارد.

[1] monotonic map

[2] order embedding

تعریف ۸.۱.۱. دو مجموعه مرتب جزئی P و Q یکریخت می‌گوییم هرگاه نگاشت دوسویی و یکنوای $h : P \longrightarrow Q$ وجود داشته به طوری که باشد که $h^{-۱} : Q \longrightarrow P$ نیز یکنوا باشد.

قضیه ۹.۱.۱. *دو مجموعه مرتب جزئی P و Q یکریخت هستند اگر وتنها اگر نشاننده ترتیبی پوشای $h : P \longrightarrow Q$ وجود داشته باشد.*

برهان. چون h پوشاست و بنا بر تذکر ۶.۱.۱، یک به یک نیز هست پس نگاشت دو سویی یکنواست. $h^{-۱} : Q \longrightarrow P$ نیز یکنواست زیرا $q_۱ \leq q_۲$ در Q را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت.

$$h[h^{-۱}(q_۱)] \leq h[h^{-۱}(q_۲)]$$

اکنون بنا بر فرض داریم: $h^{-۱}(q_۱) \leq h^{-۱}(q_۲)$.

□

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموعه L به همراه دو عمل دوتایی $\vee$ و $\wedge$ روی L مشبکه[1] نامیده می‌شود. هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. (a) $x \vee y = y \vee x$

(b) $x \wedge y = y \wedge x$ (قانون‌های جابجایی)

۲. (a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (قانون‌های شرکت‌پذیر)

۳. (a) $x \vee x = x$

[1] Lattice

(b) $x \wedge x = x$ (قانون‌های خودتوانی)

۴. (a) $x = x \vee (x \wedge y)$

(b) $x = x \wedge (x \vee y)$ (قانون‌های جذب)

مثال ۱۱.۱.۱. مجموعه اعداد طبیعی به همراه دو عمل دوتایی $\vee$ (کوچکترین مضرب مشترک) و $\wedge$ (بزرگترین مقسوم علیه مشترک) یک مشبکه می‌باشد.

حال تعریف هندسی مشبکه را می‌آوریم.

تعریف ۱۲.۱.۱. مجموعه مرتب جزئی L را که برای هر دو عضو دلخواه a و b از L، $\sup\{a,b\} = a \vee b$ و $\inf\{a,b\} = a \wedge b$ در L وجود داشته باشد را یک مشبکه می‌نامیم و با $(L, \leq, \vee, \wedge)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۱.۱. *دو تعریف جبری و هندسی مشبکه معادلند.*

برهان. به مرجع [۱۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱۴.۱.۱. زیرمجموعه غیرتهی S از مشبکه L را یک زیرمشبکه از L نامیم اگر تحت اینفیمم و سوپریمم متناهی بسته باشد. به عبارت دیگر برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم

$$x \wedge y \in S, \quad x \vee y \in S$$

تعریف ۱۵.۱.۱. مشبکه L را کامل[1] گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعه S از L، $\vee S$ و $\wedge S$ در L موجود باشند.

[1] compelete

تعریف ۱۶.۱.۱. دو مشبکه $L_۱$ و $L_۲$ یکریختند اگر نگاشت دو سویی α از $L_۱$ به $L_۲$ به قسمی وجود داشته باشد که برای هر a و b در $L_۱$،

$$\alpha(a \vee b) = \alpha(a) \vee \alpha(b)\ ,\ \alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$$

۲.۱ نیم گروه

نیم‌گروه‌ها یکی از ساده‌ترین ساختمان های جبری هستند. با استفاده از آن‌ها می‌توان ساختمان S−سیستم‌ها را تعریف کرد.

تعریف ۱.۲.۱. اگر S یک نیم گروه باشد، زیر مجموعه ناتهی $K \subseteq S$

۱. یک ایده‌آل چپ [1] از S است اگر $SK \subseteq K$

۲. یک ایده‌آل راست از S است اگر $KS \subseteq K$

۳. یک ایده‌آل دو طرفه از S است اگر ایده‌آل چپ و راست باشد.

برای هر $s \in S$ ایده‌آل sS و Ss را ایده‌آل‌های اصلی S نامند.

نیم گروه S، که ایده‌آل غیر بدیهی ندارد را کاملاً ساده [2] نامند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم S یک نیم گروه باشد. در این صورت:

۱. عضو $e \in S$ را همانی چپ نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $es = s$.

[1] Ideal

[2] Completely simple

۲. عضو $e \in S$ را همانی راست نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $se = s$.

۳. عضو $e \in S$ را همانی نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $es = se = s$.

عضو همانی در یک نیم گروه معمولاً با 1_S نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. برای نیم گروه S

۱. عضو $z \in S$ را چپ صفر [۱] نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $zs = z$.

۲. عضو $z \in S$ را راست صفر [۲] نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $sz = z$.

۳. عضو $z \in S$ را صفر نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $zs = sz = z$.

عضو صفر در یک نیم گروه معمولاً با ۰ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و $\rho \subseteq S \times S$ یک رابطه هم ارزی روی S باشد. ρ

۱. همنهشتی[۳] چپ در S نامیده می‌شود در صورتی که برای هر $s, t, u \in S$ اگر $s\rho t$ آن‌گاه $(us)\rho(ut)$.

۲. همنهشتی راست روی S نامیده می‌شود در صورتی که برای هر $s, t, u \in S$ اگر $s\rho t$ آن‌گاه $(su)\rho(tu)$.

---

[1] Left zero element

[2] Right zero element

[3] Congruence

۳. همنهشتی دو طرفه در S نامیده می‌شود در صورتی که $s,t,u \in S$ اگر $s\rho t$ آن‌گاه $(su)\rho(tu)$ و

$(us)\rho(ut)$.

توجه شود که رابطه هم ارزی ρ روی نیم گروه S همنهشتی است اگر و تنها اگر $s\rho t$ و $u\rho v$ نتیجه دهد $(su)\rho(tv)$ برای هر $s,t,u,v \in S$. همچنین کلاس $a \in S$ نسبت به این رابطه هم ارزی را با $\rho(a)$ یا $[a]_\rho$ یا $[a]$ نشان می‌دهیم. اگر ρ یک رابطه همنهشتی روی S باشد s/ρ با تعریف ضرب $[s]_\rho[t]_\rho = [st]_\rho$، برای هر $s,t \in S$ یک نیم گروه است که نیم گروه خارج قسمتی نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید S یک نیم گروه باشد. گوییم $s,t \in S$ جابجا می‌شوند اگر $st = ts$.

مجموعه $C(S) = \{c \in S \mid cs = sc\ ,\ \forall s \in S\}$

را مرکز S می‌نامیم. اگر $C(S) = S$ آنگاه S را نیم گروه تعویض‌پذیر یا آبلی می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم S و T دو نیم گروه باشند نگاشت $\varphi : S \longrightarrow T$ همریختی نیم گروهی نامیده می‌شود اگر برای هر $s,s' \in S$، $\varphi(ss') = \varphi(s)\varphi(s')$.

یک همریختی نیم گروهی بین تکواره‌های S و T همریختی تکواره‌ای است اگر $\varphi(1_S) = 1_T$.

در هر دو حالت

$$\ker\varphi = \{(s,s') \in S \times S \mid \varphi(s) = \varphi(s')\}$$

همنهشتی هسته برای همریختی φ نامیده می‌شود.

اگر $S = T$ آنگاه همریختی نیم گروهی را درون ریختی نامند.

تعریف ۷.۲.۱. اگر ρ رابطه همنهشتی روی نیم گروه S باشد نگاشت کانونی $\Pi_\rho : S \longrightarrow S/\rho$ که به هر $x \in S$، $[x]_\rho$ را نسبت می‌دهد برو ریختی کانونی نامیده می‌شود.

قضیه ۸.۲.۱ (همریختی برای نیم گروه‌ها). *فرض کنیم $\varphi : S \longrightarrow T$ همریختی نیم‌گروهی و ρ یک رابطه همنهشتی روی نیم‌گروه S به قسمی باشد که اگر $a\rho a'$ آن‌گاه $\varphi(a) = \varphi(a')$.* **یعنی** $\rho \subseteq \ker\varphi$. *در این‌صورت همریختی منحصر به فرد $\varphi' : S\diagup\rho \longrightarrow T$ با ضابطه $\varphi'([x]_\rho) = \varphi(x)$ چنان موجود است که که دیاگرام زیر را جابجا می‌کند.*

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\pi\rho"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ S/\rho \arrow[r, "\varphi'"] & T \end{tikzcd}$$

اگر $\rho = ker\varphi$ در اینصورت φ' یک به یک است. همچنین اگر φ پوشا باشد φ' نیز پوشاست.

برهان. به [۱۷] قضیه ۲۶.۲.۱ مراجعه شود. □

نتیجه ۹.۲.۱. *اگر $\varphi : S \longrightarrow T$ همریختی نیم‌گروهی پوشا باشد در اینصورت $T \cong S\diagup\ker\varphi$.*

برهان. به [۱۷] نتیجه ۲۷.۲.۱ مراجعه شود. □

۳.۱ مفاهیم رسته‌ای

رسته‌ها زبان مشترکی و زمینه‌ای عام برای پرداختن به اشیای مختلف ریاضی نظیر مجموعه‌ها، گروه‌ها، نیم گروه‌ها، و غیره را فراهم می‌کند. ایده شهودی تعریف رسته این است که ساختمان‌های ریاضی، همراه با نگاشت‌های مناسبی بین اشیاءشان از خواص مشترکی برخوردارند و بسیاری از مباحث مختلف ریاضی را می‌توان بر حسب رسته‌ها تعبیر کرد.

تعریف ۱.۳.۱. هر رسته رده‌ای است مانند $\mathcal{A}$ از اشیا (که با $A, B, C, \ldots$ نمایش داده می‌شوند) با این ویژگی که به ازای هر دو شیء مثل A و B مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ نشان

می‌دهیم و هر عضو آن را ریخت می‌نامیم. با این خاصیت که

۱. به ازای هر چهار شیء مثل D, C, B, A که $(A, B) \neq (C, D)$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(C, D) = \varnothing$$

۲. به ازای هر سه شیء C, B, A تابع

$$\begin{aligned} . : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C) \\ (g, f) &\longrightarrow gf \end{aligned}$$

موجود است که $gf \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C)$ که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(i) به ازای هر چهار شیء D, C, B, A اگر $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C), f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ و $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(C, D)$، آن گاه $h(fg) = (hf)g$.

(ii) به ازای هر شیء مثل A، عضوی از $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A)$ مثل 1_A موجود است که به ازای هر عضو از$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ مثل f و هر عضو از $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(C, A)$ مثل f و هر عضو از $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(C, A)$ مثل g، $1_A\, g = g, f\, 1_A = f$.

تعریف ۲.۳.۱. اگر $\mathrm{ob}\,\mathcal{A}$ نشان دهنده کلاس اشیای رسته $\mathcal{A}$ باشد، رسته $\mathcal{B}$، زیر رسته از رسته $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $\mathrm{ob}\,\mathcal{B} \subseteq \mathrm{ob}\,\mathcal{A}$

۲. برای هر $A, B \in \operatorname{ob}\mathcal{B}$، $\operatorname{Mor}_{\mathcal{B}}(A, B) \subseteq \operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$.

۳. ترکیب ریخت‌ها در $\mathcal{B}$ تحدیدی از ترکیب ریختها در $\mathcal{A}$ باشد.

به علاوه اگر برای هر $A, B \in \operatorname{ob}\mathcal{B}$ و $\operatorname{Mor}_{\mathcal{B}}(A, B) = \operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$، آنگاه $\mathcal{B}$ را زیر رسته کامل می‌نامیم.

مثال ۳.۳.۱. رسته‌ای را در نظر می‌گیریم که اشیاء آن همه مجموعه‌های مرتب جزئی $(P, \leq)$ باشند و ریخت $(P, \leq) \longrightarrow (T, \leq)$ تابعی است مانند $h : P \longrightarrow T$ به طوری که به ازای هر $x, y \in P$، $x \leq y \Rightarrow h(x) \leq h(y)$. این رسته را با **Pos** نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۳.۱. ریخت $f : A \longrightarrow B$ در رسته $\mathcal{A}$ را در نظر می‌گیریم، f تکریختی نامیده می‌شود اگر از چپ حذف‌پذیر باشد، یعنی برای هر $k, h \in \operatorname{Mor}(C, A)$ اگر $fk = fh$ آنگاه $k = h$ در این حالت A زیر شیء از B نامیده می‌شود.

هم چنین $f : A \longrightarrow B$ برویریختی است اگر از راست حذف‌پذیر باشد یعنی برای هر $k, h \in \operatorname{Mor}(B, D)$ اگر $kf = hf$ آنگاه $k = h$. در این حالت B **فاکتور شیء** از A نامیده می‌شود.

f دوریختی است اگر تکریختی و برویریختی باشد.

تعریف ۵.۳.۱. ریخت $f : A \longrightarrow B$ در رسته $\mathcal{A}$ مقطع[1] نامیده می‌شود اگر معکوس چپ داشته باشد، یعنی $g \in \operatorname{Mor}(B, A)$ وجود داشته باشد به طوری که $gf = 1_A$. در این حالت A مقطعی از B نامیده می‌شود.

[1] section