دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

ترتیب‌های تصادفی میان آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته شرطی

توسط

سید روح‌اله شجاعی کیاسری

استاد راهنما

دکتر بهاءالدین خالدی

استاد مشاور

دکتر محمدرضا فریدروحانی

خردادماه ۱۳۸۷

تقدیم به

نور آسمان‌ها و زمین،

او که آموخت انسان را آنچه را که نمی‌دانست،

همان کسی که مرا آفرید و در دامان پدر و مادری قرار داد که وجود گوهریشان سراسر ایثار و عظمت و علم و دانایی است،

او که مرا در دامان معلمانی نیکو پروراند، نیکو معلمانی که حکمت و حقیقت و علم و راستی را یکی پس از دیگری و کلمه‌ای در پس کلمه‌ای در جان و دلم نشاندند، به‌خصوص نعمت بهره‌مندی از استادی فرزانه چون دکتر خالدی که در کنار ایشان همواره دریچه‌های تازه‌ای از دانایی برایم گشوده می‌شود.

او که مرا موهبت داشتن همسری مهربان، صبور و با ایمان و فرهیخته عطا نمود،

او که قلب مرا به برکت وجود و به امید ظهور قامت بلند بندگی و تجلی بقیة ا...، حضرت حجة ابن الحسن (عج) آرامش می‌بخشد،

او که همواره مرا یاری می‌رساند.

قدردانی

سپاس و مراتب قدردانی‌ام را به پیشگاه استاد فرزانه‌ام آقای دکتر بهاالدین خالدی تقدیم می‌دارم که در مسیر علم و تحقیق و در بسیاری از جوانب زندگی،

دستم بگرفت و پا به پا برد تا شیوه راه رفتن آموخت.

همچنین از استاد گرانقدر آقای دکتر فریدروحانی به‌خاطر نقطه‌نظرات دانشمندانه‌ای که در انجام این پایان‌نامه ایراد نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از اساتید گرانقدر آقای دکتر خدادادی و آقای دکتر خزایی سپاسگزارم که بزرگوارانه زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شده و با دقت عالمانه خود نکات ظریفی را در زیبا شدن این پایان‌نامه بیان داشتند.

از اساتید گرانقدرم آقای دکتر مشکانی، آقای دکتر وحیدی اصل، آقای دکتر شفیعی و خانم دکتر همدانی که در دوره کارشناسی ارشد افتخار شاگردی ایشان را داشتم نیز قدردانی می‌نمایم.

همچنین از دوستانی که به هر نحو در انجام این کار مرا یاری رساندند تشکر می‌کنم.

سید روح‌اله شجاعی کیاسری

تهران، خرداد ۱۳۸۷

ترتیب‌های تصادفی میان آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته شرطی

چکیده

در این پایان‌نامه ما به مقایسه‌های تصادفی توزیع‌های شرطی‌ای که مشابه با توزیع‌های شرطی‌ای به‌شکل $P(X-t|X>t)$ و $P(t-X|X\leq t)$ تعریف می‌شوند، پرداخته‌ایم. آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته، گروه وسیعی از آماره‌هایی با ماهیت ترتیبی را شامل می‌شود، چنانکه آماره‌های ترتیبی معمولی و مقادیر رکورد زیرگروهی از آن هستند. بنابراین واضح است قضیه‌هایی که برای آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته بیان و اثبات می‌شوند، در زیرگروه‌های آن همچون آماره‌های ترتیبی معمولی، مقادیر رکورد و ... نیز برقرار هستند. در فصل سوم این پایان‌نامه، آخرین و جامع‌ترین دستاوردها در باب مقایسه‌های تصادفی میان آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافتهٔ شرطی تشریح شده‌اند. آماره‌های ترتیبی معمولی نقشی اساسی در نظریهٔ قابلیت اطمینان ایفا می‌کنند. مقایسهٔ تصادفی میان طول عمرهای باقی‌مانده و زمان‌های غیر فعال دو سیستم، که هر دو از نوع توزیع‌های شرطی هستند، اطلاعات مفیدی برای بهبود سیستم‌ها ایجاد می‌کنند. قضیه‌هایی چند در این باب در فصل دوم بیان شده است. در این پایان‌نامه موفق به بیان و اثبات چند قضیهٔ جدید در باب مقایسهٔ تصادفی میان توزیع‌های شرطی مقادیر رکورد شده‌ایم که البته تحت هیچ‌یک از قضیه‌هایی که تا به حال برای آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافتهٔ شرطی بیان گردیده‌اند قرار نمی‌گیرند. این قضیه‌ها و اثبات آنها را در فصل چهارم ارائه کرده‌ایم. البته در پایان هر فصل کاربردهایی از نتایج بیان شده ارائه نموده‌ایم.

واژه‌های کلیدی : آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته، ترتیب تصادفی، زمان غیر فعال، سیستم‌های منسجم، طول عمر باقی‌مانده، فرایند پواسون ناهمگن، فرایند پواسون همگن، مقادیر رکورد.

فهرست مندرجات

نمادها و علائم اختصاری

آمارهٔ ترتیبی تعمیم‌یافته rام در اولین n آمارهٔ ترتیبی تعمیم‌یافته با پارامترهای m و k	$X_{(r,n,m,k)}$
آماره‌های ترتیبی در نمونه‌ای به اندازهٔ n	$X_{۱:n}, X_{۲:n}, \ldots, X_{n:n}$
آمارهٔ ترتیبی rام در نمونهٔ n تایی $X_۱^t$، $X_۲^t$، ...، X_n^t	$X_{r:n}^t$
امید ریاضی	$E(.)$
اندازهٔاحتمال	$P(.)$
برابری در توزیع (هم‌توزیعی)	$\stackrel{d}{=}$
به‌شرط آنکه	$\|$
به‌طور مستقل و مشابه توزیع شده	iid
بینهایت	∞
تابع بقای توزیع F	$\bar{F}$
تابع توزیع	F ، G
تابع چگالی احتمال	f ، g
تابع عمر سیستم	τ
تابع گاما	$\Gamma(.)$
تابع مشخصهٔمجموعهٔ A	$I_A(.)$

تابع معکوس تابع توزیع F	$F^{-۱}$
تابع نرخ شکست تجمعی توزیع F	$\Lambda_F(.)$
تابع نرخ شکست توزیع F	$\lambda_F(.)$
تابع نرخ شکست معکوس توزیع F	$\tilde{\lambda}_F(.)$
تعداد رکورد تا nامین مشاهده (دنبالهٔ $\{X_i\}_{i=۱}^{\infty}$)	$N_n\,(N_n^X)$
توزیع دوجمله‌ای با تعداد n آزمایش و احتمال پیروزی p	$Bin(n,p)$
توزیع شرطی X به‌شرط رخداد واقعهٔ A	$X\|A$
توزیع شدن	$\sim$
توزیع گاما با پارامترهای α و β	$Gamma(\alpha,\beta)$
توزیع یکنواخت استاندارد $(۰,۱)$	$U(۰,۱)$
رشد رکورد nام (دنبالهٔ $\{X_i\}_{i=۱}^{\infty}$)	$J_n\,(J_n^X)$
زمان رخداد رکورد nام (دنبالهٔ $\{X_i\}_{i=۱}^{\infty}$)	$T_n\,(T_n^X)$
زمان رخداد k–رکورد nام (دنبالهٔ $\{X_i\}_{i=۱}^{\infty}$)	$T_{n,k}\,(T_{n,k}^X)$
زمان میان رکورد nام (دنبالهٔ $\{X_i\}_{i=۱}^{\infty}$)	$\Delta_n\,(\Delta_n^X)$
صعودی بودن (برای توابع)	$\uparrow$
صعودی بودن در مفهوم ترتیب تصادفی معمولی	$\uparrow_{st}$
سور عمومی	$\forall$
سور وجودی	$\exists$
طول عمر سیستم (متشکل از مولفه‌هایی از نوع X)	$T\,(T_X)$
عدد پی ($\simeq ۳/۱۴$)	π
عضویت مجموعه‌ای	$\in$
عملگر مجموعه‌ای سوپریمم	Sup
عملگر مجموعه‌ای ماکسیمم	Max

عملگر مجموعه‌ای می‌نیمم	Min
کوچکتری در ترتیب تصادفی معمولی	$\leq_{st}$
کوچکتری در ترتیب نرخ شکست	$\leq_{hr}$
کوچکتری در ترتیب نرخ شکست معکوس	$\leq_{rh}$
کوچکتری در ترتیب نسبت درستنمایی	$\leq_{lr}$
متغیر تصادفی با توزیع بتا با پارامترهای α و β	$B_{\alpha,\beta}$
متغیر تصادفی هم‌توزیع با $[X_i - t \mid X_i > t]$	X_i^t
مجموعهٔ‌اعداد حقیقی	$\Re$
مجموعهٔ‌اعداد حقیقی مثبت	$\Re^+$
مجموعهٔ‌اعداد طبیعی $\{1,2,\dots\}$	N
مقدار رکورد nام (دنبالهٔ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$)	$R_n \, (R_n^X)$
مقدار k–رکورد nام (دنبالهٔ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$)	$R_{n,k} \, (R_{n,k}^X)$
نزولی بودن (برای توابع)	$\downarrow$
نقطهٔ‌انتهایی چپ تکیه‌گاه X	l_X
نقطهٔ‌انتهایی راست تکیه‌گاه X	u_X
نمونهٔ‌تصادفی به اندازهٔ n	$X_1, X_2, \dots, X_n$
" و " منطقی	$\wedge$
واریانس	$Var(.)$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته

از دیدگاه نظریهٔ توزیع می‌توان بعضی از آماره‌هایی که دارای ساختاری ترتیبی می‌باشند، همچون آماره‌های ترتیبی (معمولی)، مقادیر k−رکورد، آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، رکوردهای فایفر، آماره‌های ترتیبی سانسوریدهٔ فزایندهٔ نوع دوم (II) و آماره‌های دیگری از این دست که در این بخش با آنها آشنا خواهید شد را تحت یک ساختار کلی به نام " آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته " بیان نمود. برای معرفی آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته که برمبنای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid با توزیع مشترک F تعریف می‌شوند، ابتدا لازم است که " آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته یکنواخت " را که برمبنای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid با توزیع یکنواخت روی بازهٔ $(۰,۱)$ تعریف می‌شوند، معرفی نماییم.

فرض کنید $\{U_i\}_{i=۱}^{\infty}$ دنبالهٔ متغیرهای تصادفی iid باشد که در آن U_i، $i \geq ۱$ دارای توزیع یکنواخت روی بازهٔ $(۰,۱)$ است. یعنی

$$U_i \overset{iid}{\sim} U(۰,۱) \ , \ i = ۱,۲,\ldots$$

تعریف زیر از کمپس (۱۹۹۵) است.

تعریف ۱.۱ مقادیر $n \in N$، $k \geq 1$ و $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1} \in \Re$ را در نظر گرفته و به‌ازای هر $1 \leq r \leq n-1$، قرار می‌دهیم $M_r = \sum_{j=r}^{n-1} m_j$، $\gamma_r = k + n - r + M_r$ و $\tilde{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$. در این صورت متغیرهای تصادفی

$$U(1, n, \tilde{m}, k), U(2, n, \tilde{m}, k), \ldots, U(n, n, \tilde{m}, k)$$

را آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافتهٔ یکنواخت می‌نامیم، هر گاه دارای تابع چگالی توأم زیر باشند

$$f_{U(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U(n,n,\tilde{m},k)}(u_1, \ldots, u_n) = k\left(\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1}(1-u_i)^{m_i}\right)(1-u_n)^{k-1}, \quad 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq 1. \tag{1.1.1}$$

در حالت خاص $m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = m$، آماره‌های ترتیبی تعمیم یافتهٔ یکنواخت را به‌صورت $U(r, n, m, k)$، $r = 1, 2, \ldots, n$ نشان می‌دهیم.

پس از تعریف آماره‌های ترتیبی تعمیم یافتهٔ یکنواخت، اکنون می‌توان آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته برمبنای توزیع پیوستهٔ F را با استفاده از تبدیل چندکی، تعریف نمود.

تعریف ۲.۱ فرض کنید $U(1, n, \tilde{m}, k)$، $U(2, n, \tilde{m}, k)$، ...، $U(n, n, \tilde{m}, k)$ آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافتهٔ یکنواخت باشند. آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته (برمبنای تابع توزیع F) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X(r, n, \tilde{m}, k) = F^{-1}(U(r, n, \tilde{m}, k)) \quad , \quad r = 1, 2, \ldots, n \, . \tag{2.1.1}$$

که در آن

$$\forall u \in (0, 1), \quad F^{-1}(u) = Sup\{x : F(x) \leq u\}.$$

در حالت خاص $m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = m$، آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته (برمبنای تابع توزیع F) را به‌صورت $X(r, n, m, k)$، $r = 1, 2, \ldots, n$ نشان می‌دهیم.

تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته

در صورتی‌که تابع توزیع F، مطلقاً پیوسته با تابع چگالی متناظر f باشد، می‌توان تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته (برمبنای تابع توزیع F) را به دست آورد. بدین منظور ابتدا به رابطه زیر نیاز خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&P(X(1,n,\tilde{m},k) \le x_1, X(2,n,\tilde{m},k) \le x_2, \ldots, X(n,n,\tilde{m},k) \le x_n) \\
&= P(F^{-1}(U(1,n,\tilde{m},k)) \le x_1, F^{-1}(U(2,n,\tilde{m},k)) \le x_2, \ldots, F^{-1}(U(n,n,\tilde{m},k)) \le x_n) \\
&= P(U(1,n,\tilde{m},k) \le F(x_1), U(2,n,\tilde{m},k) \le F(x_2), \ldots, U(n,n,\tilde{m},k) \le F(x_n))
\end{aligned} \tag{۳.۱.۱}$$

که در روابط بالا از رابطهٔ (۲.۱.۱) استفاده شده است. اکنون با توجه به برابری (۳.۱.۱) و تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته یکنواخت (رابطهٔ (۱.۱.۱))، می‌توان تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته (برمبنای تابع توزیع F) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned}
&f_{X(1,n,\tilde{m},k),\ldots,X(n,n,\tilde{m},k)}(x_1,\ldots,x_n) \\
&= k\left(\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1}(1-F(x_i))^{m_i}f(x_i)\right)(1-F(x_n))^{k-1}f(x_n)\ , \\
&\quad F^{-1}(0) \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le F^{-1}(1)\ .
\end{aligned} \tag{۴.۱.۱}$$

تابع چگالی حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته

کمپس (۱۹۹۵، لم ۳.۳)، تابع چگالی حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته برمبنای تابع توزیع مطلقاً پیوستهٔ F را در حالت خاص $m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = m$، به‌صورت زیر به دست آورده است

$$f_{X(r,n,m,k)}(x) = \phi_{r,n,m,k}(F(x))f(x)\ , \tag{۵.۱.۱}$$

که در آن

$$\phi_{r,n,m,k}(u) = \frac{c_{r-1,n}}{(r-1)!}(1-u)^{\gamma_r - 1}[\delta_m(u)]^{r-1}, \quad u \in (0,1), \qquad (۶.۱.۱)$$

و

$$c_{r-1,n} = \prod_{j=1}^{r} \gamma_j, \quad \gamma_n = k$$

و به‌سادگی از تعریف ۱.۱ نتیجه می‌شود که

$$\gamma_r = k + (n-r)(m+1), \qquad 1 \le r \le n-1, \qquad (۷.۱.۱)$$

همچنین تابع $\delta_m : [0,1) \to \Re$، $m \in \Re$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{m+1}\left[1-(1-x)^{m+1}\right], & m \neq -1 \\ -\ln(1-x) & m = -1. \end{cases} \qquad (۸.۱.۱)$$

همان‌طورکه گفته‌شد، مدل آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته شامل مدلهایی از آماره‌هایی است که همهٔ آنها دارای خاصیت ترتیبی می‌باشند و با درنظرگرفتن مقادیر خاصی از پارامترهای مدل آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته، یعنی مقادیر خاصی به‌ازای r، n، k و $\tilde{m}$، مدل‌هایی چون آماره‌های ترتیبی معمولی، مقادیر k–رکورد، آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، رکوردهای فایفر، آماره‌های ترتیبی سانسوریده فزاینده نوع دوم (II) و مدل‌های دیگری از این دست، حاصل می‌شوند. در چند بخش آتی، برخی از مدل‌های ذکر شده را به اندازه نیاز این پایان‌نامه تعریف نموده و به نحوهٔ عضویت آنها در مدل آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته نیز می‌پردازیم.

۱.۱.۱ آماره‌های ترتیبی معمولی

آماره‌های ترتیبی معمولی یا همان آماره‌های ترتیبی، برای هر دانشجوی آمار آشنا می‌باشد و در اینجا از پرداختن به تعریف آنها صرفنظر می‌کنیم، اما از جنبهٔ کاربردی، آنها دارای جایگاه ویژه‌ای در

استنباط و تحلیل آماری هستند. بدیهی‌ترین ویژگی آنها در استنباط آماری اینکه بردار آماره‌های ترتیبی، همواره یک آمارهٔ بسنده می‌باشد. در مبحث قابلیت اطمینان و بهبود طول عمر سیستم‌ها، آنها نقشی اساسی ایفا می‌کنند. ما در فصل دوم این پایان‌نامه با بررسی ترتیب‌های تصادفی میان آماره‌های ترتیبی شرطی، درعمل، کاربردی اساسی از آماره‌های ترتیبی را در مبحث قابلیت اطمینان بیان خواهیم نمود. حال به نحوهٔ عضویت آماره‌های ترتیبی در مدل آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافتهٔ می‌پردازیم.

برای $n \geq ۱$ فرض کنید $X_{i:n}$، i امین آماره ترتیبی از نمونه تصادفی $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ از توزیع پیوسته F باشد. این آماره‌های ترتیبی حالت خاصی از آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافتهٔ با پارامترهای $m_۱ = m_۲ = \ldots = m_{n-۱} = ۰$ و $k = ۱$ می‌باشند. در این حالت

$$\gamma_r = n - r + ۱, \quad r = ۱, \ldots, n - ۱.$$

پس از جایگذاری این پارامترها در رابطهٔ (۴.۱.۱)، تابع چگالی توأم بردار آماره‌های ترتیبی ~~معمولی~~ به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$f_{(X_{۱:n}, X_{۲:n}, \ldots, X_{n:n})}(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = n! \left(\prod_{i=۱}^{n} f(x_i) \right).$$

خوانندهٔبرای جزئیات کاملتر می‌تواند به دیوید و ناگاراجا (۲۰۰۳)، آرنولد و همکاران (۱۹۹۲) و کمپس (۱۹۹۵) مراجعه نماید.

۲.۱.۱ مقادیر رکورد

فرض کنید $\{X_i\}_{i=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid از توزیع پیوسته F باشد. مشاهده X_j یک " مقدار رکورد " (یا رکورد معمولی) نامیده می‌شود در صورتی که مقدار آن از همهٔ مشاهدات قبل در دنباله بزرگتر باشد. یعنی X_j یک رکورد است اگر برای هر $i < j$ داشته باشیم

$$X_j > X_i \ .$$

به‌ازای j های مختلفی که X_j یک مقدار رکورد باشد، دنبالهٔ مقادیر رکورد $\{R_n^X\}_{n=1}^{\infty}$ مشاهده می‌شود که در آن R_n^X، n امین مقدار رکورد دنبالهٔ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌باشد. همچنین بدیهی است که اولین مشاهده، اولین مقدار رکورد می‌باشد یعنی $R_1^X = X_1$.

زمانی که یک رکورد اتفاق می‌افتد یک متغیر تصادفی " زمان رکورد " نیز ثبت می‌شود. دنبالهٔ زمان‌های رکورد را با $\{T_n^X\}_{n=1}^{\infty}$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T_1^X = 1 \quad (\text{با احتمال یک})$$

و برای $n \geq 2$،

$$T_n^X = Min\{j : X_j > X_{T_{n-1}}\}.$$

با استفاده از این تعریف، دنبالهٔ مقادیر رکورد $\{R_n^X\}_{n=1}^{\infty}$ عبارت است از

$$R_n^X = X_{T_n^X} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

همراه با دنبالهٔ مقادیر رکورد، دنباله‌هایی چند مورد نظر و بررسی قرار می‌گیرند. از جمله می‌توان به دنبالهٔ " رشد رکورد "، دنبالهٔ " زمان میان‌رکورد " و دنبالهٔ " تعداد رکورد تا زمان n " $(n \geq 1)$، اشاره نمود که تعریف آنها را در ادامه ارائه می‌کنیم.

دنبالهٔ رشد رکورد $\{J_n^X\}_{n=1}^{\infty}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$J_1^X = R_1^X$$

و برای $n \geq 2$،

$$J_n^X = R_n^X - R_{n-1}^X \ .$$

دنبالهٔ زمان میان‌رکورد $\{\Delta_n^X\}_{n=1}^{\infty}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Delta_n^X = T_n^X - T_{n-1}^X \quad , \quad n = 2, 3, \ldots \quad .$$

جدول ۱.۱.۱: فرایندهای زمان، مقدار، رشد، زمان میان و تعداد رکوردها

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
X_n	۵	۳	۱۰	۸	۹	۱۲	۶	۱۳	...
T_n^X	۱	۳	۶	۸	...				
R_n^X	۵	۱۰	۱۲	۱۳	...				
J_n^X	–	۵	۲	۱	...				
Δ_n^X	–	۲	۳	۲	...				
N_n^X	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۴	...

دنبالهٔ تعداد رکوردهای رخ‌داده‌شده تا لحظهٔ n ام، $\{N_n^X\}_{n=1}^{\infty}$، را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N_n^X = k$$

که در آن k، عددی است که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$T_k^X \leq n \ \wedge \ T_{k+1}^X > n \ ,$$

البته چون X_1 همیشه یک رکورد است، همواره $N_1^X = 1$ می‌باشد.

در مثال زیر دنباله‌های تعریف شدهٔ بالا را تبیین می‌کنیم.

مثال 1.1 در سطر دوم جدول ۱.۱.۱، دنبالهٔ مشاهدات X_n، $n \geq 1$، درنظر گرفته شده است. دنباله‌های زمان‌های رکورد، مقادیر رکورد، رشد رکورد، زمان میان‌رکورد و تعداد رکورد تا زمان n، متناظر با دنبالهٔ مذکور، به‌ترتیب در سطرهای بعدی همان جدول درج شده‌اند. خواننده به راحتی می‌تواند درستی اعداد جدول ۱.۱.۱ را توسط تعاریف بیان شدهٔ مربوط، بررسی نماید.

مقادیر رکورد مانند بسیاری دیگر از مفاهیم آمار و احتمال در زندگی پدیدار و قابل مشاهده است. چنان‌که در رشته‌های مختلف ورزشی مثل شنا، دو میدانی، وزنه‌برداری و بسیاری دیگر، رکوردهایی چون کوتاه‌ترین زمان طی نمودن مسافت ۱۰۰ متر توسط شناگر یا دونده، بیشترین وزنه‌ای که وزنه‌بردار بالای سر می‌برد و غیره ثبت می‌شود. هرگاه شناگری بتواند زمانی کوتاه‌تر از

تمامی زمان‌های گذشتهٔ طی مسیر، که توسط شناگران قبل از او به ثبت رسیده‌است را ثبت کند، یک رکورد ثبت کرده است. البته در اینجا لازم است اشاره کنیم که مقادیر رکورد، دارای چندین نوع هستند، ازجمله مقادیر رکورد بالا یا همان مقادیر رکورد معمولی که در این پایان‌نامه نورد نظر است و دیگر، مقادیر رکورد پائین که برخلاف مقادیر رکورد بالا با دیدن مشاهده‌ای که از همهٔ مشاهدات قبلی در دنباله کوچکتر باشد ثبت می‌شود و چون این نوع مقادیر رکورد مورد نظر این پایان‌نامه نمی‌باشد خواننده را برای مطالعه در این زمینه به آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) رجوع می‌دهیم. مثال‌های بسیاری نیز در موضوعات اجتماعی، صنعتی، تاریخی و غیره نیز از مقادیر رکورد وجود دارد. گاهی اوقات برحسب نوع مسئلهٔ مورد بررسی، یک رکورد با مشاهدهٔ مقداری که از تمامی مقادیر متناظر قبل از خود بیشتر باشد، ثبت شده، و گاهی یک رکورد با مشاهدهٔ مقداری که از تمامی مقادیر متناظر قبل از خود کمتر باشد، ثبت می‌شود. علاوه بر زمینه‌های ورزشی، در مسائلی چون هواشناسی، ژئوفیزیک، زلزله‌نگاری، سیلابها، طغیانها و از این دست، مقادیر رکورد ثبت می‌شود و استنباط از روی آنها حائز اهمیت زیادی است، مخصوصاً زمانی که داده‌های اولیه در دست نبوده و تنها مقادیر رکورد ثبت شده‌اند. البته مفهوم رکورد وسیع‌تر از حالات ساده‌ای است که ذکر شد و ضمن آنکه در این پایان‌نامه تا اندازهٔ نیاز به معرفی برخی از انواع مقادیر رکورد می‌پردازیم.

مقادیر رکورد ابتدا توسط چاندلر (۱۹۵۲) تعریف گردید و افراد بسیاری از جمله رینی (۱۹۶۲)، تاتا (۱۹۶۹) همچنین شوروک (۱۹۷۲) و رزنیک (۱۹۷۳) دربارهٔ قضایای حدی، نظریهٔ مقادیر غایی و ساختار مقادیر رکورد و همچنین مشخصه‌سازی توزیع‌های آن نظریات ارزشمندی را به دنیای علم ارزانی داشتند. تا اینکه نخستین گردآوری نظریات در باب مقادیر رکورد توسط گلیک (۱۹۷۸) به‌همراه کاربردهایی ارائه گردید. گالامبوس (۱۹۷۸) در کتابی خواص مقدماتی و مجانبی مقادیر رکورد را مورد بررسی قرار داد. ناگاراجا(۱۹۷۸) و در ادامه آرنولد و بالاکریشنان (۱۹۸۹) راجع به گشتاورهای مقادیر رکورد به بررسی پرداختند. فایفر (۱۹۸۲)، لین (۱۹۸۷) و همچنین وایت (۱۹۸۸) و بسیاری دیگر در زمینهٔ مشخصه‌سازی‌های توزیع‌های مقادیر رکورد توسط گشتاورها، توزیع‌های همانند و استقلال آماره‌های رکورد تحقیق کرده‌اند. بالاخره در زمینهٔ کاربردها و استنباط