بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم تهران

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار

عنوان:

دستور زبان تصادفی زیرمتن آزاد

درحالت زیربحرانی

استاد راهنما:

دکتر رحیم زاده ثانی

نگارش:

مهدی سادات دربندی

بهمن ۱۳۸۵

بسمه تعالی

دانشگاه خوارزمی (تربیت معلم)

تاریخ :..................

شماره :..................

پیوست :..................

واحد :..................

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه آقای مهدی سادات دربندی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته آمار تحت عنوان :

دستور زبان تصادفی زیر متن آزاد

درحالت زبر بحرانی

درروز یکشنبه مورخ ۸۵/۱۱/۱ دردانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می گردد . نمره این آزمون ۱۸٫۲۵ می باشد .

۱- عالی ☑

۲- بسیارخوب ☐

۳- خوب ☐

۴- قابل قبول ☐

۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر علی اکبر رحیم زاده ثانی	دکتر محمد قاسم وحیدی اصل	دکتر عین ا... پاشا

جواد لآلی

رئیس دانشکده علوم ریاضی

و مهندسی کامپیوتر

تهران : خیابان شهید دکتر مفتح شماره ۴۹ ، کد پستی ۱۵۶۱۴ تلفن : ۸۸۳۲۹۲۲۰

بسمه تعالی

آگهی دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

دستور زبان تصادفی زیرمتن آزاد

درحالت زیربحرانی

استاد راهنما: آقای دکتر رحیم‌زاده

داور خارجی: آقای دکتر وحیدی‌اصل

داور داخلی: آقای دکتر پاشا

دانشجو: مهدی سادات دربندی

زمان: ساعت ۱۴ روز یکشنبه مورخ ۸۵/۱۱/۱

مکان: دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر، دانشگاه تربیت معلم.

خلاصه:

دستور زبان تصادفی درعلوم کامپیوتر معرفی و تحقیقات بروی آن به کمک شیوه‌های فیزیک آماری نظیر حدود ترمودینامیک و بسط خوشه‌ای و... انجام شده است. در این پایان نامه ما رفتار دستور زبان تصادفی زیرمتن آزاد را با فرایندهای شاخه‌ای چند نوعی مدل‌بندی می‌کنیم، وقتی که فرایند زیربحرانی با احتمال انقراض غیرصفر(علامت‌ها از بین نمی‌روند) بوده و عامل زمان بسیار بزرگ است، رفتار فرایند را مورد بررسی قرار میدهیم. اندازه‌های حدی مختلف و روابط بین آنها نیز مطالعه می‌شود.

سپاس

ستایش سزاوار خدای سبحان که انسان‌ها را در میدان عمر به مسابقه دانش و تکامل فرمان داد و درود فراوان به فرستادگانش که اندیشه جز ابلاغ رسالت و تکمیل نفوس و رساندن قافله بشری به قله کمال انسانی نداشته‌اند.

به عنوان تشکر و حق شناسی لازم می‌دانم از استاد عالیقدر و بزرگوار **جناب آقای دکتر رحیم زاده‌ثانی** به خاطر زحماتشان در طول دوره تحصیل و اینکه در نگارش پایان نامه صادقانه مرا مورد راهنمایی و مساعدت خویش قرار داده وبا نیک اندیشی در کار من نگریستند و نیز از استاد فرزانه جناب **آقای دکتر پاشا** که در طول تحصیل مرا یاری نموده و داوری این رساله را پذیرفته‌اند ، وهمچنین از محضر استاد گرانقدر **جناب آقای دکتر وحیدی‌اصل** که بر من منت نهاده و زحمت داوری این رساله را تقبل نموده‌اند کمال تشکر وسپاسگذاری را بنمایم.

و نیز شایسته است از همکاری صمیمانه دوستانی که با پیشنهادات و زحمات خویش مرا در تهیه این پژوهش یاری نموده‌اند قدردانی وتشکرنمایم.

چکیده

دستور زبان تصادفی درعلوم کامپیوتر معرفی و تحقیقات بروی آن به کمک شیوه‌های فیزیک آماری نظیر حدود ترمودینامیک و بسط خوشه‌ای و... انجام شده است. در این پایان نامه ما رفتار دستور زبان تصادفی زیرمتن آزاد را با فرایندهای شاخه‌ای چند نوعی مدل‌بندی می‌کنیم، وقتی که فرایند زیربحرانی با احتمال انقراض غیرصفر(علامت‌ها از بین نمی‌روند) بوده و عامل زمان بسیار بزرگ است، رفتار فرایند را مورد بررسی قرارمیدهیم. اندازه‌های حدی مختلف و روابط بین آنها نیز مطالعه می‌شود.

لغات کلیدی:

دستور زبان تصادفی زیرمتن آزاد، فرایند تصادفی چند نوعی زبر بحرانی، حدود ترومودینامیک.

فهرست مطالب

پیشگفتار

پژوهش حاضر به بیان خواص ریاضی رفتار دستور زبان تصادفی زیرمتن‌آزاد در حالت زیر بحرانی با احتمال انقراض غیر صفروقتی که عامل زمان بسیار بزرگ است، می پردازیم.

فرایند شاخه‌ای

از لحاظ تاریخی قدمت فرایندهای شاخه‌ای به حدود یک قرن پیش برمی‌گردد و اولین بار این اصطلاح توسط کولموگوروف [1] ودیمیتریوف [2]، در سال۱۹۴۷ کاربرده شد تا رده‌ای از فرایندهای تصادفی را توصیف کنند. ولیکن اولین گام توسط گالتون [3]، در سال ۱۸۷۳ برداشته شد و اولین مشوق وی تاثیری بود که واتسون [4]، در همان سال بر او گذاشت که ارتباط او درباره زوال نام فامیل در میان اشراف زادگان انگلیسی بود.

فرایند شاخه‌ای چند نوعی

اولین بارشکلی از فرایند گالتون-واتسون دو نوعی توسط بارتلت [5] (۱۹۴۶) معرفی شد، و اولین فرمولبندی و بحث عمومی در مورد فرایندهای چند نوعی ویژه با پارامتر زمان پیوسته توسط کولموگوروف و دیمیتریوف در سال ۱۹۴۷ انجام شد. تعمیم به حالتی که زمان گسسته است، وسیله کلموکروف و سیواستیانف [6](۱۹۴۷)، اورت [7] ویولام [8](۱۹۴۸)و سیواستیانف (۱۹۴۹) انجام شد. توضیح و شرح دقیق تئوری فرایند شاخه‌ای چند نوعی توسط سیواستیانف (۱۹۵۱) انجام شد، که شامل مباحث پیچیده‌ای در مورد فرایندهایی است که بعضی از انواع توانایی تولید انواع دیگر را دارند، نیز بود.

دستور زبان تصادفی صوری

دستور زبان صوری برای اولین بار توسط نوام چامسکی [9] - یکی از بزرگترین زبانشناسان دنیا- در سال۱۹۵۶معرفی و فرمولبندی شد و انواع دستور زبان صوری را نیز بیان کرد.یکی از انواع بسیار کاربردی دستور زبان صوری در علوم کامپیوتر و شاخه‌های دیگر علوم ،دستور زبان زیرمتن‌آزاد است.ساناکف [10] درسال ۱۹۷۱مقاله‌ای در مورد کاربرد فرایند شاخه‌ای در دستور زبان زیرمتن‌آزاد نوشت،

1.A.N.Kolmogorov
2.N.A.Dimitreiv
3.F.Galton
4.H.W.Watson
5.Bartlett
6.Sevast`yanov
7.Everett
8.Ulam
9.Noam Chamsky
10. Sankoff

که ارتباط بین فرایند شاخه‌ای و دستور زبان زیرمتن‌آزاد را بیان کرد.

دستور زبان تصادفی زیرمتن‌آزاد اولین بار توسط بوث [1] و توماسن [2] در سال ۱۹۷۳ معرفی و فرمولبندی شد و بیکر [3] در سال ۱۹۷۹ آن را بسط و گسترش داد. در دهه ۱۹۹۰مطالعات گسترده‌ای روی دستور زبان تصادفی و فرایند تصادفی چند نوعی انجام شده، از آن جمله در سال ۱۹۹۸ مالیشیوف [4] مقاله‌ای به نام دستور زبان تصادفی نوشت که درآن ارتباط بین دستور زبان تصادفی و فرایند شاخه‌ای چند نوعی بیان شده بود. پس از آن پتروف [5] و مالیشیوف و کارپلویچ [6] در سال ۲۰۰۲ مقاله‌ای به نام تکامل زیرمتن‌آزاد در کلمات نوشتند، و به بیان و اثبات چند قضیه در مورد دستور زبان تصادفی و فرایند تصادفی چند نوعی پرداختند.

درتحقیقات آینده می توان بروی ارتباط دستور زبان تصادفی و فرایند شاخه‌ای چند نوعی در محیط تصادفی پرداخت.

در این پایان نامه به مطالعه‌ی دستور زبان تصادفی زیرمتن‌آزاد و فرایندهای تصادفی چند نوعی وابسته به آن می‌پردازیم و قضایایی در مورد وجود احتمال انتقال ثابت در هنگامی که زمان بسیار بزرگ است (حالت مجانبی) را بررسی می‌کنیم.

در فصل اول این پژوهش، به بیان تعاریف و مقدمات لازم در فرایندهای تصادفی و شاخه‌ای چندنوعی و مطالب پایه‌ای مورد نیاز فصل‌های آتی می‌پردازیم.

در فصل دوم به تعریف دستور زبان صوری وانواع آن و همچنین تعریف دستور زبان تصادفی وکاربردهای آن می‌پردازیم.

فصل سوم رفتار دستور زبان تصادفی زیرمتن آزاد در حالت زیربحرانی با احتمال انقراض غیرصفر(علامت‌ها از بین نمی‌روند) را بررسی کرده و به بیان ۴ قضیه و اثبات آن‌ها می‌پردازیم.

امید است نتایج حاصل از این تحقیقات راهنمایی برای دانش پژوهان در هر چه پربارتر کردن مطالعات و تحقیقات آماری بویژه در پایان‌نامه‌های آتی باشد.

مقاله‌های اصلی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار گرفته‌اند عبارتند از:

1.Booth
2.Thomson
3.Baker
4.Malyshev
5.Petrov
6.Karpelevich

[1] PETROV. A. L, (2003) Context-free Grammar Supercritical Case with a Nonzero Extinction Probability, *Theory of probability and its Applications*, No. **47** , **709**.

[2] KARPELEVICH. F. I, PETROV. V. A, PIROGOV. S. A, AND RYBKO. A. N, (2002) Context Free Evolution of Words, *Rappot de Recherche No.* ***4413****, INRIA, Rocqurencourt, France.*

فصل اول:

مفاهیم مقدماتی

در فرایندهای تصادفی وشاخه‌ای

فصل اول، مفاهیم مقدماتی در فرایندهای تصادفی وشاخه‌ای

مقدمه

دراین فصل به طرح وبررسی مطالب پایه‌ای که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم. این فصل از۸ بخش تشکیل شده است که با تعریف برداروماتریس ومطالب پایه‌ای دیگر مانند مقدار ویژه و... آغاز می‌شود. در بخش‌های بعد به تعریف فرایندهای تصادفی و انواع آن، فرایندهای شاخه‌ای و شاخه‌ای چند نوعی، توابع مولد و بعضی از خواص آنها می‌پردازیم. بخش هفت، قضیه‌ای در مورد همگرایی دنباله‌ها بیان می‌کنیم. در بخش آخر، نامساوی مارکوف را بیان می‌کنیم که در فصل ۳ در اثبات یکی از قضیه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱-۱) بردار و ماتریس‌ها

۱-۱-۱) بردارها

یک آرایه از n عدد حقیقی $x_1, \dots, x_n$ یک بردار نامیده می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

۱-۱-۲) ماتریس‌ها

یک ماتریس، یک آرایه مستطیلی یا مربعی شکل از اعدادی است که به صورت سطر وستون مرتب شده‌اند، از نظر تعداد عناصر، اندازه سطرها با هم و اندازه ستون‌ها با هم برابرند. بر طبق نماد گذاری a_{ij} را برای نشان دادن عنصر واقع در سطر i ام وستون j ام ماتریس A به کار می‌بریم و آنرا درایه (i, j) می‌نامیم و A را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{r \times c} \qquad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, c.$$

می‌گوییم A دارای r سطر و c ستون یا $r \times c$ می‌باشد، به ماتریس A که $p \times p$ بوده و برای هر i و j، $a_{ij} = a_{ji}$، ماتریس متقارن گفته می‌شود. برای $A = \left(a_{ij}\right)_{r \times c}$، ترانسپوزه‌ی A چنین تعریف می‌شود $A^T = \left(a'_{ij}\right)$ که برای هر i و j، $a'_{ij} = a_{ji}$.

۱-۱-۳) ماتریس‌های نامنفی و مثبت

فرض کنید $A=\left(a_{ij}\right)_{p\times p}$ یک ماتریس مربعی باشد. اگر هر a_{ij} نامنفی باشد، می‌نویسیم $A\geq 0$.
اگر $A\geq 0$ و دست کم یکی از a_{ij}ها مثبت باشد، می‌نویسیم $A>0$. A را یک ماتریس مثبت می‌نامیم؛ اگر هر a_{ij} مثبت باشد، می‌نویسیم $A\gg 0$.
همین نمادها را برای بردار $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ نیز به کار می‌بریم؛یعنی برای $\vec{x}\geq 0$ لازم است بازاء هر $i=1,\dots,n$، $x_i\geq 0$؛ $\vec{x}>0$ ایجاب می‌کند که بازاء هر $i=1,\dots,n$، $x_i>0$.
همچنین اگر $\vec{x}-\vec{y}\geq\vec{0}$ می‌نویسیم $\vec{x}\geq\vec{y}$ و از این قبیل. واضح است که $A\geq 0$ و $\vec{x}\geq\vec{y}$ (یا $\vec{x}>\vec{y}$) ایجاب می‌کند که $A\vec{x}^T=A\vec{y}^T$.

۱-۱-۴) ماتریس منتظم مثبت (اکیداً صعودی)

ماتریس مربعی $A=\left(a_{ij}\right)_{p\times p}$ ماتریس منتظم مثبت است (Mode-1971) اگر برای هر $i,j=1,\dots,p$، $a_{ij}\in(0,\infty)$، و یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که $A^n\gg 0$، یعنی اگر $A^n=\left(a_{ij}{}^n\right)_{p\times p}$ آنگاه $a_{ij}{}^n>0$, $i,\ j=1,\dots,p$.

۱-۱-۵) مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه

عدد مختلط λرا مقدار ویژه ماتریس A گوییم اگر برداری مانند $\vec{x}\neq\vec{0}$ چنان موجود باشد که $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$. هرگاه λمقدار ویژه A باشد، آنگاه مجموعه $\mathfrak{M}_\lambda$ مرکب از تمام بردارهای صادق در معادله $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ است. اعضای $\mathfrak{M}_\lambda$بردارهای ویژه راست برای λنام دارند.
قبل از بیان قضایای پرون-فروبینیوس، نمادهایی که در مورد بردارها و ماتریس‌ها در کل پایان نامه استفاده می‌شوند را بیان‌می‌کنیم:

۱) فضای اقلیدسی p بعدی، R^p.

۲) فضا ی اقلیدسی p بعدی نا منفی، R_p^+،

$$R_p^+=\left\{(x_1,\dots,x_p);x_i>0,i=1,\dots,p\right\}$$

۳) ζ^p یک فضای واحد در R_p^+.

$$\zeta^p=\left\{\vec{x};\vec{0}<\vec{x}<\vec{1}\right\}$$

۴) $\vec{0}=(0,\dots,0),\vec{1}=(1,\dots,1)$.

۵) $\vec{e}_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ و 1 درمکان iام قرار گرفته است.

۶) $\|\vec{x}\|=\max(|x_1|,\dots,|x_p|)$.

۷) $R_p^+ = \{(x_1,...,x_p) \in R^p;\ x_i > 0\ ,i = 1,...,p\}$.

۱-۲) نظریه ماتریس‌های مثبت پرون-فروبینیوس

فرض کنید $M \geq 0$، با درایه های $m_{ij}, i\ ,j = 1,...,p$، یک ماتریس مربعی بوده و $\vec{x} > 0$برداری با $\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$ باشد. مجموعه ی Λرا مجموعه ی تمام اعداد حقیقی چون λمی گیریم، به طوری کهداشته باشیم:

$$M\vec{x} \geq \lambda\vec{x}.$$

فرض کنیم $\lambda_0 = \sup\Lambda$ ثابت می‌شود که اگر $M \gg 0$، λ_0متناهی ومثبت است. در واقع اگر $N = \max_{1 \leq i,j \leq p} m_{ij}$، آنگاه $\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$ و $\vec{x} > \vec{0}$ ایجاب می کند که $\sum_{i=1}^{p} m_{ij} x_j \leq N \sum_{j=1}^{p} x_j = N,\ i = 1,...,p$. حال آنکه به ازای دست کم یک مقدار j، داریم $x_j \geq \frac{1}{p}$. پس داریم $\lambda_0 \leq pN$. به همین نحو، هرگاه داشته باشیم $A \gg 0$، $\vec{x} > \vec{0}$، آنگاه داریم $0 < \delta = \min_{1 \leq i,j \leq p} m_{ij}$ و $\sum_{j=1}^{p} a_{ij} (\frac{1}{p}) \geq \delta$، که از این معلوم می شود که $\lambda_0 \geq \delta p$ [9] .

λ_0 را مقدار ویژه ماکسیمم مینامیم.

قضیه (۱.۱) (قضیه اول پرون-فروبینیوس)

هرگاه $M \gg 0$ ، و λ_0 بصورت بالا تعریف شود آنگاه

i. یک $\vec{x}^0 \gg \vec{0}$ وجود دارد به طوری که $M\vec{x}^0 = \lambda_0 \vec{x}^0$.

ii. هرگاه $\lambda \neq \lambda_0$ یک مقدار ویژه دیگر M باشد آنگاه $|\lambda| < \lambda_0$.

iii. بردارهای ویژه راست M با مقدار ویژه λ_0 یک زیر فضای یک بعدی ($\dim \mathfrak{M}_{\lambda_0} = 1$) تشکیل می‌دهند.

قضیه (۲.۱)

هرگاه $M > 0$ و به ازای اعداد صحیحی چون $n > 0$، $M^n \gg 0$ آنگاه قضیه فوق برقرار می‌باشد.

قضیه (۳.۱)

فرض کنیم ماتریس اکیدا" مثبت M، دارای بزرگترین مقدار ویژه ℓو بردارهای ویژه راست و چپ u و v، است. اگربردارها چنان نرمالایزشوند، که $(\vec{u}.\vec{v})=1$، $(\vec{u}.\vec{1})=1$آنگاه می‌توانیم بنویسیم:

$$M^{n}=\ell^{n}P+R^{(n)}$$

که Pماتریسی است که درایه‌های ijام آن برابر $v_j\ u_i$ است و داریم:

i. $PR=RP=0$.

ii. فرض کنیم $r_{ij}^{(n)}$ درایه ij ام ماتریس $R^{(n)}$ است، در این صورت $c<\infty$, $0<p_0<p$ هست که:

$$r_{ij}^{(n)}\leq cp_0^{n}$$

لم (۱-۱)

فرض کنیم P یک ماتریس اکیدا" مثبت، که بزرگترین مقدار ویژه آن ۱ و $\vec{v}$ و $\vec{u}$ بردارهای ویژه چپ و راست بزرگترین مقدار ویژه هستند که به صورت نرمال درآمده‌اند $(\vec{u}.\vec{v})=1$،$(\vec{u}.\vec{1})=1$.

در این صورت هر دنباله $\{A_n\}$ که $0\leq A_n\leq P$ یک دنباله از ماتریس‌ها تعریف می‌کند به صورت زیر:

$$B_n=\prod_{k=0}^{n}(P-A_k)$$

وبازاء هر $\vec{x}$ که یک بردار ثابت است به طوری که $\vec{x}\gg\vec{0}$ و برای هر $n\geq 1$، $B_n\vec{x}\neq\vec{0}$ در اینصورت داریم:

i. $\lim_{n\to\infty}A_n=0$ نتیجه می‌دهد که $\lim_{n\to\infty}\frac{B_n\vec{x}}{(\vec{v}(B_n\vec{x}))}=\vec{u}$، این همگرایی برای هر $B_n\vec{x}\neq\vec{0},\ \vec{x}\gg\vec{0}$ برقرار است.

ii. $\lim_{n\to\infty}B_n\vec{x}=\vec{x}_0$ همواره موجود است.

iii. $\vec{x}_0\neq\vec{0}$ اگر وفقط اگر $\sum A_k<\infty$.

اثبات لم در [6] درفصل ۵ موجود است.

قضیه (۴.۱)

هرگاه $M>0$، به ازای عدد صحیحی چون $n>0$,$M^{n}\geq 0$, λ و Pمثل قضیه (۱-۳) تعریف شده باشد آنگاه وقتی $n\to\infty$داریم:

$$\frac{1}{\lambda_0^n} M^n \to P$$

قضیه (۵.۱) قضیه دوم پرون-فروبینوس

فرض کنید $M > 0$ و λ_0 همانند قضیه(۱.۱)تعریف شده باشد، در این صورت:

i. λ_0 یک مقدار ویژه M، با بردار ویژه $\bar{x}^0 > \bar{0}$ است.

ii. هرگاه λ بردار ویژه دیگری از M باشد، آنگاه $|\lambda| \le \lambda_0$.

iii. $\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{M^i}{\lambda_0^i}$ در صورتی همگرا است که $\bar{x}^0 \gg \bar{0}$.

iv. هرگاه λ یک مقدار ویژه M بوده و $|\lambda| = \lambda_0$ آنگاه $\eta = \frac{\lambda}{\lambda_0}$ یک ریشه واحد است و $\eta^n \lambda_0$ به ازای $n = 0,1,2,...$ یک مقدار ویژه M می‌باشد.

قضیه (۶.۱)

هرگاه $M \ge B \ge 0$ آنگاه $\lambda_0(M) \ge \lambda_0(B)$.

اثبات تمام قضایای بخش (۱-۲)در ضمیمه کارلین $[3]$موجود است.

۱-۳) تعریف فرایندهای تصادفی

یک فرایند تصادفی $X = \{X(t),\ t \in T\}$ مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است که روی فضای احتمال مشترکی مانند S تعریف می‌شوند، یعنی به ازای هر t از مجموعه اندیس گذار T، $X(t)$ یک متغیر تصادفی روی S است. اغلب t را به زمان تعبیر می‌کنیم و $X(t)$ را حالت فرایند در زمان t می‌گوییم، بسته به اینکه مجموعه T شمارا باشد X فرایند زمان گسسته ویا اگر T متعلق به بازهٔ $(0,\infty)$ باشد آن را فرایند زمان پیوسته می‌گوییم.

۱-۳-۱) تعریف زنجیر مارکوف

فرایند تصادفی زمان گسسته $\{X_n,\ n \ge 0\}$ را که مجموعه مقادیر ممکن است متناهی یا نامتناهی شمارا باشد در نظر می‌گیریم. اگر توزیع شرطی این فرایند برای وضعیت‌های آینده، ازحالت‌های گذشته مستقل باشد و فقط بستگی به حالت فعلی داشته باشد، گوییم $\{X_n,\ n \ge 0\}$ یک زنجیر مارکوف است؛ به عبارت دیگر هرگاه به ازای هر n و مقادیر مفروض $i, j, i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}$ داشته باشیم:

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\}$$
$$= P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}.$$

در این عبارت احتمال $p_{ij}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$ را احتمال انتقال یک مرحله ای یا احتمال تغییر وضعیت می‌گوییم. حال اگر $p_{ij}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$ ، یعنی احتمال تغییر وضعیت مستقل از n باشد، گوییم زنجیر مارکوف مانا است و داریم:

$$p_{ij}\geq 0,\ \sum_{j=1} p_{ij}=1,\ i=0,1,2,\ \ldots$$

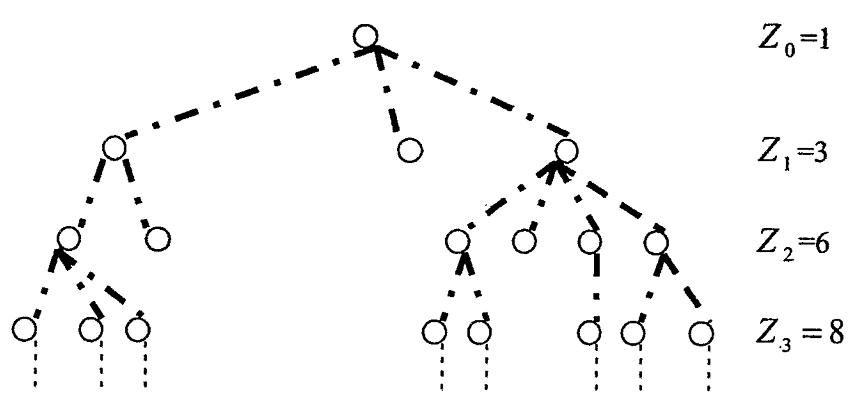
به همین قیاس برای هر $(i,j)\in S$، احتمالات انتقال nمرحله‌ای در زنجر مارکوف عبارتند از:

$$p_{ij}{}^{n}=P\{X_{n+m}=j|X_m=i\},n\geq 0$$

۱-۳-۲) فرایند گالتون-واتسون $(G-W)$

این فرایند می‌تواند نمایش باز شدن یک جمعیت به اجزایش باشد، در لحظه 0 با $Z_0=1$ آغاز می‌شود. هر فرد بعد از یک واحد زمان که طول عمر یک نسل است بطور مستقل از دیگر فرزندان به تعدادی تصادفی اولاد بر طبق قانون احتمالی $\{p_k\}$ منشعب می‌شود. افراد تولید شده، یعنی فرزندان Z_0 را نسل اول می‌نامیم وبا Z_1 نشان میدهیم. به همین ترتیب با مشخص شدن افراد نسل اول، هر یک، بطور مستقل و با قانون $\{p_k\}$نسل دوم را تولید می‌کنند که آنرا Z_2 می‌نامیم و فرایند ادامه می‌یابد. به طور کلی Z_n تعداد افراد در نسل nام است. فرایند $\{Z_n\}$ را فرایند گالتون - واتسون $(G-W)$ می‌نامیم که زمان گسسته و با فضای وضعیت $S=\{0,1,2,\ldots\}$ است.

شکل ۱-۱ ترسیمی از فرایند گالتون-واتسون $(G-W)$ است که نشان می‌دهد طول واحد زمان که طول عمر آفراد است، یکسان می‌باشد و هر فرد در پایان عمر خود فرزند یا فرزندانی تولید می‌کند یا اینکه نسلش منقرض می‌شود.



شکل ۱-۱

لازم به ذکر است اساس مطالعه در این پایان نامه بر پایه فرایند گالتون –واتسون می‌باشد، که درزیر به تعریف دقیق آن می‌پردازیم.

۱-۴) فرایند شاخه‌ای $(G-W)$

جامعه‌ای از باکتری‌ها را در نظر می‌گیریم که اعضای آن بتوانند فرزندانی از نوع خود را (طول عمر افراد یکسان فرض می‌شود.) تولید مثل کنند که تعداد تصادفی ξ نوزاد دارای توزیع $p_k = P\{\xi = k\}$ به ازای $k = 0,1,2,...$ است و هر یک از فرزندان مستقل از دیگران با همان توزیع احتمال، تولید مثل می‌کنند. این تولید مثل تا زمانی که فردی در جامعه وجود داشته باشد ادامه می‌یابد. فرض کنید $Z_0 = 1$ نسل صفرم و Z_n عده‌ی افراد در نسل nام باشد، در این صورت $\{Z_n\}$ را فرایند شاخه‌ای گالتون –واتسون می‌نامیم. به بیان دقیقتر اگر دنباله $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ از متغیر های تصادفی $i.i.d.$ روی اعداد صحیح نامنفی که دارای توزیع احتمال مشترک $\{p_k\}$باشند، وبرای هر n، Z_nرا چنین تعریف می‌کنیم:

$$Z_0 = 1, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i \qquad (n \geq 0) \qquad (۱-۱)$$

در این صورت $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک فرایند شاخه‌ای گالتون –واتسون $(G-W)$ است.

۱-۴-۱) خواص فرایند شاخه‌ای

فضای حالت این فرایند یعنی مقادیری که Z_n می گیرد برابر است با $S = \{0,1,2,...\}$ این فرایند یک فرایند مارکوف است که نتیجه‌ای از رابطه (۱-۱)، یعنی Z_{n+1} فقط به Z_n وابسته است و توزیع شرطی حالت آینده این فرایند، از حالت های گذشته مستقل بوده و فقط به حالت فعلی مربوط است.

فرایند شاخه‌ای یک زنجیر مارکوف است که حالت $\{0\}$ حالت جاذب است یعنی $Z_n = 0$ ایجاب می‌کند که به ازای هر $k > 0$:

$$Z_{n+k} = 0.$$

۱-۴-۲) تعریف

در یک فرایند شاخه‌ای $\{Z_n\}$که $Z_0 = 1$، تعریف می کنیم $E(Z_1) = m$، یعنی میانگین تعداد فرزندان هر فرد برابر mاست. $\sigma^2 = Var(Z_1)$ را واریانس عده افراد در نسل نخست می نامیم.

لم (۱-۲)

فرض کنید $\{Z_n\}$یک فرایند شاخه‌ای با میانگین m و واریانس σ^2متناهی باشد در اینصورت :

i. به ازای هر n ، $E(Z_n)=m^n$ یعنی افزایش متوسط عده‌ی فرزندان هندسی است.

ii. $E(Z_{n+k}|Z_n)=m^k Z_n$.

iii.
$$Var(Z_n)=\begin{cases}\sigma^2 m^{n-1}\dfrac{m^n-1}{m-1} & m\neq 1\\ n\sigma^2 & m=1\end{cases}$$

یعنی تغییرات واریانس وقتی $m\neq 1$، برای mهای بزرگ مجانبا" بصورت هندسی است و وقتی $m=1$، بصورت خطی است.

مرجع کارلین [3] فصل ۸

۱-۴-۳) تابع مولد احتمال برای فرایندهای شاخه‌ای

یکی از ابزارهای مهم واساسی، در تجزیه و تحلیل هر فرایند تصادفی، تابع مولد احتمال وابسته به آن است.

فرض کنیم Z_1 متغیر تصادفی عده افراد نسل یک از یک فرایند شاخه‌ای گالتون -واتسون با توزیع $\{p_i\}$ باشد، یعنی به ازای هر j، $P\{Z_1=j\}=p_i$، در این صورت تابع مولد احتمال وابسته به Z_1 عبارتست از :

$$f(s)=E(s^{Z_1})=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k,\quad s\in[0,1]$$

برای نسل nام، تابع مولد احتمال وابسته به Z_n چنین تعریف می‌شود:

$$f_n(s)=E(s^{Z_n})=\sum_{k=0}^{\infty}P(Z_n=k)s^k,\quad s\in[0,1]$$

واضح است که $f_0(s)=s,\ f_1(s)=f(s)$.

دنباله توابع $\{f_n(s)\}_0^{\infty}$ دربازه $0\le s\le 1$ تعریف می‌شوند.

مضافا" اینکه $f'(1)=m$ که m متوسط تعداد فرزندان در هر خانواده است .

۱-۱) تعریف

اگر $m=1$، فرایند را بحرانی و در حالتهای $m>1$ و $m<1$ به ترتیب فرایند را زیربحرانی و زیربحرانی می‌نامیم.

لم (۱-۳)

اگر $f_n(s)$ تابع مولد احتمال Z_n در فرایند شاخه ای $\{Z_n\}$ باشد، فرض می‌کنیم $f_0(s)=s$، در این صورت به ازای هر n داریم:

i. $f_{n+1}(s)=f_n(f(s))$

ii. $f_{n+1}(s)=f(f_n(s))$

مرجع کارلین $[3]$ فصل ۸

لم (۱-۴)

فرض کنیم ε_iها $i=1,\dots,n$ متغیرهای تصادفی و مستقل وهم توزیع باشند، $Y=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$ وفرض کنیم $f_Y(s)$ تابع مولد Y و $f_{\varepsilon_i}(s)$ تابع مولد ε_i، $i=1,\dots,n$ باشد در این صورت :

$$f_Y(s)=\prod_{i=1}^{n} f_{\varepsilon_i}(s)$$

$$f_Y(s)=\left[f_{\varepsilon_1}(s)\right]^n$$

مرجع کارلین $[3]$ فصل ۸

لم (۱-۵)

تابع مولد احتمال $f(s)$ بر بازه $[0,a]$ که $a\geq 1$، اکیداً صعودی بوده و از هرمرتبه‌ای مشتق پذیر است.

مرجع کارلین $[3]$ فصل ۸

لم (۱-۶)

فرض کنید $p_0+p_1<1$ و $\{p_k\}$ توزیع عده‌ی فرزندان در فرایند شاخه‌ای است. در این صورت برای $0\leq s\leq 1$ تابع مولد $f(s)$ تابعی اکیداً محدب است.

مرجع کارلین $[3]$ فصل ۸

۱-۵) احتمالات انقراض

۱-۵-۱) تعریف

هرگاه در فرایند شاخه‌ای $\{Z_n\}$، در نسل nام افرادی نباشند که تولید مثل کنند آنگاه نسل $n+1$ام منقرض می‌شود. احتمال رخ دادن چنین حا لتی یعنی $q_{n+1}=P(Z_{n+1}=0)$ را احتمال انقراض در نسل $n+1$ام می‌نامند، بنابراین

$$P(Z_n=0)=f_n(0)=q_n$$

لم (۱-۷)

فرض کنید q_n احتمال انقراض نسل nام در یک فرایند شاخه‌ای باشد، در این صورت همواره برای توابع مولد احتمال f داریم: