دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

قضایای نقطه ثابت و ارگودیک غیرخطی برای نگاشت های هیبرید تعمیم یافته در یک فضای هیلبرت

استاد راهنما

دکتر اسماعیل نظری

نگارش

سید حمیدرضا حیدری

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر اسماعیل نظری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را.

تقدیم

به آنان که
سپید لوح ضمیرشان دمادم
روشنی بخش نهالستان معرفت است
زورق هستی شان پایدار، رهسپار کرانه های شکفتن امید،

و ما تنها نظارگانی...

چکیده

در این پایان نامه به بررسی قضایای نقطه ثابت و قضایای ارگودیک غیر خطی برای نگاشت های هیبرید تعمیم یافته در فضای هیلبرت پرداخته شده است، همچنین در ادامه این مباحث در فضای باناخ بررسی شده و به معرفی قضایای همگرایی ضعیف در فضای باناخ پرداخته شده است.

کلید واژه : نقطه ثابت، غیر انبساطی، هیبرید تعمیم یافته، فضای هیلبرت، فضای باناخ، ارگودیک.

فهرست مطالب

پیش گفتار

در این پایان نامه، در فصل اول ابتدا مقدمات و تعاریف مورد نیاز در پایان نامه آورده شده است، تعریف چند فضای مورد بحث در این پایان نامه و همچنین چند نگاشت در فضای هیلبرت و باناخ از جمله نگاشت های هیبرید، غیر انبساطی، تعمیم یافته ی غیر پوشــشی و n-تعمیم یافته ی غیر پوشــشی معرفی شده است. در سال ۲۰۱۰ کوکرک[۱] ، تاکاهاشی [۲]، یائو [۳] [۵] دسته ی نگاشت های غیر خطی که شامل دسته ی نگاشت های غیر انبساطی، غیر پوششی و هیبرید در فضای هیلبرت می شود را ارائه کردند.

در ادامه ی پایان نامه چند لم برای قضایای غیر خطی برای نگاشتهای غیر انبساطی و هیبرید تعمیم یافته در فضای هیلبرت آورده شده است، همچنین این لم ها و قضایا بعد از چند قضیه ی نقطه ثابت برای نگاشت های هیبرید تعمیم یافته و غیر پوششی و معرفی چند خاصیت نگاشت های تعمیم یافته ی غیر خطی غیر پوششی در فضای باناخ آورده شده است.

---

[۱] Kocourek

[۲] Takahashi

[۳] Yao

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۰.۱. (فضای هیلبرت) فرض کنیم X فضای داخلی روی میدان مختلط C باشد. یک ضرب داخلی روی X تابعی است مانند $\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow C$ که دارای شرایط زیر است:

$a)\langle x,x\rangle \geq 0 \;\; \forall\, x \in X \; and \; \langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$

$b)\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

$c)\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle \;\; \forall\, x,y,z \in X \;,\; \alpha,\beta \in C$

در اینصورت زوج مرتب $(X, \langle .,. \rangle)$ فضای ضرب داخلی نامیده می شود.

مثال ۱.۰.۱. قرار دهید $X = R^n$ و تابع ضرب داخلی را بصورت زیر تعریف کنید:

$\langle .,. \rangle : R^n \times R^n \longrightarrow R$

$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \;\; \forall\, x = (x_1, ..., x_n) \in R^n \;,\; y = (y_1, ..., y_n) \in R^n$

در اینصورت R^n با این ضرب داخلی تعریف شده، فضای n-بعدی اقلیدسی نامیده می شود.

تعریف ۲.۰.۱. فرض کنیم E یک فضای باناخ حقیقی و J نگاشت دوگان E باشد. همچنین فرض کنیم C زیر مجموعه ی نا تهی، بسته و محدب از E باشد. نگاشت $T : C \longrightarrow C$ را یک نگاشت غیرپوششی گوییم هر گاه به ازای هر $x,y \in C$ داشته باشیم:

$$\phi(Tx,Ty) + \phi(Ty,Tx) \leq \phi(x,Ty) + \phi(y,Tx)$$

که برای هر $x,y \in E$، ϕ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2.$$

تعریف ۳.۰.۱. (حد باناخ) l_∞ را به عنوان فضای باناخ دنباله های کراندار با نرم سوپریمم μ در نظر می گیریم. یک عنصر در l_∞^* (فضای دوگان l_∞) در نظر می گیریم، در این صورت $\mu(f)$ را مقدار μ در $f = (x_1, x_2, \ldots) \in l_\infty$ می گوئیم، که گاهی بصورت $\mu_n(f_n)$ نیز نوشته می شود. نگاشت خطی μ روی l_∞ یک میانگین خوانده می شود هر گاه:

$$\mu(e) = \|\mu\| = ۱$$

جایی که $e = (۱, ۱, \ldots)$. این نگاشت، حد باناخ روی l_∞ نامیده می شود هر گاه:

$$\mu_n(x_{n+۱}) = \mu_n(x_n)$$

تعریف ۴.۰.۱. (مشتق پذیر گاتکس [1]و فرشه [2] و فضای هموار) فرض کنیم E فضای باناخ باشد، قرار دهید:

$$U = \{x \in E : \|x\| = ۱\}$$

در این صورت نرم E مشتق پذیر گاتکس نامیده می شود هرگاه برای هر $x, y \in U$ حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{t \to ۰} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

همچنین نرم E مشتق پذیر فرشه است هر گاه به ازای هر$x \in U$ حد فوق به ازای $y \in U$ بطور یکنواخت همگرا باشد. در این حالت E هموار نامیده می شود.

مثال ۲.۰.۱. فضای $l_۲$ باناخ هموار است، چون با تعریف نگاشت jx بصورت زیر داریم:

$$l_۲ = \{\{x_i\} : \sup_{۱ \leq i < \infty} |x_i| < ۲\}$$
$$jx : X \longrightarrow F$$
$$jx = \frac{x}{\|x\|}$$

بنابراین $\langle x, jx \rangle = \|x\|\|j\| = \|x\|$، چون $\|j\| = ۱$.

تعریف ۵.۰.۱. (تحدب یکنواخت و اکید فضای باناخ) ویژگی اساسی نرم فضاهای باناخ مانند X این است که همیشه محدب هستند، یک فضای باناخ X بطور اکید محدب نامیده می شود اگر برای همه $\lambda \in (۰, ۱)$، $x, y \in S_x$ وجود داشته باشد بطوریکه:

---

[1] Gteuax differentiable

[2] Frchet differentiable

$$x \neq y \Longrightarrow \|(1-\lambda)x+\lambda y\| < 1$$

جایی که $S_x = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

این نشان می دهد که نقطه میانه $\frac{x+y}{2}$ که بین دو نقطه جدا از هم در S_x فضای باناخ X هستند روی S_x واقع نمی باشد. بعبارت دیگر اگر $x, y \in S_x$ و $\|\frac{x+y}{2}\| = \|y\| = \|x\|$ ، در این صورت $x = y$.

مثال ۱.۰.۳. در نظر می گیریم $X = R^n$ و $n \geq 2$ با نرم $\|x\|_2$ تعریف شده با

$$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad x = (x_1, x_2, ...) \in R^n$$

در این صورت X اکیدا محدب است.

مثال ۱.۰.۴. در نظر می گیریم $X = R^n$ و $n \geq 2$ با نرم $\|.\|_\infty$ تعریف شده با

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad , \quad x = (x_1, x_2, ...) \in R^n$$

در اینصورت X اکیدا محدب نیست، مثلا

$$x = (1, 0, 0, 0, ..., 0) \quad , \quad y = (1, 1, 0, 0, ..., 0) \quad , \quad x, y \in R^n$$

$\|x\|_\infty = 1 = \|y\|_\infty$ ، در حالیکه $\|x+y\|_\infty = 2$.

تعریف ۱.۰.۶. فضای باناخ X بطور یکنواخت محدب نامیده می شود اگر به ازای هر ε که $2 \geq \varepsilon > 0$ ، نامساوی های $\|x\| \leq 1$ و $\|y\| \leq 1$ و $\|x-y\| \geq \varepsilon$ نتیجه دهند یک $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ وجود دارد بطوریکه

$$\|\frac{(x+y)}{2}\| \leq 1 - \delta$$

این می گوید اگر x و y در گوی بسته یکه ی $B_x = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ باشد و $\|x-y\| \geq \varepsilon > 0$، در اینصورت نقطه میانگین x و y داخل گوی یکه ی B_x می افتد که فاصله ی آن حداقل به اندازه δ از دایره ی یکه ی S_x می باشد.

مثال ۱.۰.۵. هر فضای هیلبرت H، فضای بطور یکنواخت محدب است. در واقع طبق قانون متوازی الاضلاع برای همه $x, y \in H$ داریم:

$$\|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2) - \|x-y\|^2$$

حال با فرض $x, y \in B_x$ و $x \neq y$ و $\|x-y\| \geq \varepsilon$ داریم:

$$\|x+y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

که نتیجه می دهد:

$$\|\frac{(x+y)}{2}\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

جایی که $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$، بنابراین H بطور یکنواخت محدب است.

مثال ۶.۰.۱. فضاهای l_1 و l_∞ بطور یکنواخت محدب نیستند، چون اگر $x = (1, 0, 0, ..., 0)$ و $y = (0, -1, 0, 0, ...)$ که $x, y \in l_1$ بگیریم و $\varepsilon = 1$ فرض کنیم آنگاه داریم:

$$\|x\|_1 = 1\ ,\ \|y\|_1 = 1\ ,\ \|x-y\|_1 = 2 > 1 = \varepsilon$$

هرچند $\|\frac{(x+y)}{2}\|_1 = 1$ و هیچ $\delta > 0$ وجود ندارد که

$$\|\frac{(x+y)}{2}\|_1 \leq 1 - \delta$$

بنابراین l_1 بطور یکنواخت محدب نیست.

بطور مشابه اگر در نظر بگیریم $x = (1, 1, 1, 0, 0, ...)$ و $y = (1, 1, -1, 0, 0, ...)$ که $x, y \in l_\infty$ و $\varepsilon = 1$ فرض می شود، آنگاه داریم:

$$\|x\|_\infty = 1\ ,\ \|y\|_\infty = 1\ ,\ \|x-y\|_\infty = 2 > 1 = \varepsilon$$

و چون $\|\frac{(x+y)}{2}\|_\infty = 1$، لذا l_∞ هم بطور یکنواخت محدب نیست.

می توان نشان داد هر فضای باناخ بطور یکنواخت محدب، اکیدا محدب است. این مسأله با توجه به تعریف فضای یکنواخت محدب مشخص می شود.

تعریف ۷.۰.۱. (فضای بازتابی) فضای نرمدار X بازتابی نامیده می شود هرگاه نگاشت جادهی طبیعی $\varphi : X \longrightarrow X^{**}$ پوشا باشد. در مورد فضاهای بازتابی یا انعکاسی می توان به نکات زیر اشاره کرد:

- R^n انعکاسی است،(هر فضای باناخ با بعد متناهی انعکاسی است).
- l_p و L_p برای $1 < p < \infty$ فضاهای باناخ انعکاسی هستند.
- هرفضای هیلبرت انعکاسی است چون $H^{**} = H$.
- l_1 و l_∞ و L_1 و L_∞غیر انعکاسی هستند.
- زیر فضای بسته ی فضای باناخ انعکاسی، خود انعکاسی است.
- دوگان فضای باناخ انعکاسی، انعکاسی است.

در مورد فضای انعکاسی X، معمولا نوشته می شود $X \cong X^{**}$ یا $X = X^{**}$.

تعریف ۸.۰.۱. (تعریف همگرایی ضعیف) دنباله $\{x_n\}$در فضای نرمدار X همگرای ضعیف به $x \in X$ نامیده می شود هرگاه برای همه $f \in X^*$، $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ باشد. در این حالت می نویسیم $x_n \rightharpoonup x$ یا $weak - \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

تعریف ۹.۰.۱. فرض کنید H یک فضای ضرب داخلی باشد. هرگاه H با نرم تولید شده توسط ضرب داخلی یک فضای تام(کامل) باشد، در این صورت H را یک فضای هیلبرت می نامیم.

مثال ۷.۰.۱. اگر (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد، آنگاه $L^2(X)$ یک فضای هیلبرت است، بطور مشابه l^2 نیز فضای هیلبرت است به همین ترتیب R^n ها.

تعریف ۱۰.۰.۱. فرض کنیم H فضای هیلبرت حقیقی باشد و C زیر مجموعه ناتهی از H باشد، در این صورت نگاشت $T : C \longrightarrow H$ غیرانبساطی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم:

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

در سال ۱۹۷۵ بایلون[3] اولین قضیه ی ارگودیک غیر خطی را در یک فضای هیلبرت ثابت کرد :

[3] Baillon

قضیه ۱.۰.۱۰. فرض کنید C زیر مجموعه ی نا تهی، بسته، کراندار و محدب از فضای هیلبرت H باشد و T یک نگاشت غیر انبساطی از C بتوی خودش باشد. دنباله ی $\{b_n\}$ در C به ازای هر $n \in N$ بصورت زیر تعریف می شود :

$$x_۱ \in C \ , \ x_{n+۱} = Tx_n \ , \ b_n = \frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n} x_k.$$

در این صورت دنباله ی $\{b_n\}$ به یک نقطه ی ثابت از T همگرای ضعیف است.

اثبات. [۱] $\square$

تعریف ۱.۰.۱۱. نگاشت $F : C \longrightarrow H$ نگاشت غیرانبساطی قوی نامیده می شود اگر برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم:

$$\|Fx - Fy\|^۲ \leq \langle x - y, Fx - Fy\rangle$$

مشخص است که از نگاشت غیرانبساطی قوی می توان نگاشت غیر انبساطی را نتیجه گرفت، با توجه به خواص نرم و ضرب داخلی داریم:

$$\|Fx - Fy\|^۲ \leq \langle x - y, Fx - Fy\rangle \leq \|x - y\|\|Fx - Fy\|$$

بنابراین به ازای هر $x, y \in C$

$$\|Fx - Fy\| \leq \|x - y\|$$

مثال ۱.۰.۸. فرض کنیم $X = R$ و $C = R^+$ زیر مجموعه ی غیر تهی آن باشد. نگاشت $T : C \longrightarrow X$ را برای هر $x \in C$ بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$Tx = \frac{۱}{۱ + x}$$

در این صورت T غیر انبساطی است، چون:

$$\begin{aligned}\|\frac{۱}{۱+x} - \frac{۱}{۱+y}\| &= \|\frac{۱ + y - ۱ - x}{(۱ + x)(۱ + y)}\| \\ &= \|\frac{y - x}{(۱ + x)(۱ + y)}\| \\ &\leq \|x - y\|\end{aligned}$$

نامساوی آخر به این دلیل است که $0 < (1+x)(1+y)$ و در نتیجه $\frac{y-x}{(1+x)(1+y)} < y-x$ پس به ازای هر $x, y \in C$، غیر انبساطی است.

تعریف ۱.۰.۱۲. نگاشت $T : C \longrightarrow H$ ، نگاشت غیر پوششی نامیده می شود اگر به ازای همه ی $x, y \in C$ داشته باشیم:

$$2\|Tx - Ty\|^2 \leq \|Tx - y\|^2 + \|Ty - x\|^2$$

نگاشت $T : C \longrightarrow H$ نگاشت هیبرید نامیده می شود هرگاه به ازای همه ی $x, y \in C$ داشته باشیم :

$$3\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|Tx - y\|^2 + \|Ty - x\|^2$$

گزاره ۱.۰.۱. برای فضای حقیقی هیلبرت H و $x, y \in H$ و $\lambda \in R$ تساوی زیر بر قرار است:

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \tag{1.1}$$

اثبات. طبق تعاریف گفته شده داریم:

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 &= \langle \lambda x + (1-\lambda)y, \lambda x + (1-\lambda)y\rangle \\ &= \lambda^2\|x\|^2 + \lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle + \lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2 \\ &= \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2 \qquad \text{(I)}\end{aligned}$$

حال اگر سمت راست تساوی اول را بنویسیم و به جای $\|x-y\|^2$، با توجه به خواص ضرب داخلی و نرم قرار دهیم $\langle x-y, x-y\rangle = \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle$ و پس از فاکتور گرفتن از مقادیر مشابه، به (I) می رسیم. پس با ساده کردن دو طرف به یک مقدار مساوی رسیدیم که اثبات را تمام می کند. □

گزاره ۱.۰.۲. برای $x, y, w \in H$ تساوی زیر بر قرار می باشد:

$$\langle (x-y) + (x-w), y-w\rangle = \|x-w\|^2 = \|x-y\|^2 \tag{1.2}$$

اثبات. در واقع با توجه به خواص ضرب داخلی و نرم داریم:

$$\begin{aligned}\langle (x-y)+(x-w), y-w\rangle &= \langle (x-y)+(x-w), (y-x)+(x-w)\rangle \\ &= \|x-w\|^{۲} - \|x-y\|^{۲} + \langle x-y, x-w\rangle + \langle x-w, y-x\rangle \\ &= \|x-w\|^{۲} - \|x-y\|^{۲}.\end{aligned}$$

□

تعریف ۱.۰.۱۳. (متریک پروجکشن) فرض کنیم D زیر مجموعه ی بسته ی محدب H باشد. به ازای هر $x \in H$ یک نقطه واحد در D وجود دارد که با $P_D x$ نشان می دهیم بطوری که برای هر $y \in D$:

$$\|x - P_D x\| \leq \|x - y\|$$

نگاشت P_D نگاشت متریک پروجکشن برای H بر روی D خوانده می شود. نگاشت P_D یک نگاشت غیرانبساطی قوی می باشد و برای آن به ازای هر $x \in H$ و $y \in D$ تساوی های زیر بر قرارند:

(i) $۰ \leq \langle x - P_D x, P_D x - y\rangle$

(ii) $\|x - P_D x\|^{۲} + \|P_D x - y\|^{۲} \leq \|x - y\|^{۲}$

برای اثبات این روابط به [۲, ۳, ۴] مراجعه شود.

تعریف ۱.۰.۱۴. برای زیر مجموعه نا تهی مانند C از H و یک نگاشت T از C به H، $F(T)$ را مجموعه ی همه نقاط ثابت T و $A(T)$ را مجموعه ی همه ی نقاط جاذب T در نظر می گیریم:

(i) $F(T) = \{x \in C : x = Tx\}$

(ii) $A(T) = \{x \in H : \|Ty - x\| \leq \|y - x\| \ ; \ \forall y \in C\}$

در سال ۲۰۱۰، کوکرک [۴]، تاکاهاشی [۵] و یائو [۶][۵] دسته نگاشت های غیر خطی که شامل دسته نگاشتهای غیر انبساطی، غیر پوششی و هیبرید در فضای هیلبرت می شد را ارائه کردند.

---

[۴]Kocourek

[۵]Takahashi

[۶]Yao

تعریف ۱.۰.۱۵. در نظر می گیریم C زیر مجموعه ناتهی فضای هیلبرت حقیقی H باشد و نگاشت T را از C به خودش در نظر می گیریم. نگاشت T، هیبرید تعمیم یافته نامیده می شود اگر $\alpha, \beta \in R$ موجود باشند بطوری که برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم:

$$\alpha\|Tx - Ty\|^۲ + (۱ - \alpha)\|x - Ty\|^۲ \leq \beta\|Tx - y\|^۲ + (۱ - \beta)\|x - y\|^۲ \qquad (۱.۳)$$

گزاره ۱.۰.۳. تساوی زیر برای $x, y, u, v \in H$ برقرار است :

$$۲\langle x - y, u - v\rangle = \|x - v\|^۲ + \|y - u\|^۲ - \|x - u\|^۲ - \|y - v\|^۲$$

حال با توجه به رابطه فوق داریم :

$$\begin{aligned}\|x - y + u - v\|^۲ &= \|x - y\|^۲ + \|u - v\|^۲ + ۲\langle x - y, u - v\rangle \\ &= \|x - y\|^۲ + \|u - v\|^۲ + \|x - v\|^۲ + \|y - u\|^۲ - \|x - u\|^۲ - \|y - v\|^۲.\end{aligned}$$

اثبات. مراجعه شود به [۶]. □

تعریف ۱.۰.۱۶. اگر C را زیر مجموعه ی نا تهی بسته ی محدب H و T را نگاشتی از C به خودش در نظر بگیریم، آنگاه در صورتی که $F(t) \neq \emptyset$ باشد، نگاشت T ،شبه غیر انبساطی نامیده می شود اگر برای هر $x \in F(T)$ و $y \in C$، $\|x - Ty\| \leq \|x - y\|$ برقرار باشد.

گزاره ۱.۰.۴. واضح است که مجموعه $F(T)$ برای نگاشت شبه غیر انبساطی T بسته و محدب است.

اثبات. برای اثبات این که $F(T)$ بسته است دنباله ی $\{z_n\} \subseteq F(T)$ که $z_n \longrightarrow z$ را در نظر می گیریم. از آنجایی که C، بسته است لذا داریم $z \in C$. بعلاوه داریم:

$$\|z - Tz\| \leq \|z - z_n\| + \|z_n - Tz\| \leq ۲\|z - z_n\| \longrightarrow ۰$$

که این نشان می دهد z یک نقطه ثابت T است و بنابراین $F(T)$ بسته است.

حال نشان می دهیم که $F(T)$ محدب است. برای $x, y \in F(T)$ و $\alpha \in [۰, ۱]$، قرار دهید $z = \alpha x + (۱ - \alpha)y$، بنابراین با توجه به (۱.۱) داریم:

$$\begin{aligned}\|z-Tz\|^{2} &= \|\alpha x+(1-\alpha)\|y-Tz\|^{2}\\ &= \alpha\|x-Tz\|^{2}+(1-\alpha)\|y-Tz\|^{2}-\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^{2}\\ &\leq \alpha\|x-z\|^{2}+(1-\alpha)\|y-z\|^{2}-\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^{2}\\ &= \alpha(1-\alpha)^{2}\|x-y\|^{2}+(1-\alpha)\alpha^{2}\|x-y\|^{2}-\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^{2}\\ &= \alpha(1-\alpha)(1-\alpha+\alpha-1)\|x-y\|^{2}=0\end{aligned}$$

که این نشان می دهد $Tz=z$ بنابراین $F(T)$ محدب است. □

گفته شد قبلاً نگاشت $T:C\longrightarrow C$ نگاشت تعمیم یافته هیبرید نامیده می شود اگر $\alpha,\beta\in R$ موجود باشند بطوری که برای همه ی $x,y\in C$ داشته باشیم:

$$\alpha\|Tx-Ty\|^{2}+(1-\alpha)\|x-Ty\|^{2}\leq\beta\|Tx-y\|^{2}+(1-\beta)\|x-y\|^{2}$$

حال این چنین نگاشتی را(α,β) -تعمیم یافته هیبرید می گوئیم، مشاهده می شود که این نگاشت چندین نگاشت معروف دیگر را پوشش می دهد. برای مثال یک نگاشت (α,β) -تعمیم یافته هیبرید، برای $\alpha=1$ و $\beta=0$ غیرانبساطی است و برای $\alpha=2$ و $\beta=1$ غیر پوششی است و همچنین به ازای $\alpha=\frac{3}{2}$ و $\beta=\frac{1}{2}$ یک نگاشت هیبرید است. همچنین اگر $x=Tx$ باشد آنگاه برای هر $y\in C$ داریم:

$$\alpha\|x-Ty\|^{2}+(1-\alpha)\|x-Ty\|^{2}\leq\beta\|x-y\|^{2}+(1-\beta)\|x-y\|^{2}$$

و بنابراین

$$\|x-Ty\|\leq\|x-y\|$$

که این نشان می دهد یک نگاشت (α,β) -تعمیم یافته هیبرید با یک نقطه ثابت یک نگاشت شبه غیر انبساطی است.

تعریف ۱.۰.۱۷. اگر C را زیر مجموعه نا تهی بسته ی محدب از فضای هیلبرت H در نظر بگیریم، آنگاه نگاشت $S:C\longrightarrow C$، نگاشت ابر هیبرید نامیده می شود اگر $\alpha,\beta,\gamma\in R$ که $\gamma\geq 0$ وجود داشته باشند، بطوری که برای همه ی $x,y\in C$ داشته باشیم:

$$\alpha\|Sx-Sy\|^{۲}+(۱-\alpha+\gamma)\|x-Sy\|^{۲} \leq (\beta+(\beta-\alpha)\gamma)\|Sx-y\|^{۲}+(۱-\beta-(\beta-\alpha-۱)\gamma)\|x-y\|^{۲}$$
$$+(\alpha-\beta)\gamma\|x-Sx\|^{۲}+\gamma\|y-Sy\|^{۲}$$

این چنین نگاشتی را یک نگاشت (α,β,γ)- ابر هیبرید می نامیم. توجه کنید که یک نگاشت (α,β,γ)- ابر هیبرید می تواند یک نگاشت (α,β) -تعمیم یافته هیبرید باشد، بنابراین کلاسی یا دسته ی نگاشتهای ابر هیبرید شامل کلاس نگاشتهای هیبرید تعمیم یافته می شود.

کوکرک، تاکاهاشی و یائو[۷] کلاس نگاشتهای هیبرید تعمیم یافته را از فضای هیلبرت بر فضاهای باناخ توسیع دادند.

تعریف ۱.۰.۱۸. فرض کنید E یک فضای باناخ هموار باشد و C را یک زیر مجموعه نا تهی بسته ی محدب از E در نظر می گیریم، در این صورت یک نگاشت $T : C \longrightarrow C$ نگاشت غیر پوششی تعمیم یافته نامیده می شود هر گاه $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in R$ موجود باشند به گونه ای که به ازای هر $x,y \in C$

$$\alpha\phi(Tx,Ty)+(۱-\alpha)\phi(x,Ty)+\gamma\{\phi(Ty,Tx)-\phi(Ty,x)\} \leq \beta\phi(Tx,y)+(۱-\beta)\phi(x,y)$$
$$+\delta\{\phi(y,Tx)-\phi(y,x)\}$$

که ϕ نگاشت غیر پوششی تعریف شده در بخش فضاهای باناخ است.

به تازگی مارویاما [۷]، تاکاهاشی و یائو [۸] کلاس جدیدی از نگاشت های غیر خطی را ارائه کردند که شامل کلاس نگاشت های هیبرید تعمیم یافته در فضای هیلبرت می شود.

تعریف ۱.۰.۱۹. نگاشت $T : C \longrightarrow C$، نگاشت هیبرید تعمیم یافته ۲ خوانده می شود هر گاه $\alpha_۱,\alpha_۲,\beta_۱,\beta_۲ \in R$ موجود باشند به گونه ای که برای هر $x,y \in C$ داشته باشیم:

$$\alpha_۱\|T^{۲}x-Ty\|^{۲}+\alpha_۲\|Tx-Ty\|^{۲}+(۱-\alpha_۱-\alpha_۲)\|x-Ty\|^{۲}$$
$$\leq \beta_۱\|T^{۲}x-y\|^{۲}+\beta_۲\|Tx-y\|^{۲}+(۱-\beta_۱-\beta_۲)\|x-y\|^{۲}.$$

[۷] Maruyama

تعریف ۱.۰.۲۰. نگاشت $T: C \longrightarrow C$ در فضای هموار باناخ E که C زیر مجموعه ی ناتهی آن است، نگاشت غیر انبساطی تعمیم یافته نامیده می شود هرگاه $F(T) \neq \emptyset$ و برای هر $x \in C$ و $y \in F(T)$ داشته باشیم:

$$\phi(Tx, y) \leq \phi(x, y)$$

تعریف نگاشت فوق در [۹] آمده است.

تعریف ۱.۰.۲۱. فرض کنید D زیر مجموعه ی نا تهی از فضای باناخ E باشد. نگاشت $R: E \longrightarrow D$ نگاشت سانی نامیده می شود اگر برای هر $x \in E$ و $t \geq 0$ داشته باشیم:

$$R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$$

همچنین نگاشت $R: E \longrightarrow D$ نگاشت درون بری یا تصویری نامیده می شود اگر برای همه ی $x \in D$ ، داشته باشیم $Rx = x$. یک زیر مجموعه نا تهی D از فضای هموار باناخ E، غیرانبساطی تعمیم یافته درون بر برای E نامیده می شود اگر یک درون بری غیر انبساطی تعمیم یافته برای R از E به D موجود باشد ؛ برای جزئیات بیشتر در این مورد به [۹] رجوع شود.

تعریف ۱.۰.۲۲. فرض کنید E فضای باناخ هموار و C را زیر مجموعه ی بسته ی محدب از E در نظر بگیرید و $n \in N$ فرض کنیم. در این صورت نگاشت $T : C \longrightarrow C$ نگاشت غیر پوششی تعمیم یافته n ام نامیده می شود هرگاه $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in R$ موجود باشند بطوری که برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi(T^{n+1-k}x, Ty) + (1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k)\phi(x, Ty) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\{\phi(Ty, T^{n+1-k}x) - \phi(Ty, x)\} \\
&\qquad \leq \sum_{k=1}^{n} \beta_k \phi(T^{n+1-k}, y) + (1 - \sum_{k=1}^{n} \beta_k)\phi(x, y) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k\{\phi(y, T^{n+1-k}x)\phi(y, x)\}
\end{aligned}$$

چنین نگاشتی را $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ - غیر پوششی تعمیم یافته می نامند. برای مثال یک نگاشت $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2)$ - غیر پوششی تعمیم یافته مانند نمونه زیر است:

$$\alpha_1\phi(T^2x, Ty) + \alpha_2\phi(Tx, Ty) + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\phi(x, Ty) + \gamma_1\{\phi(Ty, T^2x) - \phi(Ty, x)\} +$$