بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

رساله ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجه دکتری
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

بررسی خواص گراف های وابسته به ساختار های جبری

استاد راهنما

دکتر کاظم خشیارمنش

استاد مشاور

دکتر سعید اکبری

نگارنده

احسان استاجی

بسمه تعالی

مشخصات رساله تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان بررسی خواص گراف های وابسته به ساختار های جبری

نام نویسنده احسان استاجی

استاد راهنما دکتر کاظم خشیارمنش

استاد مشاور دکتر سعید اکبری

دانشکده علوم ریاضی **گروه** ریاضی محض **رشته تحصیلی** ریاضی محض

تاریخ تصویب ۱۳۸۹/۰۴/۲۰ **تاریخ دفاع** ۱۳۹۱/۰۱/۲۲

مقطع تحصیلی دکتری **تعداد صفحات** ۵۹

چکیده رساله هدف این رساله بررسی گراف های نسبت داده شده به برخی ساختارهای جبری می باشد. در این رساله گراف های مقسوم علیه صفر و یکانی مورد توجه قرار گرفته اند. درباره گراف مقسوم علیه صفر، این مفهوم را برای ساختار مشبکه ها و در بخشی دیگر به مدول ها تعمیم داده ایم. در پایان، گراف یکانی حلقه غیر جابجایی R مورد مطالعه قرار گرفته است.

واژگان کلیدی مشبکه، مقسوم علیه صفر، اتم، عدد خوشه ای، گراف مقسوم علیه صفر، مدول، گراف یکانی، عدد رنگی، رادیکال جیکوبسن.

امضای استاد راهنما **تاریخ**

اظهارنامه

عنوان رساله : بررسی خواص گراف های وابسته به ساختار های جبری

اینجانب احسان استاجی دانشجوی دوره دکتری دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده رساله تحت راهنمایی دکتر کاظم خشیارمنش متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام ''دانشگاه فردوسی مشهد'' و یا ''Ferdowsi University of Mashhad'' به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ
امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- **کلیه حقوق این اثر و محصولات آن(مقالات مستخرج، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است. این مطلب بایستی به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.**
- **استفاده از اطلاعات و نتایج این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نیست.**

تقدیم به

همسر عزیزم

هوالعلیم

زیباترین نام را بر زبان جاری می کنم ... که هر کس زبان به حمد تو گشود بی‌تردید نگاه تو بر او افتاده. پس بر قلبم آن جاری کن که خود می‌پسندی در ثنایت لب گشایم.
در وادی معرفت نگنجد، سرچشمه هدایت نجوشد، سر بر قامت بندگی فرو نیافتد ...، گر گنجینه‌ای را که مقدسش خواندی و به آن قسم یاد کردی، کوچک شمرده شود و تنها خاطره جوهر خشک شده‌ای از آن بر برگ برگِ صفحات زندگی باقی ماند.
تو علم را روشنیِ قرار دادی و فانوسی در بیغوله راه که مسیر را، راه نماید و تزکیه را مقدم بر آن دانستی تا نگاهبانش باشد که تزکیه و تعلیم در معیت هم گوهر وجودی انسان را به نور تو منور کند، پرده از واقعیات کنار زند. آن جاست که حقیقت رخ نمایاند، نظر فراتر افتد، خوان گنجینه‌های دانش رنگین شود و ... آری آنجاست که آدمی معنا یابد.
من اگر وعده‌هایم با تو زیر خروارها تل فراموشی و غفلت مدفون گردیده، اگر زشتی طغیان در نظرم زیبا جلوه‌گری می‌کند و چشمانم خشک‌تر از آن است که در مقام توبه اشکی بر آن جاری شود، بدان از سر جهل است و نسیان...اما بار الها چشمِ طمع بر رحمتت دوخته‌ام و در تمنای رهایی از ظلمت ضلالت، ترنم باران معرفتت را می‌طلبم، امید آنکه جوانه‌های حقیقت را در وجودم برویاند و انعکاس آن چشمانم را روشن کند.
اکنون چهره بر چهره خاک می‌سایم و تو را به حبیبت قسم می‌دهم که..." هر آن خصلت ناپسند که در من می‌بینی به لطف واسع خویش اصلاحش فرمای تا پسندیده شود و هر آن عیب که نفسم را به فساد بیالاید از من بازگیر و هر آن نقص که جانم را از کمال باز دارد برطرفش فرمای!"
و در آن روز که نوبت زندگانی به سر رسد و پیک مرگ حلقه بر در خانه تن بکوبد و دعوت واجب الاجابه تو از آسمان‌ها به گوش آید...پروردگارا! بر محمد (ص) و آل پاکش درود فرست و به حق ایشان عمر ما را با رستگاری به پایان آور و عاقبتمان را ختم به خیر فرمای...!

زبان قاصر است و مجال کوتاه...

تو خود قصیده‌ی مهر را از لوح نانوشته‌ی قلبم بخوان...!

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

از جناب آقای دکتر سعید اکبری که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته دکتر داریوش کیانی، دکتر احمد عرفانیان و دکتر عباس جعفر زاده که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر و خواهر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

احسان استاجی

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

مرتبط کردن مفاهیم موجود بین شاخه‌های مختلف ریاضیات یکی از روش‌های کارآمد برای بررسی کردن آن مفاهیم می‌باشد. نسبت دادن شی ترکیبیاتی به شی جبری دارای دیرینهای نسبتا طولانی می‌باشد. یکی از قدیمی‌ترین این تناظرها نسبت دادن گراف کیلی به گروه می‌باشد که توسط آرتور کیلی[۱] انجام گرفت و نتایج خیره کننده ای از این تناظر بدست آمد. اولین ارتباط بین حلقه‌ها و گراف‌ها توسط بک[۲] برقرار شد. بک به حلقه جابه‌جایی R، گراف مقسوم علیه صفر R، $\Gamma(R)$، را نسبت داد. در گراف بک تمام عناصر حلقه رئوس گراف بودند و دو عنصر متمایز a و b به همدیگر متصل بودند اگر $ab=0$. البته تمرکز اصلی بک مشخص کردن عدد رنگی این گراف بود. در ادامه، آندرسون[۳] و لیوینگستون[۴] در [۸] تعریف این گراف را اصلاح کردند و مجموعه رئوس گراف را به مقسوم علیه‌های ناصفر صفر حلقه R، $Z^*(R)$، کاهش دادند. سوال مهم پیشروی افرادی که در این حوزه فعالیت داشتند این بود که چگونه خواص حلقه‌ای R، ویژگی‌های گرافی $\Gamma(R)$ را مشخص می‌کند و بالعکس. پاسخ دادن به این سوال خیلی جذاب بود چرا که از روش‌های ساده محاسباتی تا مسائل پیشرفته در نظریه حلقه‌ها به کمک حل این مسائل آمدند. در خیلی از موضوعات تمام حلقه‌هایی که گراف‌های شان دارای ویژگی خاصی بودند، رده‌بندی شدند. همان طور که انتظار می‌رفت بعد از نسبت‌دادن این گراف به حلقه، پژوهشگران زیادی به خصوص از سمت شاخه جبر جذب این موضوع شدند و به مرور گراف‌های مختلفی که ایده اصلی‌شان گراف مقسوم علیه صفر بود به ساختارهای دیگر جبری نسبت داده شود.

اکنون افراد زیادی جذب این شاخه شده بودند که اغلب دو سبک کاری را دنبال می‌کردند. عده‌ای مفهوم گراف مقسوم علیه صفر را به ساختارهای دیگر جبری تعمیم دادند. به عنوان مثال در [۲۱]، [۱۱]

[1] Arthur Cayley

[2] Beck

[3] Anderson

[4] Livingston

و [۱۷] گراف مقسوم علیه صفر نیم‌گروه ها، جبرهای بولی و مدول‌ها معرفی و بررسی شد. عده‌ای دیگر نیز به نسبت دادن گراف‌های جدید به ساختارهای جبری پرداختند که در اینجا به ذکر سه نمونه از این سبک کارها می‌پردازیم

۱. گراف هم‌بیشین که توسط شارما[1] و باتوادکار[2] در [۳۸] معرفی شد. در این گراف تمام عناصر حلقه R به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته شدند و دو عنصر متمایز a و b به همدیگر متصل بودند اگر $aR + bR = R$.

۲. گراف تام یک حلقه جابه‌جایی که توسط آندرسون[3] و بداوی[4] در [۷] معرفی شد. در این گراف نیز تمام اعضای حلقه R به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته شده‌اند و دو رأس متمایز a و b به همدیگر متصل بودند اگر $a+b$ مقسوم علیه صفری از R بود.

۳. گراف حاصلجمع که ابتدا توسط چونگ[5] و گریمالدی[6] در [۲۰] و [۲۶] برای حلقه ی $\mathbb{Z}_n$ تعریف شده بود. در این گراف تمام عناصر حلقه به عنوان راس در نظر گرفته می‌شود و دو عنصر متمایز a و b به همدیگر متصلند اگر مجموع a و b عنصری یکه از حلقه ی R باشد.

برای نمونه کارهای انجام شده در این حوزه‌ی پژوهشی می‌توانید به [۴]، [۳]، [۱۱]، [۱۰]، [۸]، [۹]، [۷]، [۱۴]، [۲۱]، [۲۲]، [۳۴] و [۳۵] رجوع کنید.

در فصل اول این رساله، تعاریف اولیه و نمادهای استفاده شده در این رساله مطرح شده است. در فصل دوم رساله، مفهوم گراف مقسوم علیه صفر را بر روی مشبکه‌ها تعمیم داده و رفتار گراف حاصل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم این رساله، گراف مقسوم علیه صفر $R-$مدول دلخواه M را تعریف خواهیم کرد. در فصل چهارم رساله خواص مربوط به گراف یکانی حلقه‌ی نا جابه‌جایی R را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در پایان یادآوری می‌شود که مقالات [۲۳]، [۱] و [۲] مستخرج از این رساله می‌باشند.

[1] Sharma

[2] Bhatwadekar

[3] Anderson

[4] Badawi

[5] Chung

[6] Grimaldi

فصل ۱

نمادهای کلی و مفاهیم اولیه

۱.۱ مفاهیم مورد نیاز در جبر جابه‌جایی

نماد $\mathbb{Z}$ همواره نشان‌دهنده مجموعه عددهای صحیح است و نماد $\mathbb{N}$ همواره نشان‌دهنده مجموعه عددهای صحیح مثبت است. فرض کنید n عدد صحیح است و $n > ۱$. حلقه رده‌های مانده‌ای عددهای صحیح به پیمانه n با $\mathbb{Z}_n$ نمایش داده خواهد شد. نماد $\subseteq$ برای نمایش زیر مجموعه‌بودن و نماد $\subset$ برای نمایش زیر مجموعه سره بودن به کار می‌رود. لذا به ازای مجموعه‌های A و B عبارت $A \subset B$ یعنی $A \subseteq B$ و $A \neq B$. همچنین تعداد عضوهای مجموعه متناهی مانند Ω را با $|\Omega|$ نمایش خواهیم داد.

تمام حلقه‌هایی که در این رساله مطالعه می‌کنیم عنصر همانی ضربی خواهند داشت.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. مقسوم علیه صفر R عضوی چون $r \in R$ است که به ازای آن عضوی چون $y \in R$ با شرط $y \neq ۰_R$ وجود داشته باشد که $ry = ۰_R$. هر عضو R که مقسوم علیه صفر نباشد نامقسوم علیه صفر نامیده می‌شود. مجموعه مقسوم علیه‌های صفر اغلب با نماد $Z(R)$ نمایش داده می‌شود. همچنین مجموعه مقسوم علیه‌های ناصفر صفر را با نماد $Z^*(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این صورت R را حوزه صحیح می‌گوییم اگر

(آ) R حلقه صفر نباشد یعنی $۱_R \neq ۰_R$، و

(ب) $\circ_R$ تنها مقسوم علیه صفر R باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید I و J ایده‌آل‌های حلقه جابه‌جایی R باشند. حاصل تقسیم یا خارج قسمت $(I:J)$ به صورت

$$(I:J)=\{a\in R: aJ\subseteq I\}$$

تعریف می‌شود. در حالت خاص $I=\circ$، حاصل تقسیم $(\circ:J)$ پوچساز J نامیده می‌شود و با $\mathrm{Ann}J$ یا $\mathrm{Ann}_R J$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. ایده‌آل $\mathfrak{m}$ از حلقه جابه‌جایی R را بیشین می‌گوییم اگر $\mathfrak{m}$ نسبت به رابطه شمول عضو بیشین مجموعه ایده‌آل‌های سره R باشد. به عبارت دیگر ایده‌آل $\mathfrak{m}$ از R بیشین است اگر

(آ) $\mathfrak{m}\subset R$، و

(ب) ایده‌آلی چون I از R وجود نداشته باشد چنانکه $\mathfrak{m}\subset I\subset R$.

تعریف ۵.۱.۱. هر حلقه جابه‌جایی R را که دقیقا یک ایده‌آل بیشین چون $\mathfrak{m}$ دارد موضعی می‌گوییم. در این حالت $R/\mathfrak{m}$ را هیأت مانده‌ای R می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. رادیکال جیکبسون R را اشتراک همه ایده‌آل‌های بیشین R تعریف می‌کنند، و گاهی آن را با $J(R)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. مجموعه ایده‌آل‌های R را با $\mathcal{I}_R$ نمایش می‌دهیم. می‌گوییم که R نوتری است اگر مجموعه جزئاً مرتب $(\mathcal{I}_R,\subseteq)$ دارای این ویژگی باشد که هر زیر مجموعه ناتهی آن شامل عضوی بیشین باشد.

۲.۱ مفاهیم مورد نیاز در نظریه مدول‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید M مدولی روی حلقه جابه‌جایی R و G زیر مدول M باشد. فرض کنید I ایده‌آل R باشد. در این صورت $(G:_M I)$ نشان دهنده زیر مدول

$$\{m\in M:\ \text{به ازای هر } r\in I\ ,\ rm\in G\}$$

از M است. حالت خاص این نمادگذاری که در آن $G = 0$ موارد استفاده زیادی دارد. زیر مدول $(I :_M 0)$ از M را می‌توان پوچساز I در M تلقی کرد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید M مدولی روی حلقه جابه‌جایی R باشد. می‌گوییم M، $R-$مدول نوتری(آرتینی) است اگر هر مجموعه ناتهی از زیر مدول‌های M شامل عضوی بیشین(کمین) نسبت به رابطه شمول باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید M، $R-$مدولی غیر صفر باشد. M را ساده می‌نامیم هرگاه 0 و M تنها زیر مدول‌های M باشند.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید M، $R-$مدول باشد. M را نیم ساده می‌نامیم هرگاه به ازای هر زیر مدول از M مانند K، زیر مدولی از M مانند P موجود باشد که $M = K \oplus P$.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید R، حلقه باشد. R را نیم ساده چپ(راست) می‌نامیم هرگاه R به عنوان $R-$مدول چپ (راست)، نیم ساده باشد.

قضیه ۶.۲.۱. **(قضیه ساختاری آرتین-ودربورن)** فرض کنید R، حلقه نیم ساده چپ(راست) باشد. در این صورت حلقه‌های تقسیمی مثل $D_1, \cdots, D_r$ موجودند که $R \cong \prod_{l=1}^{r} M_{n_l}(D_l)$ (در اینجا منظور یکریختی حلقه‌ای است).

قضیه ۷.۲.۱. فرض کنید R حلقه باشد. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند.

(آ) R حلقه‌ای نیم ساده است،

(ب) R حلقه‌ای است آرتینی چپ که $J(R) = 0$.

در فصل دوم و سوم این رساله R حلقه‌ای جابه‌جایی با عنصر همانی ناصفر است و در فصل چهارم R حلقه‌ای دلخواه (نه لزوما جابه‌جایی) در نظر گرفته می‌شود. مرجع مورد استفاده شده در این رساله درباره حلقه‌های جابه‌جایی [۱۳] و درباره حلقه‌های ناجابه‌جایی [۳۱] بوده است.

۳.۱ مفاهیم مورد نیاز در نظریه گراف

فرض کنیم V مجموعه‌ای ناتهی و متناهی باشد و $E \subseteq V \times V$. در این صورت جفت (V, E) را یک گراف جهت دار(روی V) می‌نامیم. V مجموعه رأس‌ها یا گره‌ها و E مجموعه یال‌های گراف نام دارد.

برای نشان دادن این گراف جهت‌دار می‌نویسیم $G = (V, E)$. وقتی جهت یال‌ها مورد نظر نیست، ساختار $G(V, E)$ را، که در آن E مجموعه‌ای از جفت‌های نامرتب عنصرهایی متعلق به V است، گراف بدون جهت می‌نامیم. اگر دو انتهای یک یال با همدیگر برابر باشند آن یال را طوقه می‌نامیم. گرافی که دارای طوقه نباشد و بین هر دو رأس دلخواهش حداکثر یک یال وجود داشته باشد گراف ساده نامیده می‌شود. همسایگی رأس دلخواه a که با نماد $N(a)$ نمایش داده می‌شود متشکل از تمام رئوسی از گراف است که بین آن‌ها و a یال وجود داشته باشد. به تعداد اعضای مجموعه $N(a)$، درجه a گفته می‌شود که با نماد $\deg(a)$ نمایش داده می‌شود. بزرگترین و کوچکترین درجه ممکن در گراف G را به ترتیب با نماد های $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم. گرافی که درجه تمام رئوسش برابر r باشد گراف $r-$منتظم نامیده می‌شود. اگر تمام رئوس گراف توسط یال‌ها به یکدیگر متصل باشند، گراف را کامل می‌نامیم و گراف کامل با n رأس را با نماد K_n نمایش می‌دهیم. گراف G را $r-$بخشی می‌نامیم هرگاه بتوان مجموعه رئوس گراف، $V(G)$، را به r مجموعه $V_۱$،...،V_r افراز کرد به طوری که بین رئوس داخل این مجموعه‌ها یالی وجود نداشته باشد. اگر بین هر دو رأس متعلق به دو مجموعه متفاوت یال وجود داشته باشد گراف حاصل را گراف کامل $r-$بخشی می‌نامیم. اگر به ازای $۱ \leq i \leq r$ مجموعه‌های V_i دارای n_i رأس باشند گراف کامل $r-$بخشی بدست آمده را با نماد $K_{n_۱,n_۲,\cdots,n_r}$ نمایش می‌دهیم. گراف کامل $K_{۱,n}$ را ستاره می‌نامیم و به رأسی که در مجموعه تک عضوی در افراز قرار می‌گیرد مرکز ستاره می‌گوییم. منظور از خوشه در گراف G زیر مجموعه‌ای از رئوس گراف می‌باشد که بین هر دو رأس آن زیر مجموعه، یال وجود داشته باشد و به اندازه بزرگترین خوشه در گراف G، عدد خوشه ای گراف G می‌گوییم که با نماد $\omega(G)$ نمایش داده می‌شود. همچنین زیر مجموعه‌ای از رئوس گراف را مستقل می‌نامیم هرگاه هیچ یالی بین رئوس آن مجموعه وجود نداشته باشد. اندازه بزرگترین زیر مجموعه مستقل گراف G را عدد استقلال گراف G می‌نامیم و با نماد $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم x و y دو رأس(که الزاما متمایز نیستند) در گراف بدون جهت $G = (V, E)$ باشند. هر $x - y$ گشت در G یک دنباله متوالی متناهی و بدون طوقه مانند

$$x = x_۰, e_۱, x_۱, e_۲, x_۲, e_۳, \cdots, e_{n-۱}, x_{n-۱}, e_n, x_n = y$$

از تعدادی رأس و یال متعلق به G است که از رأس x آغاز و به رأس y ختم می‌شود و حاوی n یال است. $e_i = \{x_{i-۱}, x_i\}$ است. طول هر گشت برابر n، یعنی تعداد یال‌های گشت است. هر $x - y$ گشتی که در آن $x = y$ و $n > ۱$ گشت بسته نام دارد. اگر هیچ رأسی از $x - y$ گشت مفروض بیش از یک بار دیده نشود، این گشت را یک $x - y$ مسیر می‌نامیم. واژه دور را برای توصیف یک $x - x$ مسیر بسته

به کار می‌بریم. بنابر این واژه دور همواره مستلزم وجود حداقل سه یال متمایز از گراف است. به طول کوتاهترین دور موجود در گراف کمر گراف می‌گوییم و با نماد $g(G)$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید اگر گراف G دارای دور نباشد آنگاه $g(G)=\infty$ تعریف می‌شود. همچنین فاصله بین دو رأس x و y که با نماد $\mathrm{d}(x,y)$ نمایش داده می‌شود طول کوتاهترین مسیر موجود بین دو رأس x و y می‌باشد و به طور مشابه اگر بین این دو رأس مسیری وجود نداشته باشد $\mathrm{d}(x,y)=\infty$ تعریف می‌شود. بیشترین فاصله ممکن بین رأس‌های گراف قطر گراف نامیده می‌شود و با نماد $\mathrm{diam}(G)$ نمایش داده می‌شود. گراف G را همبند می‌نامیم، هرگاه بین هر دو رأس متمایز G مسیری وجود داشته باشد.

فرض کنیم $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ دو گراف بدون جهت باشد. تابعی مانند $f:V_1\longrightarrow V_2$ را یکریختی گراف می‌نامند هرگاه f یک‌به‌یک و پوشا باشد و به ازای هر $a,b\in V_1$، $\{a,b\}\in E_1$ اگر و تنها اگر $\{f(a),f(b)\}\in E_2$. اگر چنین تابعی وجود داشته باشد، G_1 و G_2 را گراف‌های یکریخت می‌نامند.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید Γ_1 و Γ_2 دو گراف ساده با مجموعه رئوس مجزا باشند. در این‌صورت

(آ) حاصلضرب دکارتی $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2$ گرافی با مجموعه رئوس $V(\Gamma)=V(\Gamma_1)\times V(\Gamma_2)$ است که در آن دو رأس متمایز (u_1,u_2) و (v_1,v_2) به هم متصل‌اند اگر $u_1=v_1$ و $\{u_2,v_2\}\in E(\Gamma_2)$ یا $v_2=u_2$ و $\{u_1,v_1\}\in E(\Gamma_1)$.

(ب) فرض کنید Γ_1 و Γ_2 دو گراف باشند. در این‌صورت حاصلضرب تانسوری $\Gamma=\Gamma_1\otimes\Gamma_2$ گرافی ساده با مجموعه رئوس $V(\Gamma)=V(\Gamma_1)\times V(\Gamma_2)$ است و دو رأس متمایز (u_1,u_2) و (v_1,v_2) به هم متصل‌اند اگر u_1 و v_1 در Γ_1 و u_2 و v_2 در Γ_2 به هم متصل باشند.

تعریف ۲.۳.۱. یک گراف قابل نشاندن در صفحه یا مسطح نامیده می‌شود، هرگاه بر روی صفحه قابل رسم باشد به طوری که یال‌ها فقط در رئوس همدیگر را قطع کنند.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید $e=(u,v)$، یالی در گراف Gباشد. منظور ما از زیر تقسیم یال e یعنی افزودن رأسی مانند w به این یال و تشکیل دو یال جدید (u,w) و (w,v) می‌باشد. زیر تقسیم گراف G، گرافی است که از زیر تقسیم یال‌های G بدست می‌آید.

قضیه کوراتوفسکی[1] که به صورت زیر بیان می‌شود تمام گراف‌های مسطح را رده‌بندی می‌کند.

[1] Kuratowski

قضیه ۴.۳.۱. گراف G مسطح است اگر و تنها اگر هیچ زیر تقسیمی یکریخت با $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ نداشته باشد.

خواننده می‌تواند برای اطلاعات بیشتر در مورد نظریه گراف به [۱۹] مراجعه کند.

فصل ۲

گراف مقسوم علیه صفر یک مشبکه

۱.۲ مقدمه

فرض کنید R حلقه جابه‌جایی ناصفر باشد و $Z(R)$ مجموعه مقسوم علیه‌های صفر باشد. گراف مقسوم علیه صفر R، که با نماد $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود، گراف بدون جهتی است که مقسوم علیه‌های ناصفر صفر، رئوسش می‌باشند و دو رأس x و y به همدیگر متصل‌اند اگر $xy = 0$. بنابراین $\Gamma(R)$ گرافی تهی است اگر و تنها اگر R حوزه صحیح باشد. علاوه بر آن $\Gamma(R)$ متناهی و ناتهی خواهد بود اگر و تنها اگر R حلقه ای متناهی باشد که میدان نباشد.

در ابتدای این فصل گذری داریم به نتایج بدست آمده در مورد گراف مقسوم علیه صفر حلقه جابه‌جایی و رابطه بین مقسوم علیه‌های صفر و نظریه گراف.

مفهوم گراف مقسوم علیه صفر توسط بک[1] [۱۶] در ۱۹۸۸ مطرح شد و در ادامه توسط نصیر[2] و آندرسون[3] [۶] مورد مطالعه بیشتر قرار گرفت. آن‌ها تمام اعضای حلقه را به عنوان رئوس گراف در نظر گرفتند و بیشتر به رنگ‌آمیزی گراف بدست آمده علاقه داشتند. تعریفی که از گراف مقسوم علیه صفر

[1] I. Beck

[2] M. Naseer

[3] D. D. Anderson

$\Gamma(R)$ بیان شد مربوط به آندرسون[1] و لیوینگستون[2] در [۸] در ۱۹۹۹ می‌گردد.

در این بخش به مطالعه نتایج بدست آمده در زمینه کمر و قطر گراف $\Gamma(R)$ می‌پردازیم.

قضیه ۲.۱.۱. [۲۴، قضیه ۱] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ متناهی خواهد بود اگر و تنها اگر R متناهی یا حوزه صحیح باشد. یا به صورت دقیقتر اگر $1 \leq |\Gamma(R)| < \infty$، آنگاه R متناهی و غیر میدان خواهد بود. بعلاوه اگر R حوزه صحیح نباشد، آنگاه $|R| \leq |Z(R)|^2$.

قضیه ۲.۱.۲. [۸، قضیه ۲.۳] فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ همبند خواهد بود و $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$.

قضیه ۲.۱.۳. [۸، قضیه ۲.۴] فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی باشد. اگر $\Gamma(R)$ شامل دور باشد، آنگاه $g(\Gamma(R)) \leq 4$.

قضیه ۲.۱.۴. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد به طوری که حوزه صحیح نباشد. در این صورت دقیقاً یکی از موارد زیر اتفاق می‌افتد

(آ) $\Gamma(R)$ شامل دوری به طول ۳ یا ۴ می‌باشد.

(ب) $\Gamma(R)$ به صورت تک نقطه‌ای یا ستاره می‌باشد

(پ) $\Gamma(R) \cong \overline{K_{1,3}}$. (یعنی $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ یا $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$)

قضیه ۲.۱.۵. [۹، قضیه ۲.۲ و ۲.۴] فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی باشد که دارای $\mathrm{Nil}(R)$ غیر صفر باشد. در این صورت خواهیم داشت:

۱. گزاره‌های زیر هم ارزند.

(آ) $g(\Gamma(R)) = 4$

(ب) $R \cong D \times B$، که D حوزه صحیح با $|D| \geq 3$ می‌باشد و B برابر با $\mathbb{Z}_4$ یا $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ می‌باشد.

(پ) $\Gamma(R) = \overline{K_{m,3}}$ که $m \geq 2$ می‌باشد.

[1] D. F. Anderson

[2] P. S. Livingston

۲. گزاره های زیر هم ارزند.

(آ) $g(\Gamma(R)) = \infty$

(ب) $R \cong B$ یا $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times B$ که B برابر با $\mathbb{Z}_۴$ یا $\mathbb{Z}_۲[x]/(x^۲)$ خواهد بود یا $\Gamma(R)$ به صورت ستاره می‌باشد.

(پ) $\Gamma(R)$ به صورت تک نقطه ای، $\overline{K_{۱,۳}}$ یا به ازای $n \geq ۱$، $K_{۱,n}$ خواهد بود.

قضیه ۶.۱.۲. [۵، قضیه ۶] اگر R حلقه ای جابه‌جایی باشد به طوری که R حوزه صحیح نباشد و هر رأس گراف $\Gamma(R)$ دارای درجه متناهی باشد، آنگاه حلقه R متناهی خواهد بود.

روش دیگری که در مورد مطالعه $\Gamma(R)$ مورد توجه قرار گرفت بررسی ساختار گراف مقسوم علیه صفر در جهت معکوس بود. به عبارت دیگر به ازای چه گراف‌هایی مانند G حلقه‌ای جابه‌جایی مانند R وجود خواهد داشت که $\Gamma(R) \cong G$. یک سری از نتایج به صورت مشخص کردن تمام حلقه‌ها در حد یکریختی بود که گراف مقسوم علیه صفرشان شامل n رأس بود. گراف‌هایی با $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ که می‌توانند به صورت $\Gamma(R)$ در نظر گرفته شوند در [۱۰] مثال ۱۲.۱ معرفی شدند و در ادامه ردموند[۱] در [۳۶] قضیه ۶.۴ نشان داده شد برای $n = ۵$، سه گراف متمایز وجود دارد. در ادامه این مسیر در [۳۷] ، تمام گراف‌هایی با $n = ۶, ۷, \cdots, ۱۴$ رأس را مشخص کرد. همچنین او الگوریتمی برای مشخص‌کردن حلقه‌های جابه‌جایی کاهش‌یافته که باعث بوجود آمدن گراف مقسوم علیه صفر با n رأس می‌شوند ارائه کرد. همچنین لاگرانژ[۲] در [۲۹] الگوریتمی برای مشخص کردن گراف‌های مقسوم علیه صفر حاصلضرب مستقیم حوزه‌های صحیح و تشخیص گراف‌هایی که به صورت گراف مقسوم علیه صفر حاصلضرب مستقیم حوزه‌های صحیح قابل تشخیص هستند، معرفی کرد. (همچنین رجوع کنید به [۳۰]).

سوال دیگری که مطرح بود این بود که به ازای چه اعداد صحیحی مانند n، حلقه جابه‌جایی مانند R وجود دارد که $|\Gamma(R)| = n$ یا به صورت هم ارز آیا حلقه‌ای جابه‌جایی مانند R وجود دارد که $|Z(R)| = n + ۱$؟ با استفاده از فرمول بدست آمده توسط گیلمر[۳] [۲۵] و ردموند[۴] [۳۲، صفحه ۷ تا ۱۲] برای مقسوم علیه‌های صفر حاصلضرب مستقیم حلقه‌ها و با استفاده از محاسبات رایانه‌ای نشان

[1] S. P. Redmond

[2] J. D. LaGrange

[3] Gilmer

[4] S. P. Redmod