دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض

گرایش جبر

رسته‌ی تابعگون‌ها

استاد راهنما:

دکتر شکراله سالاریان

پژوهشگر:

الهه نفریه

اسفند ماه ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم الهه نفریه

تحت عنوان:

رسته‌ی تابعگون‌ها

در تاریخ **۹۱/۱۲/۱۹** توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه بسیار خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر شکرا.. سالاریان	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر جواد باقریان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر عبدالناصر بهلکه	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

سپاس گزاری

الهی وقتی دریچه ی دلم

رو به خانه ات باز

نگاه دو چشمم به سویت در پرواز است

بهترین دقایق هستی با من دمساز است

تو را می پرستم و با تو هستم

با من باش که از باده ی مهر تو مستم

سپاس خدای مهربانم را که مرا در تک تک لحظات زندگی همراه است.

زیباترین ستایش ها تقدیم استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر شکراله سالاریان که فراتر از یک استاد راهنما در نهایت صبر و شکیبایی انگیزه ی انجام این تحقیق را در من ایجاب نمودند و در به ثمر رسیدن آن راهنمایم بودند.

والاترین سپاس ها پیشکش تمام کسانی که در طول زندگیم، با دلسوزی هایشان راهنمایم هستند و وجودشان برایم زیور انسانیت است.

صمیمانه ترین سپاس ها تقدیم دوست عزیزم سرکار خانم آناهیتا بنده بهمن که وجودش مایه ی دلگرمیم است. الطاف خداوند متعال همواره، سایه گستر وجود پر مهرش باد.

این کمترین خود را تا ابد مرهون دعای پدر و زحمات مادرم می دانم، او که چون شمع سوخت تا ساخته شوم، از خودگذشت تا باشم.

الهه نفریه

تقدیم به روح پرفتوح پدر بزرگوارم

به پاس تعبیر عظیم انسانیت

آن که با نگاه مهربانش از فراسوها همواره نوازشگر روح و جانم بوده است.

تقدیم به مادر مهربانم

به پاس ترنم شکیبایی و گذشت

آن که در سایه ی صبر، تنهایی، سرافرازی و استواریش بالیدم.

تقدیم به خواهران عزیزم

به پاس مهربانی

آنان که وجودشان مایه ی دلگرمی و انگیزه ام برای تلاش است.

چکیده:

در این پایان‌نامه ما برآنیم تا رسته‌ی تابعگون‌های جمعی را از رسته‌ی مدول‌های به‌طور متناهی نمایش‌پذیر به گروه‌های آبلی مورد بررسی قرار دهیم. برای این منظور ابتدا به‌طور مختصر درباره‌ی رسته‌های آبلی و جمعی بحث می‌کنیم. سپس برخی از شی‌های این رسته را مانند تابعگون‌های یکدست، تصویری، تزریقی و یکدست تابدار معرفی می‌نماییم. هم‌چنین نشان می‌دهیم که هر R–مدول دارای یک پوشش تزریقی محض منحصر به‌فرد می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: تابعگون‌های به‌طور متناهی تولیدشده، به‌طور متناهی نمایش‌پذیر، تزریقی، تصویری، یکدست، یکدست تابدار، پوشش تزریقی محض، مدول تزریقی محض و مدول تصویری محض.

فهرست مطالب

مقدمه

مطالعه‌ی رسته‌ی تابعگون‌ها بحثی تازه در ریاضیات نیست. این بحث به شاخه‌ای از ریاضیات به نام جبر جابجایی مرتبط است، که از دیرباز وجود داشته است و همواره مسائل زیادی در این راستا در طول این سالیان حل شده است. اما در قرن ۲۰ *ب. میچل* [۱] به بیان ارتباط میان رسته‌ی مدول‌ها با رسته‌ی تابعگون‌ها پرداخت. پس از آن مطالعه‌ی رسته‌ی تابعگون‌ها روی مدول‌های به‌طور متناهی نمایش‌پذیر و شناسایی برخی از شی‌های خاص در این رسته و بحث پیرامون آن‌ها توسط *ا. هرزوگ* [۲] گسترش یافت.

این پایان نامه در ۳ فصل تنظیم شده است. در فصل اول مفاهیم اولیه‌ای چون رشته‌های دقیق محض، مدول‌های تصویری (تزریقی) محض، مدول هم‌مولد و ... را بیان می‌کنیم. در فصل دوم رسته های جمعی و آبلی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به عنوان مثال مفاهیمی چون تابعگون‌های جمعی، رشته‌ی دقیق، دستگاه مولد، شی‌های تصویری، تزریقی و $\cdots$ در این رسته‌ها بیان می‌شوند. هم‌چنین لم هموتوپی را در این فصل بیان و اثبات می‌کنیم. قسمت اصلی این پایان‌نامه در فصل ۳ بیان می‌شود. این فصل شامل ۴ بخش است.

فرض کنیم $\mathcal{A}$ رسته‌ای جمعی باشد که خانواده‌ی شی‌های آن تحت یکریختی تشکیل مجموعه دهند و $\mathcal{B}$ یک رسته‌ی جمعی باشد. در این صورت رسته‌ای را که شی‌های آن تابعگون‌های جمعی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ و ریخت‌های آن تبدیلات طبیعی باشند؛ رسته‌ی تابعگون‌های جمعی می‌نامیم و آن را با $\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ نشان می‌دهیم.

در بخش اول این فصل پس از تعریف تابعگون‌های به‌طورمتناهی نمایش‌پذیر و تابعگون‌های به‌طور متناهی تولیدشده و بیان لم یوندا، نشان می‌دهیم که این رسته یک رسته‌ی گروتندیک [۳] است. در بخش‌های دوم

---

[۱] B. Mitchell

[۲] I. Herzog

[۳] Grothendieck

تا چهارم برخی از شی‌های رسته‌ی تابعگون‌ها از رسته‌ی مدول‌های به‌طور متناهی نمایش‌پذیر به گروه‌های آبلی را معرفی می‌کنیم. در بخش دوم با استفاده از مرجع [۵]، پس از تعریف تابعگون‌های دقیق چپ و رشته‌های دقیق محض از تابعگون‌ها نشان می‌دهیم که برای تابعگون پادورد $H : (\mathrm{mod}R)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ab}$، گزاره‌های زیر معادلند.

الف) تابعگون H در $\mathrm{Add}((\mathrm{mod}R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ یکدست است.

ب) تابعگون H دقیق چپ است.

ج) هر رشته ی دقیق از تابعگون‌های $\circ \longrightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow \circ$ دقیق محض است.

د) R- مدول چپی مانند Mموجود است به‌طوری‌که تابعگون H با $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ یکریخت است.

هم‌چنین در این بخش به بررسی این مطلب که تابعگون H یک تابعگون تصویری است اگر و تنها اگر H با $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ یکریخت باشد، که در آن M یک R- مدول تصویری محض است؛ می‌پردازیم. در بخش سوم نیز با استفاده از مرجع [۵]، پس از تعریف یک fp- تزریقی، خواهیم دید که برای تابعگون همورد $Q : \mathrm{mod}R^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ گزاره های زیر معادلند.

الف) تابعگون Q در $\mathrm{Add}(\mathrm{mod}R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ یک fp- تزریقی است.

ب) تابعگون Q دقیق راست است.

ج) هر رشته‌ی دقیق از تابعگون‌های $\circ \longrightarrow Q \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \longrightarrow \circ$ دقیق محض است.

د) R- مدولی مانند M موجود است به‌طوری‌که تابعگون Q با $- \bigotimes_R M$ یکریخت است.

ه) هر رشته‌ی دقیق از تابعگون‌های $\circ \longrightarrow Q \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} F \longrightarrow \circ$ که در آن F یک تابعگون به‌طور متناهی نمایش‌پذیر است، شکافنده می‌شود.

سپس نشان می‌دهیم که تابعگون Q تزریقی است اگر و تنها اگر Q با $- \bigotimes_R M$ یکریخت باشد، که در آن M یک R- مدول تزریقی محض است.

در ابتدای بخش آخر با استفاده از مرجع [۸]، به معرفی پوشش تزریقی محض برای هر R- مدول می‌پردازیم و سپس نشان می‌دهیم که پوشش تزریقی محض برای هر R- مدول وجود دارد و در حد یکریختی منحصر به‌فرد می‌باشد. در انتهای این بخش با استفاده از مرجع [۳]، نشان می‌دهیم که $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ یک تابعگون یکدست تابدار در رسته‌ی $\mathrm{Add}((\mathrm{mod}R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ است اگر و فقط اگر M یک R- مدول تزریقی محض باشد.

لازم به ذکر است در سرتاسر این پایان‌نامه تمامی حلقه‌ها یکدار و مدول‌ها یکانی می‌باشند، منظور از R-

مدول، R - مدول چپ است مگر این‌که خلاف آن تصریح شود. همچنین $\mathrm{mod}R$ رسته‌ی R - مدول‌های به‌طور متناهی نمایش‌پذیر، $\mathrm{mod}R^{\mathrm{op}}$ رسته‌ی R^{op} - مدول‌های به‌طور متناهی نمایش‌پذیر و $(\mathrm{mod}R)^{\mathrm{op}}$ دوگان رسته‌ی R - مدول‌های به‌طور متناهی نمایش‌پذیر می‌باشند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل تعریف‌ها و قضیه‌هایی که در فصل‌های بعدی این تحقیق به آن‌ها نیاز است را به‌طور مختصر بیان می‌کنیم و از اثبات برخی از قضیه‌ها صرف نظر می‌کنیم. همچنین به ارائه‌ی مثال برای بعضی از تعریف‌ها می‌پردازیم.

رسته

تعریف ۱.۱.۱. یک رسته متشکل از یک سه‌تایی چون $\mathcal{C} = (\mathrm{Obj}\mathcal{C}, \mathrm{Hom}\mathcal{C}, \circ)$ می‌باشد به‌طوری‌که $\mathrm{Obj}\mathcal{C}$ را رده‌ی شی‌های $\mathcal{C}$ و $\mathrm{Hom}\mathcal{C}$ را ریخت‌های $\mathcal{C}$ می‌نامیم و $\circ$ یک عمل دوتایی روی ریخت‌هاست، به‌طوری‌که شرایط زیر برآورده شوند:

الف) برای هر دو جفت شی A و B در $\mathcal{C}$ مجموعه‌ای نظیر می‌شود که با $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ نمایش می‌دهیم.

ب) برای هر سه شی A، B و C از اشیا در $\mathcal{C}$، عمل

$$\begin{cases} \circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ \qquad\qquad (g, f) \longrightarrow g \circ f \end{cases}$$

(که ترکیب f و g خوانده می‌شود)، تعریف شده باشد که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

الف) برای هر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$، $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ و $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ داشته باشیم:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

ب) برای هر شی B از $\mathcal{C}$ عضوی مانند $1_B : B \longrightarrow B$ به نام ریخت همانی موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر ریخت $g : B \longrightarrow C$ و ریخت $f : A \longrightarrow B$، داشته باشیم:

$$g \circ 1_B = g \quad , \quad 1_B \circ f = f$$

مثال ۲.۱.۱. فرض کنیم $\mathrm{Mod}R$ خانواده‌ی R-مدول‌ها باشد. در این صورت، برای هر M و N متعلق به $\mathrm{Mod}R$، $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ مجموعه‌ی تمام ریخت‌های $f : M \longrightarrow N$ است. به آسانی دیده می‌شود که $\mathrm{Mod}R$ یک رسته است.

تعریف ۳.۱.۱. شی I از رسته‌ی $\mathcal{C}$ را یک *شی ابتدایی* می‌نامیم هرگاه، برای هر شی B از رسته‌ی $\mathcal{C}$، مجموعه‌ی $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, B)$ تک عضوی باشد.

تعریف ۴.۱.۱. شی T از رسته‌ی $\mathcal{C}$ را یک *شی انتهایی* می‌نامیم هرگاه، برای هر شی B از رسته‌ی $\mathcal{C}$، مجموعه‌ی $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, T)$ تک عضوی باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم $f : C_1 \longrightarrow C_2$ یک ریخت در رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشد. در این صورت f را یک *هم‌ارزی* می‌نامیم هرگاه ریختی مانند $g : C_2 \longrightarrow C_1$ چنان موجود باشد که $f \circ g = 1_{C_2}$ و $g \circ f = 1_{C_1}$. دو شی C_1 و C_2 را *هم‌ارز* می‌نامیم هرگاه یک هم ارزی از C_1 به C_2 موجود باشد.

قضیه ۶.۱.۱. *شی ابتدایی و انتهایی در صورت وجود منحصر به فرد است.*

اثبات. به قضیه ۱۰.۷ از فصل ۱، مرجع [۴] مراجعه کنید. □

تعریف ۷.۱.۱. شی C را شی صفر می‌نامیم هرگاه هم ابتدایی و هم انتهایی باشد.

مثال ۸.۱.۱. در رسته‌ی R-مدول‌ها مدول صفر همان شی صفر است.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از اشیا در رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشد. در این صورت شی C به همراه خانواده‌ی $\iota_\alpha : C_\alpha \longrightarrow C$ را یک جمع مستقیم برای خانواده‌ی $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ در رسته‌ی $\mathcal{C}$ می‌نامیم هرگاه، برای هر شی X و ریخت $f_\alpha : C_\alpha \longrightarrow X$ در $\mathcal{C}$، ریخت منحصر بفرد $f : C \longrightarrow X$ موجود باشد به‌طوری‌که $f \circ \iota_\alpha = f_\alpha$.

تذکر ۱۰.۱.۱. اگر برای خانواده‌ی $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ جمع مستقیم موجود باشد، آن‌گاه آن‌را با نماد $\bigoplus_{\alpha \in I} C_\alpha$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از اشیا در رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشد. در این صورت شی C به همراه خانواده‌ی $\pi_\alpha : C \longrightarrow C_\alpha$ را یک *ضرب مستقیم* برای خانواده‌ی $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در رسته‌ی $\mathcal{C}$ می‌نامیم هرگاه، برای هر شی X و ریخت $f_\alpha : X \longrightarrow C_\alpha$ در $\mathcal{C}$، ریخت منحصر بفرد $f : X \longrightarrow C$ چنان موجود باشد که $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$.

تذکر ۱۲.۱.۱. اگر برای خانواده‌ی $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ضرب مستقیم موجود باشد، آن‌گاه آن‌را با نماد $\prod\limits_{\alpha\in I} C_\alpha$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم I یک مجموعه مرتب جزیی باشد. در این صورت $(C_\alpha, u_\alpha^\beta)_{\alpha\leqslant\beta}$ را یک *دستگاه مستقیم* برای رسته‌ی $\mathcal{C}$ می‌نامیم هرگاه، برای هر ریخت $(u_\alpha^\beta : C_\alpha \longrightarrow C_\beta)_{\alpha\leqslant\beta}$، شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $u_\beta^\gamma \circ u_\alpha^\beta = u_\alpha^\gamma$،

ب) $u_\alpha^\alpha = 1_{C_\alpha}$.

که در آن سه‌تایی $(\alpha,\beta,\gamma) \in I$ ، $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ و $C_\alpha \in \mathcal{C}$.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم $(C_\alpha, u_\alpha^\beta)_{\alpha\leqslant\beta}$ یک دستگاه مستقیم از رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشد. در این صورت *حد مستقیم* این دستگاه (در صورت وجود) شی X از رسته‌ی $\mathcal{C}$ می‌باشد به‌طوری‌که برای هر α، ریخت $u_\alpha : C_\alpha \longrightarrow X$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $\alpha \leq \beta$، $u_\beta \circ u_\alpha^\beta = u_\alpha$.
همچنین دارای خاصیت جهانی نیز باشد، یعنی اگر X' یک شی دیگری از رسته‌ی $\mathcal{C}$ به همراه ریخت $u'_\alpha : C_\alpha \longrightarrow X'$ باشد که $u'_\beta \circ u_\alpha^\beta = u'_\alpha$ ، ریخت منحصربفرد $\beta : X \longrightarrow X'$ موجود باشد، به‌طوری‌که $\beta \circ u_\alpha = u'_\alpha$ و $\beta \circ u_\beta = u'_\beta$. حد مستقیم دستگاه فوق را در صورت وجود با $\varinjlim C_\alpha$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم $A = \{A_\alpha, u_\alpha^\beta\}$، $B = \{B_\alpha, v_\alpha^\beta\}$، $C = \{C_\alpha, w_\alpha^\beta\}$ دستگاه‌های مستقیم از رسته‌ی $\mathcal{C}$، $r : A \longrightarrow B$، $s : B \longrightarrow C$، ریخت‌های آن و برای هر α از مجموعه‌ی مرتب جزیی I، رشته‌ی

$$0 \longrightarrow A_\alpha \xrightarrow{r_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{s_\alpha} C_\alpha \longrightarrow 0$$

دقیق باشد. در این صورت حد مستقیم در رسته‌ی $\mathcal{C}$ را (در صورت وجود) *دقیق* می‌نامیم هرگاه رشته‌ی

$$0 \longrightarrow \varinjlim A_\alpha \xrightarrow{\overline{r}} \varinjlim B_\alpha \xrightarrow{\overline{s}} \varinjlim C_\alpha \longrightarrow 0$$

نیز دقیق باشد.

گزاره ۱۶.۱.۱. *حد مستقیم هر دستگاه مستقیم $\{M_i, u_\alpha^\beta\}$ از R- مدول‌ها روی یک مجموعه‌ی مرتب جزیی I موجود است.*

اثبات. به قضیه ۵.۲۳ از فصل ۵، مرجع [۷] مراجعه کنید. □

گزاره ۱۷.۱.۱. *فرض کنیم A یک R- مدول، I یک مجموعه مرتب جزیی و $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیر مدول‌های A باشند. دراین‌صورت*

$$\varinjlim_i \frac{A}{A_i} = \frac{A}{\cup A_i}$$

اثبات. به نتیجه ۵.۳۸ از فصل ۵، مرجع [۷] مراجعه کنید. □

ریخت‌ها

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک رسته، C و D دو شی از آن باشند. در این صورت ریخت

$$f : C \longrightarrow D$$

را تکین می‌نامیم هرگاه، به ازای هر شی B و ریخت‌های $g,h \in \mathrm{Hom}(B,C)$، اگر $f\circ h = f\circ g$، آن‌گاه $h = g$. ریخت f *برویی* است هرگاه، به ازای هر شی E و ریخت‌های $k,t \in \mathrm{Hom}(D,E)$، اگر $k\circ f = t\circ f$، آن‌گاه $k = t$.

مثال ۱۹.۱.۱. یک ریخت در رسته‌ی مجموعه‌ها تکین (برویی) است اگر و تنها اگر یک به یک (پوشا) باشد.

مثال ۲۰.۱.۱. یک ریخت در رسته‌ی مدول‌ها تکین (برویی) است اگر و تنها اگر تکریختی (بروریختی) باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم $u : A \longrightarrow B$ یک ریخت در رسته‌ی $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت هسته‌ی u ریخت $i : K \longrightarrow A$ است به‌طوری‌که در دو شرط زیر صدق کند.

الف) $u\circ i = 0$،

ب) برای هر ریخت $g : X \longrightarrow A$ که $u \circ g = 0$، ریخت منحصربفرد $\theta : X \longrightarrow K$ موجود باشد که $i \circ \theta = g$.

هسته‌ی u را با $\mathrm{Ker}(u)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم $u : A \longrightarrow B$ یک ریخت در رسته‌ی $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت *هم‌هسته‌ی* u ریخت $j : B \longrightarrow K'$ است به‌طوری‌که در دو شرط زیر صدق کند.

الف) $j \circ u = 0$،

ب) برای هر ریخت $g : B \longrightarrow Y$ که $g \circ u = 0$، ریخت منحصربفرد $\theta' : K' \longrightarrow Y$ موجود باشد که $\theta' \circ j = g$.

هم‌هسته‌ی u را با $\mathrm{Coker}(u)$ نشان می‌دهیم.

مدول‌ها

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. منظور از *حلقه‌ی* R^{op} عبارتست از:
اعضای R^{op} همان اعضای حلقه‌ی R و عمل جمع در R^{op} نیز همان عمل جمع در R می‌باشد. عمل ضرب در R^{op} که ما در این‌جا آن را با $(.)$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\forall r, r' \in R^{\mathrm{op}} \qquad r.r' = r'r$$

که در آن ضرب دوم همان ضرب R می‌باشد. حال فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت عمل

$$\begin{cases} M \times R^{\mathrm{op}} \longrightarrow M \\ (m, r) \longrightarrow m.r := rm \end{cases}$$

M را به یک R^{op} مدول راست تبدیل می‌کند.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم M یک R-مدول، S یک حلقه و M یک S-مدول راست باشد. به‌علاوه برای هر $m \in M$، $r \in R$ و $s \in S$ داشته باشیم $(rm)s = r(ms)$. در این صورت M را یک $R-S$-*دو مدول* می‌نامیم.

قضیه ۲۵.۱.۱.

الف) فرض کنیم N یک R- مدول و M یک $R-S$- دو مدول باشند. در این صورت $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ یک S- مدول است.

ب) فرض کنیم N یک $R-S$- دو مدول و M یک R مدول باشند. در این صورت $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ یک S^{op}- مدول است.

اثبات. به قضیه ۸.۴ از فصل ۴، مرجع [۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۶.۱.۱. فرض کنیم

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\
0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{j} & N & \xrightarrow{q} & N''
\end{array}$$

نموداری جابجایی با سطرهای دقیق باشد. در این صورت ریخت منحصربفرد $f: M' \longrightarrow N'$ موجود است، به‌طوری‌که $g\circ i = j\circ f$. همچنین f یکریختی است اگر و تنها اگر h و g یکریختی باشند.

اثبات. به قضیه ۲.۷۱ از فصل ۲، مرجع [۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۷.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت رشته‌ی

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$$

از R- مدول‌ها دقیق است اگر و تنها اگر، برای هر R مدول N، رشته‌ی

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,M') \xrightarrow{\varphi\circ -} \mathrm{Hom}_R(N,M) \xrightarrow{\psi\circ -} \mathrm{Hom}_R(N,M'')$$

یک رشته‌ی دقیق از گروه‌های آبلی باشد.

اثبات. به قضیه ۲.۴ از فصل ۴، مرجع [۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۸.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت رشته‌ی

$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

از R- مدول‌ها دقیق است اگر و تنها اگر، برای هر R مدول K، رشته‌ی

$$\circ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', K) \xrightarrow{-\circ\psi} \mathrm{Hom}_R(M, K) \xrightarrow{-\circ\varphi} \mathrm{Hom}_R(M', K)$$

یک رشته‌ی دقیق از گروه‌های آبلی باشد.

اثبات. به قضیه ۳.۴ از فصل ۴، مرجع [۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۹.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت، هر R-مدول M، نقش همریخت یک R-مدول آزاد است و هر R-مدول آزاد تصویری است.*

اثبات. به قضیه ۳.۳ از فصل ۴، مرجع [۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۳۰.۱.۱. *فرض کنیم Q یک R-مدول تزریقی باشد. در این صورت اگر رشته‌ی*

$$\circ \longrightarrow M' \xrightarrow{\mu} M \xrightarrow{\lambda} M'' \longrightarrow \circ$$

دقیق باشد. آن‌گاه رشته‌ی

$$\circ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', Q) \xrightarrow{-\circ\lambda} \mathrm{Hom}_R(M, Q) \xrightarrow{-\circ\mu} \mathrm{Hom}_R(M', Q) \longrightarrow \circ$$

یک رشته‌ی دقیق از گروه‌های آبلی است.

اثبات. به قضیه ۶.۴ از فصل ۴، مرجع [۴] مراجعه کنید.

□

قضیه ۳۱.۱.۱. *فرض کنیم $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی از حلقه‌ها باشد. در این صورت اگر M یک R-مدول تزریقی باشد. آن‌گاه $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ یک S-مدول تزریقی است.*

اثبات. به نتیجه ۳.۱.۶ از فصل ۳، مرجع [۲] مراجعه کنید.

□

تعریف ۳۲.۱.۱. R-مدول M را یک *مدول به‌طور متناهی نمایش‌پذیر* می‌نامیم هرگاه اعداد طبیعی m و n و رشته‌ی دقیق

$$R^n \longrightarrow R^m \longrightarrow M \longrightarrow \circ$$

از R-مدول‌ها موجود باشد.

تعریف ۳۳.۱.۱. R- مدول M را یک *مدول به‌طور متناهی تولیدشده* می‌نامیم هرگاه عدد طبیعی m و رشته‌ی دقیق

$$R^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

از R- مدول‌ها موجود باشد.

مثال ۳۴.۱.۱. فرض کنیم $\mathrm{mod}R$ خانواده‌ی R- مدول‌های به‌طور متناهی نمایش‌پذیر باشد. به ازای هر $M, N \in \mathrm{mod}R$، $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ مجموعه‌ی تمام ریخت‌های $f : M \longrightarrow N$ است. به آسانی دیده می‌شود که $\mathrm{mod}R$ یک رسته است.

تعریف ۳۵.۱.۱. رشته‌ی $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{\mu} M'' \longrightarrow 0$ از R- مدول‌ها را یک *رشته‌ی دقیق محض* می‌نامیم هرگاه، برای هر R- مدول راست N، رشته‌ی

$$0 \longrightarrow N \otimes_R M' \xrightarrow{1_N \otimes \lambda} N \otimes_R M \xrightarrow{1_N \otimes \mu} N \otimes_R M'' \longrightarrow 0$$

یک رشته‌ی دقیق باشد.

در این حالت $\lambda M' \subset M$ را یک *زیر مدول محض* می‌نامیم.

قضیه ۳۶.۱.۱. (کوهن)[1]

فرض کنیم $\lambda : M' \longrightarrow M$ یک تکریختی از R- مدول‌ها باشد. در این صورت $\lambda M'$ یک زیر مدول محض از M است اگر و تنها اگر برای هر نمودار جابجایی

$$\begin{tikzcd}
 & F_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & F_0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\lambda"] & M
\end{tikzcd}$$

نگاشت $\beta : F_0 \longrightarrow M'$ موجود باشد به‌طوری‌که $\gamma = \beta \circ \alpha$، که در آن F_0 و F_1 هر دو R- مدول‌های آزاد به‌طور متناهی تولیدشده هستند.

اثبات. به قضیه ۳.۶۹ از فصل ۳، مرجع [۷] مراجعه کنید. □

[1] Cohn

قضیه ۳۷.۱.۱. *فرض کنیم* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$ *یک رشته‌ی دقیق محض و* N *یک* R*- مدول به‌طور متناهی نمایش‌پذیر باشند، دراین‌صورت*

$$p_* : \mathrm{Hom}_R(N, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, M'')$$

یک همریختی پوشاست.

اثبات. به لم ۳.۷۰ از فصل ۳، مرجع [۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۳۸.۱.۱. R- مدول P را *تصویری محض* می‌نامیم هرگاه برای هر رشته‌ی دقیق محض

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\mu} M \xrightarrow{\lambda} M'' \longrightarrow 0$$

رشته‌ی

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M') \xrightarrow{\mu\circ -} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{\lambda\circ -} \mathrm{Hom}_R(P, M'') \longrightarrow 0$$

یک رشته‌ی دقیق از گروه‌های آبلی باشد.

تعریف ۳۹.۱.۱. R- مدول Q را *تزریقی محض* می‌نامیم هرگاه برای هر رشته‌ی دقیق محض

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\mu} M \xrightarrow{\lambda} M'' \longrightarrow 0$$

رشته‌ی

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', Q) \xrightarrow{-\circ\lambda} \mathrm{Hom}_R(M, Q) \xrightarrow{-\circ\mu} \mathrm{Hom}_R(M', Q) \longrightarrow 0$$

یک رشته‌ی دقیق از گروه‌های آبلی باشد.

گزاره ۴۰.۱.۱. *هر* R*- مدول به‌طور متناهی نمایش‌پذیر یک مدول تصویری محض است.*

اثبات. بنابر تعریف ۳۸.۱.۱ و گزاره‌ی ۳۷.۱.۱ واضح است. □

قضیه ۴۱.۱.۱. *فرض کنیم* M *یک* R*- مدول تصویری محض باشد. در این صورت* R*- مدول* K *موجود است به‌طوری که* $M \bigoplus K \cong \bigoplus_{\alpha\in I} L_\alpha$*، که در آن* L_α *ها* R*- مدول‌های به‌طور متناهی نمایش‌پذیر هستند.*

اثبات. به نتیجه‌ی ۳، مرجع [۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۴۲.۱.۱. (*شرکت پذیری الحاقی*)
فرض کنیم R و S دو حلقه، A یک R-مدول راست، B یک $R-S$-مدول و C یک S-مدول راست باشند. در این صورت یکریختی

$$\mathrm{Hom}_S(A \bigotimes_R B, C) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$$

از گروه‌های آبلی وجود دارد.

اثبات. به قضیه ۲.۷۵ از فصل ۲، مرجع [۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۴۳.۱.۱. فرض کنیم M یک R-مدول باشد، $x \in M$ و $r \in R$. در این صورت می‌گوییم r در M، x را *عاد* می‌کند و می‌نویسیم $r \mid_M x$، اگر عضوی از M مثل y موجود باشد که $x = ry$. M را یک R-مدول *بخش‌پذیر* می‌نامیم هرگاه هر عضو R، که مقسوم‌علیه راست صفر نیست، هر عضو از M را عاد کند.

قضیه ۴۴.۱.۱. *فرض کنیم R حوزه ایده‌آل اصلی و M یک R-مدول باشد. در این صورت M تزریقی است اگر و تنها اگر بخش‌پذیر باشد.*

اثبات. به قضیه ۵ از فصل ۹، مرجع [۹] مراجعه کنید. □

قضیه ۴۵.۱.۱. *فرض کنیم M یک R-مدول بخش‌پذیر و N زیر مدولی از آن باشد. در این صورت $\frac{M}{N}$ بخش‌پذیر است.*

اثبات. به قضیه ۶ از فصل ۹، مرجع [۹] مراجعه کنید. □

تعریف ۴۶.۱.۱. فرض کنیم E یک R-مدول تزریقی باشد. در این صورت E را یک *مدول تزریقی هم‌مولد* برای هر R-مدول می‌نامیم هرگاه، برای هر R-مدول ناصفر M، ریخت ناصفری مانند

$$f : M \longrightarrow E$$

موجود باشد.