بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شیراز

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته آمار ریاضی

انتخاب مدل به روش چگالی شرطی و مقایسه آن با روش فاکتور بیز

توسط:
مریم اسدسنگابی

استاد راهنما:
دکتر عبدالرسول برهانی حقیقی

مهر ماه ۸۷

به نام خدا

انتخاب مدل به روش چگالی شرطی و مقایسه آن با روش فاکتور بیز

به وسیله‌ی:

مریم اسدسنگابی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیت‌های لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

آمار ریاضی

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: عالی

دکتر عبدالرسول برهانی حقیقی، استادیار بخش آمار (رئیس کمیته)..

دکتر مینا توحیدی، استادیار بخش آمار..

دکتر امین قلمفرسا مستوفی ، استادیار بخش آمار..

مهرماه ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادرم که هر آنچه هستم نتیجه تلاش های بی وقفه آنان است.

سپاسگزاری

حمد و سپاس عالم علم و معلوم را که هر چه هست از اوست. خالق یکتا که انسان را مسیری نمود پر فراز و نشیب، عقلی عطا فرمود تا به وسیله آن جویای علمی باشد که خود از آن آگاه است. اکنون که با یاری خداوند منان توانستم مرحله ای دیگر از زندگی را با موفقیت سپری نمایم، وظیفه خود می دانم از زحمات اساتید، بزرگواران و دوستان عزیز که همراهی و مساعدت آنان در به انجام رساندن این پایان نامه نقش بسزایی داشته، تقدیر وتشکر نمایم. از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر عبدالرسول برهانی حقیقی، که افتخار راهنمایی این پایان نامه را به اینجانب دادند و با صبر و سعه صدر و دقت علمی فراوان، مرا در این زمینه یاری نمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از اساتید گرامی سرکار خانم دکتر مینا توحیدی و جناب آقای دکتر امین قلمفرسا که با پیشنهادات سازنده خود مرا یاری نمودند، سپاسگزارم. در نهایت از تمام دانشجویان گرامی و دوستان عزیزم که مرا در طی دوران تحصیل یاری داده اند، تشکرمی کنم و برای تمامی این عزیزان، آرزوی توفیق روز افزون دارم.

چکیده

انتخاب مدل به روش چگالی شرطی و مقایسه آن با روش فاکتور بیز

به وسیله ی:

مریم اسدسنگابی

معمولاً انتخاب یک مدل مناسب از بین مدل های متفاوت آماری، از مشکلات اساسی محققـان، در علوم مختلف می باشد. استفاده از یک محک مناسب، می تواند در این راستا، بـه مـا کمـک کند. یکی از این محک ها، فاکتور بیز می باشد. محک ذکر شده، هنگامی که مدل ها به خانواده های مجزا تعلق داشته باشند، روشی مفید جهت انتخاب مدل مناسب از بین مدل های متفاوت است. محک دیگری که می تواند در انتخاب مدل به ما کمک کند، روش چگالی شـرطی اسـت. این روش بر اساس محک بیشترین مقدار چگالی شرطی است، هنگامی که آمـاره بـسنده بـرای پارامتر مدل داده شده باشد. محک ذکر شده هنگامی که چگالی ها متعلـق بـه خـانواده سـری توانی باشند، روشی مفید جهت انتخاب مدل است و محاسبات را بسیار ساده می کند. بـر ایـن اساس این پایان نامه دارای چهار فصل می باشد. محک فاکتور بیز و نحوه تفـسیر آن در فـصل اول ارائه می گردد. در ادامه جهت غلبه بر مشکلات و تناقض هایی که آنالیز بیزی با آن مواجـه است، به معرفی فاکتورهای جایگزین بیز پرداخته می شود. در فصل دوم محک چگالی شـرطی بررسی می شود. در این فصل پس از معرفی خانواده چگالی های سری توانی، به معرفی مفاهیم پایه پرداخته می شود. در ادامه با ارائه چند قضیه و مثال مزایای استفاده از این محـک بررسـی می شود. در فصل سوم به مقایسه دو محک ذکر شده، با استفاده از چنـد مثـال شـبیه سـازی، پرداخته می شود. و در نهایت، در فصل چهارم، نتیجه گیری کلی ارائه می گردد.

فهرست مطالب

عنوان .... صفحه

فصل اول: انتخاب مدل به روش فاکتور بیز ۱

۱ – ۱ – مقدمه ۲
۲ – ۱ – پیشینه تحقیق ۳
۳ – ۱ – فاکتور بیز ۳
۴ – ۱ – تفسیر فاکتور بیز ۸
۵ – ۱ – معرفی فاکتور بیز پسین ۱۰
۱ – ۵ – ۱ – پارادوکس لیندلی ۱۰
۲ – ۵ - ۱ – فاکتور بیز پسین ۱۵
۶ – ۱ – معرفی فاکتور بیز جزئی ۱۶
۱ – ۶ – ۱ – فاکتور بیز جزئی ۱۶
۲ – ۶ – ۱ – انتخاب نمونه اصلاح شده ۱۸
۷ – ۱ – فاکتور بیز ذاتی ۲۱
۸ – ۱ – فاکتور بیز کسری ۲۴
۹ – ۱ – محاسبه فاکتورهای بیز برای توزیع های گاما، لگ نرمال و وایبل ۲۵

فصل دوم: انتخاب مدل به چگالی شرطی ۲۹

۱ – ۲ – مقدمه ۳۰
۲ – ۲ – پیشینه تحقیق ۳۰
۳ – ۲ – مفاهیم پایه و نتایج نظری ۳۱
۱ – ۳ – ۲ – مفاهیم پایه ۳۱
۲ – ۳ – ۲ – نتایج نظری ۳۲

فصل سوم: مقایسه روش فاکتور بیز و روش ماکزیمم چگالی شرطی ۴۴

۱ – ۳ – مقدمه ۴۵
۲ – ۳ – توزیع پوآسن(شبیه سازی) ۴۷
۳ – ۳ – توزیع هندسی ۵۰
۴ – ۳ – توزیع دو جمله ای منفی ۵۲
۵ – ۳ – فاکتور های بیز با توزیع پیشین سازگار ۵۴
فصل چهارم: نتیجه گیری ۶۴

ضمائم و پیوست ها ۶۶

پیوست اول ۶۷
پیوست ۱ – ۱ –محاسبات جدول های شماره ۴ ، ۵ و ۶ .... ۶۷
پیوست دوم ۶۹
پیوست ۱ – ۲ – برنامه مربوط به مثال ۱ – ۷ – ۱ .... ۶۹
پیوست ۲ – ۲ – برنامه مربوط به مثال ۵ – ۳ – ۲ .... ۷۰
پیوست ۳ – ۲ – برنامه های مربوط به شبیه سازی های فصل سوم.. ۷۲
واژه نامه ۸۳

واژه نامه فارسی – انگلیسی ۸۴
واژه نامه انگلیسی – فارسی ۸۸
فهرست منابع ۹۳

فهرست جدول ها

عنوان و شماره .... **صفحه**

جدول شماره ۱: طبقه بندی فاکتورهای بیز جهت تفسیر بر اساس پیشنهاد جفریز ۹

جدول شماره ۲: طبقه بندی اصلاح شده فاکتورهای بیز جهت تفسیر بر اساس پیشنهاد جفریز............ ۹

جدول شماره ۳: محاسبه فاکتورهای ذاتی بیز (مثال ۱-۷-۱) ۲۳

جدول شماره ۴: محاسبه فاکتورهای بیز برای توزیع گاما ۲۶

جدول شماره ۵: محاسبه فاکتورهای بیز برای توزیع لگ نرمال ۲۷

جدول شماره ۶: محاسبه فاکتورهای بیز برای توزیع وایبل ۲۸

جدول شماره ۷: تعداد دفعات انتخاب مدل به روش چگالی شرطی (مثال ۵-۳-۲) ۴۳

جدول شماره ۸: تعداد دفعات انتخاب مدل پوآسن به روش فاکتور بیز($n = 10$) ۴۷

جدول شماره ۹: تعداد دفعات انتخاب مدل پوآسن به روش فاکتور بیز($n = 20$) ۴۸

جدول شماره ۱۰: تعداد دفعات انتخاب مدل پوآسن به روش فاکتور بیز($n = 30$) ۴۹

جدول شماره ۱۱: تعداد دفعات انتخاب مدل هندسی به روش فاکتور بیز($n = 10$) ۵۰

جدول شماره ۱۲: تعداد دفعات انتخاب مدل هندسی به روش فاکتور بیز($n = 20$) ۵۱

جدول شماره ۱۳: تعداد دفعات انتخاب مدل دو جمله ای منفی به روش فاکتور بیز($n = 10$) ۵۲

جدول شماره ۱۴: تعداد دفعات انتخاب مدل دو جمله ای منفی به روش فاکتور بیز($n = 20$) ۵۳

جدول شماره ۱۵: مقادیر (a, b) به ازای مقادیر مختلف α و β ۵۶

جدول شماره ۱۶: تعداد دفعات انتخاب مدل پوآسن به روش فاکتور بیز با پیشین سازگار($n = 10$).. ۶۲

جدول شماره ۱۷: تعداد دفعات انتخاب مدل پوآسن به روش فاکتور بیز با پیشین سازگار($n = 20$).. ۶۳

فصل اول :

انتخاب مدل به روش فاکتور بیز

فصل اول : انتخاب مدل به روش فاکتور بیز

۱-۱- مقدمه

درعلوم مختلف معمولاً، یک محقق با مشکل اساسی انتخاب یک مدل در بین مدل های آماری مواجه است.تئوری نیمن، پیرسن در مورد آزمون های فرض هنگامی که مدل ها متعلّق به خانوادهٔ یکسانی ازچگالی ها باشند، می تواند به ما در این راستا کمک کند. در مقابل، اگر مدل ها به خانواده های مجزا تعلق داشته باشند، روش های خاصی مورد نیاز است. در این حالت دیگر نمیتوان یک عضو اختیاری از یک خانواده را به عنوان حد اعضای خانوادهٔ دیگر بدست آورد.

آنالیز بیزی، با دو مشکل اساسی برای استفاده از فاکتورهای بیز روبرو است. اولین مشکل این است که باید چگالی پیشین برای یک مدل و چگالی پیشین برای پارامترش با چگالی های پیشین مربوط به مدل های دیگر ارتباط داشته باشند. اگر فضای پارامتری دارای ابعاد مختلفی باشد وارتباط ساده ای بین پارامترها وجود نداشته باشد، آن گاه این مشکل، یک مشکل ساده نیست.

دومین مشکل این است که اگر اطّلاعات پیشین ضعیف باشد و از چگالی پیشین ناسره استفاده شده باشد، با مشکلات و تناقض هایی در استفاده از فاکتور بیز، مواجه میگردیم.

به منظورغلبه بر این مشکلات، استفاده از فاکتورهای جایگزین بیزی، که عبارت اند از:

فاکتور بیز ذاتی (Intrinsic Bayes factor)، فاکتور بیز پسین (Posterior Bayes factor)، فاکتور بیز کسری (Fractional Bayes factor)، فاکتور بیز جزئی (Partional Bayes factor) پیشنهاد شده است.

فاکتورهای بیز برای مقایسهٔ مدل های تفکیک شده مفید هستند. با استفاده از شبیه سازی تولید داده ها، برای نمونه های مختلف از توزیع ها، می توان نشان داد، هنگامی که دو مدل مناسب برای داده ها موجود است، فاکتور بیز، ساده ترین مدل را انتخاب می کند.

۲-۱- پیشینه تحقیق

روش استنباط بیزی برای آزمون های فرض به وسیله جفریز (Jeffres, ۱۹۳۵, ۱۹۶۱) گسترش یافت. جفریز روش خود را "آزمون معنی داری" نامید، که این نام ظاهراً برگرفته از تحقیقات فیشر می باشد. در سال های ۱۹۶۱ و ۱۹۶۲، کاکس (Cox, ۱۹۶۱ ۱۹۶۲)، تحقیقات گسترده ای روی خانواده های مجزا از فرض ها انجام داد. کاکس، با تعدیل روش ماکزیمم نسبت درستنمایی پیرسن، یک روش، برای نمونه های بزرگ، در حالت کلی ارائه کرد.

۳-۱- فاکتور بیز

کاکس (Cox, ۱۹۶۱)، روش های مختلف ممکن را برای مسائل کلّی از خانواده های مجزا از فرض ها مورد بررسی قرار می دهد. در یکی از این روش ها، استنباط بیزی مورد استفاده قرار می گیرد. فرض می کنیم که داده ها ی y، از یکی از توزیع ها تحت فرض H_0 یا H_1 تبعیّت می کند که در آن احتمال پیشین مدل تحت هر یک از فرض های H_0 یا H_1 به ترتیب برابر با $p(H_0)=\pi_0$ ،$p(H_1)=\pi_1$ می باشد، که در آن

$$\pi_1=1-\pi_0 \qquad (۱-۳-۱)$$

و احتمال پسین فرض ها تحت H_0 و H_1 به ترتیب برابر با $p(H_0\mid \underset{\sim}{y})$ و $p(H_1\mid \underset{\sim}{y})$ می باشد.

با استفاده از تئوری بیز داریم:

$$p\left(H_k\mid \underset{\sim}{y}\right)=\frac{p(\underset{\sim}{y}\mid H_k)\,\pi_k}{p(\underset{\sim}{y}\mid H_0)\,\pi_0+p(\underset{\sim}{y}\mid H_1)\,\pi_1} \qquad ;k=0,1$$

(۱-۳-۲)

در نتیجه بخت پسین برای H_0 در مقابل H_1 عبارت است از

$$\frac{p(H_0\mid \underset{\sim}{y})}{p(H_1\mid \underset{\sim}{y})}=\frac{\pi_0}{\pi_1}\cdot\frac{q_0(\underset{\sim}{y})}{q_1(\underset{\sim}{y})}=\frac{\pi_0}{\pi_1}\cdot\frac{\bar{l}_0^B}{\bar{l}_1^B}=\frac{\pi_0}{\pi_1}\cdot B_{01}(\underset{\sim}{y}) \qquad (۱-۳-۳)$$

که در آن

$$\bar{l}_j^B = q_j(\underset{\sim}{y}) = \int l_j(\alpha_j)\cdot \pi_j(\alpha_j) d\,\alpha_j \qquad ; j = 0,1$$

(۱-۳-۴)

که در آن $\pi_j(\alpha_j)$، چگالی پیشین α_j (α_j تحت H_j) است که آن را با $\pi_j(\alpha_j | H_j)$، نیزنشان می دهند و $l_j(\alpha_j)$ تابع درستنمایی برای چگالی $p_j(\underset{\sim}{y} | \alpha_j)$ می باشد .

B_{01}، فاکتور بیز(Bayes Factor) و یا وزن ملاک در داده ها ، برای فرض H_0 در مقابل H_1 است. $\bar{l}_j^B = q_j(\underset{\sim}{y})$، توزیع پیش بینی کننده، با احتمال پیشین $\pi_j(\alpha_j)$، برای پارامتر های H_j ; $j = 0,1$، می باشد. $q_j(\underset{\sim}{y})$ که مقدارش از انتگرال بالا (انتگرال توزیع توأم داده ها و توزیع α_j ها است.) به دست می آید، همان تابع چگالی کناری داده ها، به ازای داده های مشاهده شده، می باشد. به $q_j(\underset{\sim}{y})$، درستنمایی حاشیه ای یا درستنمایی انتگرال گیری شده نیز می گویند.

درنتیجه با توجه به فرمول(۳-۳-۱) می توان گفت؛

بخت پیشین × فاکتور بیز = بخت پسین (۱-۳-۵)

فاکتور بیز در واقع نسبت بخت پسین H_0 به بخت پیشین می باشد؛

$$B_{01} = \frac{\dfrac{p(H_0 | \underset{\sim}{y})}{p(H_1 | \underset{\sim}{y})}}{\dfrac{p(H_0)}{p(H_1)}} = \frac{p(\underset{\sim}{y} | H_0)}{p(\underset{\sim}{y} | H_1)} = \frac{\bar{l}_0^B}{\bar{l}_1^B} \qquad (۱-۳-۶)$$

اگر فرض H_0 و H_1 دارای احتمال های برابر در چگالی پیشین باشند؛ یعنی

$$p(H_0) = p(H_1) = 0.5 \qquad (۱-۳-۷)$$

آن گاه فاکتور بیز برابر است با بخت پسین.

در فرمول $q_j(\underset{\sim}{y})$، وجود توزیع $\pi_j(\alpha_j \mid H_j)$، $j = 0,1$، هم می تواند مفید باشد و هم مشکلاتی ایجاد کند.

مفید از این جنبه که، استفاده از این پیشین، راهی است که به وسیلهٔ آن می توان اطّلاعات دیگری را در مورد پارامترها مورد توجّه قرار داد. و ایجاد مشکل از این جنبه که، اگر اطّلاعات در دسترس نباشد، به سختی می توان این چگالی پیشین را حدس زد.

در این پایان نامه، فاکتورهای بیز رابرای آزمون های فرض زیر مورد توجه قرار می دهیم:

۱. فرض H_0 و H_1، هر دو ساده هستند.
۲. فرض H_0 و H_1، هردو مرکب هستند.
۳. فرض H_0 ساده ،فرض H_1مرکب است.

حالت اول : فرض های ساده

اگر H_0 و H_1 هر دو ساده باشند،

$$H_0 : \alpha = \alpha_0 \qquad\qquad H_1 : \alpha = \alpha_1$$

آن گاه فاکتور بیز برابر است با

$$B = \frac{f(\underset{\sim}{y};\alpha_0)}{f(\underset{\sim}{y};\alpha_1)} \qquad (۱-۳-۸)$$

حالت دوم : فرض های مرکب

اگر H_0 و H_1 هر دو مرکب باشند،

$$H_0 : \alpha \in \omega \qquad\qquad H_1 : \alpha \in \Omega - \omega$$

آن گاه فاکتور بیز برابراست با

$$B=\frac{f(\underset{\sim}{y}\mid H_0)}{f(\underset{\sim}{y}\mid H_1)}=\frac{\int_{\omega} f(\underset{\sim}{y};\alpha)\pi_0(\alpha)d\alpha}{\int_{\Omega-\omega} f(\underset{\sim}{y};\alpha)\pi_1(\alpha)d\alpha}$$

(۱-۳-۹)

حالت سوم : یک فرض ساده یک فرض مرکب

اگر H_0 ساده و H_1 مرکب باشد،

$$H_0:\alpha=\alpha_0 \qquad\qquad H_1:\alpha\neq\alpha_0$$

آن گاه فاکتور بیز برابراست با

$$B=\frac{f(\underset{\sim}{y};\alpha_0)}{\int_{\alpha\neq\alpha_0} f(\underset{\sim}{y};\alpha)\pi_1(\alpha)d\alpha}$$

(۱-۳-۱۰)

قضیه ۱-۳-۱:

اگر فرض صفر ساده ؛ و فرض یک مرکب باشد

$$H_0:\alpha=\alpha_0 \qquad\qquad H_1:\alpha\neq\alpha_0$$

و $f(y;\alpha)$ در $\alpha=\alpha_0$ پیوسته باشد، آنگاه

$$B=\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{P(\alpha\mid \underset{\sim}{y},H_1)}{P(\alpha\mid H_1)}$$

(۱-۳-۱۱)

اثبات:

فرض H_1 برقرار است اگر $\alpha\neq\alpha_0$ باشد، بنابراین با استفاده از شرط پیوستگی قضیه داریم:

$$f(\underset{\sim}{y} \mid H_0) = \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(\underset{\sim}{y}; \alpha) = \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(\underset{\sim}{y} \mid \alpha, H_1)$$

از طرفی

$$f(\underset{\sim}{y} \mid \alpha, H_1) = f(\underset{\sim}{y} \mid H_1) \cdot P(\alpha \mid \underset{\sim}{y}, H_1) \big/ P(\alpha \mid H_1)$$

بنابراین

$$\frac{f(\underset{\sim}{y} \mid H_0)}{f(\underset{\sim}{y} \mid H_1)} = \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{P(\alpha \mid \underset{\sim}{y}, H_1)}{P(\alpha \mid H_1)}.$$

این قضیه نشان می دهد که فاکتور بیز نسبت چگالی پسین به پیشین α، در α_0است، هنگامی که این چگالی ها روی H_1شرطی شده باشند.

همچنین قضیه فوق مشکلات استفاده از توزیع پیشین ناسره یا نا متناهی را در آزمون های فرض نشان می دهد. به عنوان مثال اگر $\alpha \sim N(\phi, \tau^2)$ باشد و $\tau \to \infty$، آنگاه پیشین نامتناهی است و $P(\alpha \mid H_1) \to 0$ در حالی که اگر نمونه مناسبی موجود باشد ، $P(\alpha \mid \underset{\sim}{y}, H_1) \neq 0$.

بنابراین فاکتور بیز و بخت پسین هر دو به بی نهایت میل می کنند.

مثال ۱-۳-۱:

فرض کنید $y_1, y_2, \ldots, y_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع پوآسن با پارامتر θ باشد و چگالی پیشین θ تحت فرض H_1 به صورت

$$P(\theta \mid H_1) = \alpha_2^{(\alpha_1+1)} \theta^{\alpha_1} \exp(-\alpha_2 \theta) / \Gamma(\alpha_1 + 1)$$

باشد،آنگاه برای آزمون فرض

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

فاکتور بیز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\int_{\theta \neq \theta_0} f(\underset{\sim}{y};\theta) p(\theta \mid H_1) d\theta = \frac{\alpha_2^{(\alpha_1+1)}\Gamma(\alpha_1 + \sum y_i + 1)}{(n+\alpha_2)^{\alpha_1+\sum y_i+1}\prod(y_i!)\Gamma(\alpha_1+1)}$$

$$B = \frac{\theta_0^{\sum y_i}(n+\alpha_2)^{(\alpha_1+\sum y_i+1)}\Gamma(\alpha_1+1)\exp(-n\theta_0)}{\alpha_2^{(\alpha_1+1)}\Gamma(\alpha_1+\sum y_i+1)}$$

با توجه به قضیه:

$$P(\theta \mid \underset{\sim}{y}, H_1) = (n+\alpha_2)^{(\alpha_1+\sum y_i+1)}\theta^{(\alpha_1+\sum y_i)}\exp(-(n+\alpha_2)\theta) \Big/ \Gamma(\alpha_1+\sum y_i+1)$$

$$B = \lim_{\theta \to \theta_0} \frac{(n+\alpha_2)^{(\alpha_1+\sum y_i+1)}\theta^{(\alpha_1+\sum y_i)}\exp(-(n+\alpha_2)\theta)}{\alpha_2^{(\alpha_1+1)}\theta^{\alpha_1}\exp(-\alpha_2\theta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+\sum y_i+1)}$$

$$= \frac{\theta_0^{\sum y_i}(n+\alpha_2)^{(\alpha_1+\sum y_i+1)}\exp(-n\theta_0)\Gamma(\alpha_1+1)}{\alpha_2^{(\alpha_1+1)}\Gamma(\alpha_1+\sum y_i+1)}$$

۴-۱- تفسیر فاکتور بیز

فاکتور بیز، $B_{01}(\underset{\sim}{y})$، نمایانگر ارزش شهودی در داده ها به نفع H_0 در مقابل H_1 است، که برای انتخاب یک مدل در مقابل مدل دیگر به کار می رود. باید توجه داشت که رابطه $B_{01}(\underset{\sim}{y})$ و $B_{10}(\underset{\sim}{y})$ به صورت $B_{01}(\underset{\sim}{y}) = \frac{1}{B_{10}(\underset{\sim}{y})}$ است.

جفریز (Jeffreys, ۱۹۶۱) پیشنهاد نمود که $\log_{10}(B_{10})$ بر اساس مبنای مقیاس نصف واحد محاسبه شود و بر این اساس تفسیر خود را استوار نمود.

جدول زیر پیشنهاد او را تفسیر می کند:

جدول (۱)

$\log_{10}(B_{10})$	B_{10}	شواهد رد H_0
۰ تا ۰/۵	۱ تا ۳/۲	ارزشی بیش از یک اشار ساده ندارد.
۰/۵ تا ۱	۳/۲ تا ۱۰	قابل توجّه
۱ تا ۲	۱۰تا ۱۰۰	قوی
>۲	> ۱۰۰	قابل تصمیم گیری

در این جا ما در مورد B_{10} صحبت کردیم زیرا معمولاً به دنبال سنجیدن شواهد بر خلاف فرض صفر هستیم. ولی به وسیلهٔ فاکتور بیز می توان شواهدی در جهت فرض صفر نیز پیدا کرد. البتّه باید متذکّر شد که نحوهٔ تفسیر ما بستگی به موضوع مورد نظر نیز دارد.

استفاده از دو برابر لگاریتم طبیعی فاکتور بیز، نیز که مقیاس یکسانی با شیوه های آشنا وآزمون نسبت درستنمایی دارد، مفید است.

با سرراست کردن مقادیر و استفاده از ۲۰ به جای ۱۰، در جدول (۱-۴-۱)، هنگامی که می خواهیم قویاً تصمیم گیری کنیم می توان به جدول تصحیح شدهٔ زیر رسید:

جدول(۲)

$2\log_e(B_{10})$	B_{10}	شواهد رد H_0
۰ تا ۲	۱ تا ۳	ارزشی بیش از یک اشار ساده ندارد.
۲تا ٦	۳ تا ۲۰	مثبت
٦ تا ۱۰	۲۰تا ۱۵۰	قوی
>۱۰	> ۱۵۰	خیلی قوی

روش استفاده از فاکتور بیز دارای دو محدودیّت اصلی است:

۱. دانش پیشین که به وسیلهٔ π_0 و $\pi_0(\alpha_0)$ بیان شده است باید با π_1 و $\pi_1(\alpha_1)$ ارتباط داشته باشند.

اگر به عنوان مثال فضای پارامتر دارای ابعاد متفاوتی باشد آن گاه هیچ ارتباط ساده ای بین پارامترها موجود نیست.

۲. اگر اطّلاعات پیشین ضعیف باشد و یک پیشین ناسره داشته باشیم، فاکتورهای بیز معمول نمی تواند خوش تعریف باشد.

برای مقابله با این مشکلات به بررسی فاکتورهای دیگری از بیز می پردازیم.

۵-۱- معرفی فاکتور بیز پسین

۱-۵-۱- پارادوکس لیندلی (Lindley Paradox)

فرض کنید که داده ها، تحت فرض H_0، دارای مدل M_0 و تحت فرض H_1 دارای مدل M_1 باشند. همان گونه که گفته شد، در کار کردن با فاکتورهای بیز، نیازمند به دانستن اطّلاعات در مورد چگالی پیشین $\pi_j(\alpha_j)$ و احتمال پیشین مدل، π_j هستیم.

در این حالت بخت پسین، روی مدل صفر برابر است با:

$$\frac{p(M_0 \mid \underset{\sim}{y})}{p(M_1 \mid \underset{\sim}{y})} = \frac{\bar{l}_0^B \cdot \pi_0}{\bar{l}_1^B \cdot \pi_1} \qquad (۱-۵-۱)$$

و فاکتور بیز برابر است با :

$$B_{01} = \frac{\bar{l}_0^B}{\bar{l}_1^B} \qquad (۱-۵-۲)$$

و

$$\bar{l}_j^B = \int l_j(\alpha_j) \cdot \pi_j(\alpha_j) d\alpha_j \qquad (۱-۵-۳)$$

باید توجّه داشت که اگر عقیدهٔ شخصی که در مورد α_j، برای تعریف $\pi_j(\alpha_j)$ وجـود دارد، خوب تعریف نشده باشد، بایداین چگالی پیشین به طریق منطقی مشخّص شود.

در حالتی که فضای پارامتری کراندار نباشد ممکن است که استفاده از فاکتور بیز منجر به پارادوکس لیندلی (Lindley, ۱۹۵۷) گردد. که در زیر به آن اشاره می شود:

فرض کنید M_0 مدلی باشد که درآن:

$$Y \sim N(\mu_0, \sigma^2) \qquad (۱-۵-۴)$$

و M_1 مدلی باشد که در آن :

$$Y \sim N(\mu_1, \sigma^2) \qquad (۱-۵-۵)$$

و μ_0 و σ^2 معلومند ولی μ_1 نامعلوم است.

اگر اطّلاعات پیشین در مورد μ_1 مبهم باشد، آن گاه پیشین یکنواخت زیـر را بـرای μ_1 در نظر می گیریم:

$$\pi(\mu_1) = \frac{1}{2c} \qquad \mu_1 \in (-c, c) \qquad (۱-۵-۶)$$

(برای c بزرگ)

آن گاه فاکتور بیز برای M_0 به M_1 از یـک نمونـهٔ n تـایی از مـشاهدات بـه صـورت زیـر محاسبه می شود:

$$B_{01} = \frac{(\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{\frac{n}{2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (y_i - \mu_0)^2)}{\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} (\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{\frac{n}{2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (y_i - \mu_1)^2) d\mu_1}$$