بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

مدول‌های قویا گرنشتاین

تدوین

محمد حسین کشاورز

استاد راهنما

دکتر عبد الجواد طاهری زاده

اسفند ۱۳۸۸

تقدیم به دو گوهر فروزان زندگیم :

پدر بزرگوارم و مادر مهربانم

آنانکه دریای بیکران مهر خود را بر من ارزانی داشتند، امید آنکه قطره ای از دریای محبتشان را پاسخگو باشم .

نخست سپاس خداوندی را که عاشقانه آفرید، سخاوتمندانه بخشید و صادقانه هدایت کرد.

سپاس پدری را که در سایه سار حمایت بی دریغش خواستن را آزمودم، تلاش را آموختم و هدف را یافتم.

سپاس مادری را که با تکیه بر مهر پاکش خواسته ها را خواستم، زندگی را زیستم و امیدها را یافتم.

بر خود می بالم که در مسیر نگارش پایان نامه ام فرصتی دست داد تا افتخار علم آموزی نزد استاد فرهیخته جناب آقای **دکتر عبدالجواد طاهری زاده** را در کارنامه ی علمی خود بنگارم که در تنگنای این مسیر حمایت و راهنمایی دلسوزانه ی ایشان همواره دلگرمی و پشتوانه ی سترگی بود که اشتیاق آموختن را در من تقویت کرد.

افتخاری بس ارزشمند را ارج می نهم که استاد گرانقدر جناب آقای **دکتر حسین ذاکری**، پایان نامه ام را به قضاوت و داوری نشست و آموخته هایم را با محک دانشش سنجید. همچنین از جناب آقای **دکتر سید احمد موسوی** که زحمت داوری خارجی را قبول نمودند، کمال تشکر را دارم.

فرصتی است تا ابراز تشکری داشته باشم از اساتید ارجمندم آقایان دکتر بیژن زاده، دکتر جمالی، دکتر دیبایی، دکتر عالم زاده و دکتر آلاکی که در طول این دو سال همواره در محضرشان بوده ام.

در پایان تشکر می کنم از دوستان عزیزم آقایان علی جمشیدی، مجتبی علیزاده، حسن صادقی، محمد نورمحمدی، علی محمد شورچه، محمد فرزامیانی جو و محسن ذوالقدر. همچنین از خانم مرضیه کمالی سروستانی کمال تشکر را دارم.

چکیده

مدول‌های قویا گرنشتاین حالتی خاص از مدول‌های گرنشتاین هستند که توسط دریس بنیس[1] و نجیب محدو[2] در مقاله ی مرجع [4] معرفی شده‌اند. در این پایان نامه به بررسی کاربردهای مدول‌های قویا گرنشتاین می‌پردازیم و نشان می‌دهیم این مدول‌ها ابزاری مناسب برای تعمیم نتایج جبر همولوژی کلاسیک به جبر همولوژی گرنشتاین هستند. همچنین تعمیمی از مدول‌های قویا گرنشتاین به نام مدول‌های n–قویا گرنشتاین را معرفی می کنیم. تمامی نتایج در فصل های اصلی بر اساس دستاوردهای بنیس و محدو در مقالات مرجع [5,7,8] تنظیم شده است.

واژه‌های کلیدی: بعدهای همولوژیک کلاسیک، بعدهای همولوژیک گرنشتاین، مدول‌های قویا گرنشتاین انژکتیو و تصویری، مدول‌های n–قویا گرنشتاین تصویری و نتایج تغییر حلقه‌ها.

رده بندی موضوعی ریاضی (۲۰۰۰): 13D02، 13D05، 13D07، 16E05، 16E10، 16E30، 16E65.

---

[1] Driss Bennis

[2] Najib Mahdou

مقدمه

جبر جابه‌جایی یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات است که نقش اساسی در دیگر شاخه‌های ریاضیات نظیر هندسه‌ی جبری و هندسه‌ی تحلیلی مختلط ایفا می‌کند.

همانند سایر مباحث ریاضی، در جبر جابه‌جایی هم سئوالاتی مطرح می‌شوند که پاسخ دادن به آن‌ها تنها با ابزارهای جبر جابه‌جایی غیرممکن و یا دست کم بسیار دشوار است. از آن جمله می‌توان به حدس کرول [۳] [34,Theorem 9.59] اشاره نمود: اگر حلقه‌ی موضعی و نوتری (R, m, k) منظم باشد، آن‌گاه برای هر $p \in SpecR$، R_p منظم است. این حدس پس از تلاش فراوان توسط آوسلندر [۴] و بوکسبام [۵] با استفاده از روش‌های همولوژیکی اثبات شد. در حقیقت جبر همولوژی ابزارهایی را در اختیار قرار می‌دهد که با استفاده از آن‌ها برخی از مطالب جبر جابه‌جایی را به راحتی می‌توان نتیجه گرفت.

یکی از قضایای مهم جبر همولوژی که در اثبات حدس کرول نیز مورد استفاده قرار گرفت، قضیه دسته‌بندی سِر، [12, 2.2.7] و [32, 19.2]، می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌شود:

قضیه سِر [۶]: اگر (R, m, k) یک حلقه موضعی جابه‌جایی باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

۱) R یک حلقه منظم است؛

۲) $\mathrm{pd}_R(k) < \infty$؛

۳) برای هر R–مدول متناهی مولد M، $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$؛

۴) برای هر R–مدول M، $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$.

در سال ۱۹٦۰ باس [۷] ضمن معرفی حلقه‌های گرنشتاین [۸] ثابت کرد که هر حلقه‌ی منظم یک حلقه‌ی گرنشتاین است. بنابراین محققین درصدد برآمدند تا قضیه‌ی دسته‌بندی سِر را به طور مشابه برای حلقه‌های گرنشتاین نیز مطرح سازند. ولی در این میان یک خلأ بسیار بزرگ احساس می‌شد و آن این بود که چه

[۳] Krull
[۴] Auslander
[۵] Buchsbaum
[۶] Serre
[۷] Bass
[۸] Gorenstien

چیزی را باید به جای بعد تصویری جایگزین کرد. تلاش در این مورد در سال ۱۹۶۹ توسط آوسلندر برای مدول‌های متناهی مولد روی حلقه‌های نوتری جواب داد.

در ادامه‌ی کار، آوسلندر و بریدگر[۹] در [1] ضمن معرفی کلاس جدیدی از مدول‌ها، بعد جدیدی را مطرح ساختند و این کلاس از مدول‌ها را مدول‌های از بعد گرنشتاین صفر نامیدند و ضمن تعریف تحلیل‌های گرنشتاین، بعد گرنشتاین را برای مدول‌های متناهی مولد روی حلقه‌های نوتری جابه‌جایی معرفی نمودند و قضیه زیر را ثابت کردند:

قضیه: اگر (R,m,k) یک حلقه‌ی موضعی و نوتری باشد، آن‌گاه

۱) R حلقه‌ی گرنشتاین است؛

۲) $\text{G-dim}_R(k) < \infty$؛

۳) برای هر R–مدول متناهی مولد M، $\text{G-dim}(M) < \infty$.

توجه شود که شرط آخر قضیه‌ی سِر در این قضیه آورده نشده است.

آن‌ها ضمن بررسی خواص اساسی این کلاس از مدول‌ها، ثابت کردند، [14, 1.1.11]، که کلاس مدول‌های از بعد گرنشتاین صفر توسیع سره‌ای از کلاس مدول‌های تصویری متناهی مولد روی حلقه‌های نوتری می باشد. بنابراین سعی نمودند تا نتایجی که برای بعد تصویری بیان شده است را برای بعد گرنشتاین ثابت کنند. از جمله‌ی این نتایج که موفق به اثبات آن در مورد بعد گرنشتاین شدند، قضیه‌ی تساوی آوسلندر_بوکسبام است که به صورت زیر بیان می‌شود:

قضیه: فرض کنید (R,m,k) یک حلقه‌ی موضعی و نوتری و M یک R–مدول متناهی مولد باشد. در این صورت اگر $\text{G-dim}_R k < \infty$، آن‌گاه تساوی زیر را داریم:

$$\text{G-dim}_R(M) = \text{depth} R - \text{depth}_R(M).$$

پس در حقیقت تساوی آوسلندر_بریدگر، [14, Theorem 1.4.8]، برای بعد گرنشتاین توسیعی از قضیه تساوی آوسلندر_بوکسبام، [12, Theorem 1.3.3]، برای بعد تصویری است.

---

[۹] Bridger

اما نتایجی نیز برای بعد تصویری وجود دارند که نمی‌توان آن‌ها را به بعد گرنشتاین توسیع داد. از جمله‌ی این نتایج می‌توان به قضیه‌ی اشتراک [10]، [12, Corollary 9.4.6]، اشاره نمود:

قضیه: فرض کنید (R, m, k) یک حلقه‌ی موضعی و نوتری باشد و M و N دو $R-$مدول متناهی مولد بوده و $\mathrm{pd}_R(M) < \infty$، در این صورت

$$\dim_R N \leq \mathrm{pd}_R M + \dim_R(M \otimes_R N).$$

اما کار هنوز به پایان نرسیده بود، بعد گرنشتاین فقط روی مدول‌های متناهی مولد مطرح می‌شود در حالی که قضیه دسته‌بندی سِر روی تمام $R-$مدول‌ها می باشد.

بالاخره در سال ۱۹۹۳ ایناکس [11] و جندا [12] کلاس جدیدی از مدول‌ها را معرفی کرده و آن‌ها را مدول‌های گرنشتاین تصویری نامیدند. آن‌ها برای بررسی خواص این کلاس از مدول‌ها، کلاس جدید دیگری به نام کلاس گرنشتاین معرفی نمودند که مدول‌های موجود در این کلاس خواصی مشابه با خواص مدول های از بعد گرنشتاین صفر داشتند با این تفاوت که دیگر لزومی نداشت مدول‌ها، متناهی مولد باشند. همچنین به صورت مشابه تحلیل گرنشتاین تصویری و بعد گرنشتاین تصویری را معرفی نمودند و ثابت کردند که کلاس مدول‌های گرنشتاین تصویری توسیعی از کلاس مدول‌های از بعد گرنشتاین صفر است. در سال ۲۰۰۰، آوراموف [13] و دیگران ثابت کردند که روی حلقه‌ی نوتری برای مدول‌های متناهی مولد، بعد گرنشتاین و بعد گرنشتاین تصویری با هم یکی هستند، بنابراین فرمول آوسلندر-بوکسبام در این مورد، برای بعد گرنشتاین تصویری نیز برقرار می‌باشد.

در واقع ایناکس، جندا و تورسیلا [14] در مراجع [15,16,18]، نظریه‌ی آوسلندر و بریدگر را توسعه دادند و سه بعد همولوژی، به نام‌های بعد گرنشتاین تصویری، انژکتیو و یکدست را مطرح کردند، که همه‌ی این‌ها توسط

[10] Intersection Theorem
[11] Enochs
[12] Jenda
[13] Avramov
[14] Torrecillas

بنیانگذاران این مفهوم‌ها و مولفینی نظیر آوراموف، کریستنسن[۱۵]، فاکسبی[۱۶]، هلم[۱۷]، فرانکلید[۱۸] و ژو[۱۹] به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفتند. (به [14,19,22,23] رجوع شود). آن‌ها نشان دادند که این مدول‌های همولوژیک گرنشتاین بسیاری از خواص مدول‌های همولوژیک کلاسیک را دارا هستند و خصوصا نسخه‌های جدیدی از قضیه‌ی دسته‌بندی سِر برای بعدهای تصویری، انژکتیو و یکدست، [6, 4.4.8, 5.2.10, and 6.2.7]، روی حلقه‌های کوهن-مکالی[۲۰] به دست آوردند. این سه بعد گرنشتاین از طریق تحلیل و به همان روشی که بعدهای همولوژی معمولی تعریف می‌شوند، در تعریف ۱.۳۶، ساخته می‌شوند که در فصل اول آورده شده‌اند.

در سال ۲۰۰۷ بنیس و محدو در مقاله‌ی مرجع [4] مفهوم مدول‌های قویا گرنشتاین تصویری، انژکتیو و یکدست را معرفی نمودند. آن‌ها ثابت کردند که یک مدول گرنشتاین تصویری (انژکتیو) است اگر و تنها اگر جمعوند مستقیم یک مدول قویا گرنشتاین تصویری باشد. همچنین نشان دادند هر مدول گرنشتاین یکدست، جمعوند مستقیم یک مدول قویاگرنشتاین یکدست است. البته عکس نیزبا شرط کوهرنت بودن R برقرار است. یعنی، هر جمعوند مستقیم یک $R-$مدول قویا گرنشتاین یکدست، گرنشتاین یکدست است.

یانگ[۲۱] و لی‌یو[۲۲] نیز در مقاله‌ی مرجع [36] ثابت کردند که مدول M قویا گرنشتاین تصویری (انژکتیو و یا یکدست) است اگر و تنها اگر برای هر $R-$مدول تصویری (انژکتیو و یا یکدست) H، $M \oplus H$ قویا گرنشتاین تصویری باشد.

کار اصلی ما در این پایان نامه بررسی سه مقاله‌ی کوتاه و مختصر از بنیس و محدو است که در راستای ایده‌ی آن‌ها در معرفی مفهوم مدول‌های قویا گرنشتاین قرار دارد. در فصل اول پایان نامه ضمن بیان خلاصه‌ای از جبر کلاسیک، گرنشتاین و قویا گرنشتاین به بیان قضایای کلاسیک تغییر حلقه‌ها می‌پردازیم. هر چند که در پاره‌ای از موارد ممکن است قضایای موجود نقشی در فصل‌های آتی نداشته باشند اما با این وجود متناسب با هدف ما در نشان دادن چگونگی تعمیم مطالب از حالت کلاسیک به حالت گرنشتاین انتخاب شده‌اند.

---

[۱۵] Cheristensen

[۱۶] Foxby

[۱۷] Holm

[۱۸] Franklid

[۱۹] Xu

[۲۰] Cohen-Macaulay

[۲۱] Yang

[۲۲] Liu

در فصل دوم تعمیم قضایای کلاسیک اول، دوم و سوم تغییر حلقه‌ها به جبر گرنشتاین را مورد توجه قرار می‌دهیم. در فصل‌های سوم و چهارم نیز به ترتیب به معرفی بعد سراسری گرنشتاین یک حلقه و مدول‌های n–قویا گرنشتاین تصویری می‌پردازیم. در ضمن در پایان فصل‌های دوم، سوم و چهارم تحت عنوان گام‌های بعدی به برخی از تحقیقات جدید انجام شده به طور مختصر اشاره می‌کنیم. مطالب بر اساس مقالات زیر تنظیم گردیده است:

۱) Bennis, D., Mahdou, N. *First, second, and third change of rings theorems for Gorenstein homological dimensions.* Accepted for publication in Comm. Algebra. Available from arxiv: 0812.2228v2.

۲) Bennis, D., Mahdou, N. (2010). *Global Gorenstein dimensions.* Proc. Amer. Math. Soc. 138:461-465.

۳) Bennis, D., Mahdou, N. (2009). *A generalization of strongly Gorenstein projective modules.* J. Algebra Appl. 8:219-227.

در مطالعه‌ی این پایان نامه لازم است به این نکته توجه شود که سبک ارجاع به مطالب مندرج در متن پایان نامه، به شیوه‌ی نگارش فارسی است. به عنوان نمونه برای ملاحظه‌ی قضیه‌ی ۳.۲ باید به فصل ۲، قضیه‌ی ۳ مراجعه شود. اما شیوه‌ی ارجاع به مراجع لاتین، به همان سبک لاتین است. مثلا برای ملاحظه‌ی [17, Theorem 2.1] باید به بخش دوم از مرجع شماره [17] مراجعه شود. همچنین از تمام عزیزانی که در نگارش این پایان نامه بدون ذکر نام از ایده‌های نگارشی و علمی آن‌ها استفاده نموده‌ام، متشکرم.

فهرست مندرجات

۱ جبر همولوژی گرنشتاین ۱

۲ نتایج تغییر حلقه‌ها ۴۱

۳ بعد کلی گرنشتاین ۶۳

۴ مدول‌های n–قویا گرنشتاین ۷۱

کتاب‌نامه ۸۷

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۹۱

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۹۶

فصل ۱

جبر همولوژی گرنشتاین

در این فصل، R نشان دهنده‌ی حلقه‌ای یکدار و نابدیهی است. همچنین تمام R−مدول‌ها، جز در موارد خاص، R−مدول‌های چپ یکانی هستند. همه‌ی نتایج و تعاریف نیز برای R−مدول‌های چپ تدوین شده است و تعاریف و نتایج نظیر آن‌ها برای R−مدول‌های راست برقرار است. در ضمن R-Mod نشان دهنده‌ی رسته‌ی تمام R−مدول‌های چپ یکانی است.

این فصل به ارائه‌ی پیش‌نیازها، تعاریف و مطالبی که در ادامه نیاز است، اختصاص دارد. البته در ارائه‌ی تعاریف و مفاهیم اولیه همواره فرض ما بر این است که خواننده با جبر پیشرفته و تا حدودی جبر همولوژی آشناست. بنابراین بخش عمده‌ای از این فصل به ارائه‌ی مفاهیم مربوط به جبر گرنشتاین اختصاص دارد. با این وجود بخشی از تعاریف جبر کلاسیک که متناسب با هدف ما در نشان‌دادن امکان تعمیم بسیاری از مفاهیم جبر کلاسیک به جبر گرنشتاین است، ارائه می‌شود. همچنین برای رعایت اختصار تا آنجا که خطر ابهام نباشد، نیازی به مشخص کردن حلقه‌ی R نیست. این فصل را با تعریف R−مدول‌های آزاد شروع می‌کنیم.

جبر کلاسیک

در این بخش مفاهیمی مختصر از جبر همولوژی کلاسیک را یادآوری می‌کنیم که خواننده‌ی آشنا با جبر همولوژی نیازی به مطالعه‌ی آن ندارد.

تعریف ۱.۱. R–مدول چپ F را آزاد گوییم در صورتی که F با مجموع مستقیم نسخه‌هایی از R–مدول چپ R، یکریخت R–مدول‌ها باشد.

قضیه ۲.۱. [26, Corollary 4.2.2]. هر مدول M روی حلقه‌ی R، نقش همریخت یک مدول آزاد مانند F است. همچنین هرگاه M با تولید متناهی باشد، آن‌گاه F را می‌توان با تولید متناهی اختیار کرد.

قضیه ۳.۱. [34, Theorem 3.9 and Corollary 3.10]. اگر F یک مدول آزاد باشد. آن‌گاه فانکتور $\mathrm{Hom}(F,-)$ دقیق است (یعنی، اگر $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی دقیق از R–مدول‌ها باشد، آن‌گاه $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F,N) \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی دقیق از گروه‌های آبلی است).

تعریف ۴.۱. R–مدول P را تصویری گوییم، در صورتی که برای هر نمودار

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \\ N & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

از R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها که سطر پایین آن کامل است، یک همریختی R–مدول‌ها مانند $h : P \longrightarrow N$ وجود داشته باشد به طوری که دیاگرام تکمیل شده جابه‌جایی باشد (یعنی، $f = gh$).
R–مدول‌های انژکتیو نیز به طور دوگان تعریف می‌شوند.

تعریف ۵.۱. یک همبافت مانند $\mathbf{A}$، دنباله‌ای از مدول‌ها به شکل

$$\mathbf{A} = \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

است که در آن برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $d_n d_{n+1} = 0$.
همچنین برای همبافت‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}'$، خانواده‌ی $(f_n : A_n \longrightarrow A_{n+1})$ از R–همریختی‌ها را نگاشتی زنجیری گوییم، اگر دیاگرام زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & A'_{n+1} & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

اگر F فانکتوری جمعی باشد، آن‌گاه

$$F\mathbf{A} = \cdots \longrightarrow FA_{n+1} \xrightarrow{Fd_{n+1}} FA_n \xrightarrow{Fd_n} FA_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

نیز یک همبافت است. به ویژه اگر $\mathbf{A}$، دنباله‌ای دقیق باشد ($\mathrm{Im}d_{n+1} = \ker d_n$)، آن‌گاه $F\mathbf{A}$ یک همبافت است.

خارج قسمتی $\ker(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$ را n–امین همولوژی مدول همبافت $\mathbf{A}$ نامیم و با $H_n(\mathbf{A})$ نشان می دهیم. حال اثر H_n بر نگاشت زنجیری $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} H_n(f): \quad & H_n(A) \longrightarrow H_n(A') \\ & z_n + \mathrm{Im}d_{n+1} \longrightarrow f_n z_n + \ker d'_n \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که H_n یک فانکتور از رسته‌ی همبافت‌ها به رسته‌ی گروه‌های آبلی است

قضیه ۱.۶. [34, Theorem 6.3]. (دنباله‌ی دقیق طولانی) .
فرض کنیم $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی دقیق از همبافت‌ها باشد. در این صورت دنباله‌ی دقیق زیر از مدول‌ها وجود دارد:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A') \xrightarrow{i_*} H_n(A) \xrightarrow{p_*} H_n(A'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A') \longrightarrow \cdots$$

تبصره ۱.۷. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R–مدول باشد. دنباله‌ی دقیق $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ که در آن P_iها R–مدول‌های تصویری هستند را یک تحلیل تصویری برای M نامیم. اگر P_iها آزاد باشند، آن‌گاه این دنباله‌ی دقیق، یک تحلیل آزاد برای M نامیده می‌شود. بر اساس [34, Theorem 3.8]، هر R–مدول M دارای یک تحلیل آزاد است. از طرفی بنابر قضیه‌ی [26, 3.2]، هر R–مدول آزاد، تصویری است. پس R–مدول M دارای یک تحلیل تصویری است. همچنین دنباله‌ی دقیق $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$ که در آن E^iها R–مدول‌های انژکتیو هستند را یک تحلیل انژکتیو برای M می‌نامیم. بنابر [34, Theorem 3.28]، هر R–مدول دارای یک تحلیل انژکتیو است. اگر در هر یک از تحلیل‌های فوق M را حذف کنیم، همبافت حاصل را یک همبافت تصویری یا انژکتیو حذفی نامیم.

تبصره ۸.۱. بر اساس [34, Theorems 2.9 and 2.10]، فانکتور پادورد $\mathrm{Hom}(-,M)$ و فانکتور $\mathrm{Hom}(M,-)$، دقیق چپ هستند. همچنین فانکتورهای $- \otimes M$ و $M \otimes -$ دقیق راست هستند. حال مطابق با نماد گذاری‌های مرجع [34]، مفاهیم مربوط به n–امین فانکتور مشتق شده‌ی راست و چپ را یادآوری می‌کنیم:

فرض کنیم N یک R–مدول راست باشد. برای هر مدول M، یکی از همبافت‌های تصویری حذفی‌اش مانند $\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-۱} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_۰ \xrightarrow{d_۰} ۰$ را در نظر می‌گیریم. با اثر دادن فانکتور $N \otimes -$ بر دنباله‌ی فوق، دنباله‌ی $\cdots \longrightarrow N \otimes P_۱ \longrightarrow N \otimes P_۰ \longrightarrow ۰$ را به دست می‌آوریم. اکنون برای هر $n \geq ۰$، خارج قسمتی $\ker(\mathrm{id}_N \otimes d_n)/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_N \otimes d_{n+۱})$ که در واقع n–امین همولوژی مدول این دنباله است را با $tor_n(N,M)$، نشان می‌دهیم. بنابر [34, Theorem 6.11]، این مدول مستقل از انتخاب تحلیل تصویری برای M است.

به طور مشابه با در نظر گرفتن یکی از همبافت‌های تصویری حذفی N می‌توان $\mathrm{Tor}_n(N,M)$ را تعریف نمود. همچنین برای مدول‌های A و C با در نظر گرفتن یکی از همبافت‌های انژکتیو حذفی مدول A و اثر دادن فانکتور $\mathrm{Hom}(C,-)$ بر روی آن، می‌توان $\mathrm{Ext}^n(C,A)$ را تعریف نمود.

حال اگر یکی از همبافت‌های تصویری حذفی C را در نظر بگیریم و فانکتور پادورد $\mathrm{Hom}(-,A)$ را بر آن اثر دهیم، می‌توان $ext^n(C,A)$ را تعریف نمود. نکات زیر به درک بهتر مطالب کمک شایانی می‌کنند:

۱) برای محاسبه‌ی $ext(C,A)$، از همبافت تصویری حذفی C استفاده می‌کنیم.

۲) برای محاسبه‌ی $\mathrm{Ext}(C,A)$، از همبافت انژکتیو حذفی A استفاده می‌کنیم.

بر اساس [34, Theorem 7.8 and corollary 7.9]، یکریختی‌های $\mathrm{Tor}(N,M) \cong tor(N,M)$ و $\mathrm{Ext}(C,A) \cong ext(C,A)$ برقرار است. از این‌رو دیگر تمایزی بین $\mathrm{Tor}(N,M)$ و $tor(N,M)$ قائل نمی‌شویم. همچنین تمایزی بین $\mathrm{Ext}(C,A)$ و $ext(C,A)$ قائل نمی‌شویم.

قضیه ۹.۱. [34, Corollary 6.13].

فرض کنیم M یک R–مدول و $\cdots \longrightarrow P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_۰ \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow ۰$ یک تحلیل تصویری برای M باشد.

اگر $K_\circ := \ker\varepsilon$ و $K_i := \ker d_i$، برای هر $i \geq ۱$، آن‌گاه برای هر R–مدول راست N داریم :

$$\mathrm{Tor}_{n+۱}(N,M) \cong \mathrm{Tor}_n(N,K_\circ) \cong \cdots \cong \mathrm{Tor}_۱(N,K_{n-۱}).$$

قضیه۱۰.۱. [34, Corollary 6.16]. فرض کنیم M یک R–مدول و $\circ \longrightarrow E^\circ \xrightarrow{d^\circ} E^۱ \longrightarrow \cdots$ یک تحلیل انژکتیو حذفی برای M باشد. اگر $L^i := \mathrm{Im} d^{i-۱}$، برای هر $i > \circ$، آن‌گاه برای هر R–مدول راست N داریم:

$$\mathrm{Ext}^{n+۱}(N,M) \cong \mathrm{Ext}^n(N,L^۱) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^۱(N,L^n).$$

قضیه۱۱.۱. [34, Horseshoe Lemma 6.20]. (لم نعل اسب).

فرض کنیم $\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \circ$ یک دنباله‌ی دقیق از R–مدول‌ها باشد. همچنین فرض کنیم $P_{M'} : \cdots \longrightarrow P'_۱ \longrightarrow P'_\circ \longrightarrow \circ$ تحلیلی تصویری برای M' و $P_{M''} : \cdots \longrightarrow P''_۱ \longrightarrow P''_\circ \longrightarrow \circ$ تحلیلی تصویری برای M'' باشد. در این صورت تحلیلی تصویری مانند $P_M : \cdots \longrightarrow P_۱ \longrightarrow P_\circ \longrightarrow \circ$ برای M و تبدیل‌های $P_{M'} \longrightarrow P_M$ و $P_M \longrightarrow P_{M''}$ به ترتیب روی f و g وجود دارند به طوری که رشته‌ی $\circ \longrightarrow P_{M'} \longrightarrow P_M \longrightarrow P_{M''} \longrightarrow \circ$ یک رشته‌ی دقیق و شکافته شده از همبافت‌ها است (یعنی، به ازای هر $i \geq \circ$، دنباله‌ی $\circ \longrightarrow P'_i \longrightarrow P_i \longrightarrow P''_i \longrightarrow \circ$ دقیق و شکافته شده است). دوگان قضیه نیز برقرار است.

قضیه۱۲.۱. [34, Theorems 6.21, 6.26, and 6.27].

فرض کنیم $\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \circ$ یک دنباله‌ی دقیق از مدول‌ها باشد. در این صورت

۱) برای هر R–مدول راست N، دنباله‌ی زیر دقیق است:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_۱(N,M'') \longrightarrow N\otimes M' \longrightarrow N\otimes M \longrightarrow N\otimes M'' \longrightarrow \circ$$

۲) برای هر R–مدول N، دنباله‌های زیر دقیق هستند:

$$\circ \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,M') \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,M'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^۱(N,M') \longrightarrow \cdots$$

$$\circ \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'',N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^۱(M'',N) \longrightarrow \cdots$$

قضیه ۱.۱۳. [17, Theorem 2.1.2 and Proposition 8.4.3]. شرایط زیر بر R–مدول P با هم معادلند:

۱) P تصویری است؛

۲) هر دنباله‌ی کامل کوتاه $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$، شکافته شده است (یعنی، $M \cong N \bigoplus P$)؛

۳) P جمعوند مستقیم یک مدول آزاد است (یعنی، مدول آزاد F و R–مدول K وجود دارند به طوری که $F \cong K \bigoplus P$)؛

۴) فانکتور $\mathrm{Hom}(P, -)$ دقیق است؛

۵) برای هر R–مدول M، $\mathrm{Ext}^1(P, M) = 0$؛

٦) برای هر R–مدول M و هر $n > 0$، $\mathrm{Ext}^n(P, M) = 0$.

بنابر [26, Proposition 4.3.5]، مجموع مستقیم مدول‌های تصویری، تصویری است. همچنین کاپلانسکی[1] در [29] نشان داد که هر مدول تصویری روی یک حلقه‌ی موضعی، آزاد است.

قضیه ۱.۱۴. [17, Theorem 3.1.2 and Proposition 8.4.4]. شرایط زیر بر R–مدول E با هم معادلند:

۱) E انژکتیو است؛

۲) هر دنباله‌ی کامل کوتاه $0 \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$، شکافته شده است؛

۳) E جمعوند مستقیم هر مدول M است که E زیر مدولی از آن باشد؛

۴) فانکتور پادورد $\mathrm{Hom}(-, E)$ دقیق است؛

۵) برای هر R–مدول N، $\mathrm{Ext}^1(N, E) = 0$؛

٦) برای هر R–مدول N و هر $n > 0$، $\mathrm{Ext}^n(N, E) = 0$؛

۷) برای هر ایده‌آل I از R، هر همریختی $I \longrightarrow E$ از R–مدول‌ها به یک همریختی $R \longrightarrow E$ از R–مدول‌ها توسیع می‌یابد (محک بئر[2]).

---

[1] Kaplansky

[2] Baer

تعریف ۱.۱۵. R−مدول M را بخش‌پذیر گوییم، در صورتی که برای هر $m \in M$ و هر $r \in R$ که مقسوم علیه صفر R نباشد، عنصری مانند $m' \in M$ موجود باشد به طوری که $m = rm'$.

بنابر قضیه‌ی [34, 3.23]، هر R−مدول انژکتیو بخش‌پذیر است. همچنین بنابر تمرین‌های [34, 3.14-17]، خاصیت بخش‌پذیری نسبت به خارج‌قسمت، جمعوند مستقیم، حاصلضرب مستقیم و مجموع مستقیم بسته است. در ضمن مدول M را روی دامنه‌ی صحیح R بی‌تاب (فارغ از تاب) گوییم اگر از صفر بودن rm، صفر بودن r یا m نتیجه شود ($r \in R$ و $m \in M$). بنابر تمرین [34, 3.19]، مدول بی‌تاب M بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر انژکتیو باشد.

تعریف ۱.۱۶. R−مدول F را یکدست گوییم، در صورتی که فانکتور $- \otimes_R F$ دقیق باشد.

قضیه ۱.۱۷. [34, Theorem 3.45]. هر R−مدول تصویری، یکدست است.

قضیه ۱.۱۸. [34, Theorems 3.52-54, 9.13, and 9.18]. شرایط زیر بر R−مدول F با هم معادلند:

۱) F یکدست است؛

۲) برای هر ایده‌آل راست I، $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, F) = 0$؛

۳) برای هرایده‌آل راست متناهی مولد I از R، $I \otimes F \cong IF$؛

۴) برای هرR−مدول چپ M، $\mathrm{Tor}_1(M, F) = 0$؛

۵) برای هرR−مدول چپ متناهی مولد M، $\mathrm{Tor}_1(M, F) = 0$؛

٦) R−مدول راست $F^* = \mathrm{Hom}_Z(F, Q/Z)$، مدول مشخص F، انژکتیو است.

تعریف ۱.۱۹. R−مدول M را با نمایش متناهی گوییم، در صورتی که R−مدول‌های آزاد و متناهی مولد F_0 و F_1 موجود باشند، به طوری که دنباله‌ی $F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ دقیق باشد.

بنابر قضیه‌ی [21, 2.1.4]، هر مدول متناهی مولد تصویری، با نمایش متناهی است. هر R−مدول با نمایش متناهی یکدست نیز تصویری است. همچنین اگر R حلقه‌ای نوتری چپ باشد، آن‌گاه هر مدول

متناهی مولد با نمایش متناهی است. حلقه‌ی R را کوهرنت[۳] چپ گوییم، در صورتی که هر ایده‌آل چپ متناهی مولد آن با نمایش متناهی باشد. برای نمونه هر حلقه‌ی نوتری چپ، کوهرنت است.

تعریف ۱.۲۰. فرض کنیم M یک R–مدول باشد. همچنین M دارای تحلیلی تصویری به شکل $0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ است. در این صورت گوییم بعد تصویری M حداکثر n است و می‌نویسیم $\mathrm{pd}(M) \leq n$. اگر چنین تحلیلی وجود نداشته باشد، گوییم M دارای بعد تصویری نامتناهی است. همچنین $\mathrm{pd}(M) = 0$ اگر و تنها اگر M تصویری باشد. در ضمن برای هر $n \geq 0$، هسته‌ی همریختی $P_n \longrightarrow P_{n-1}$ [۴] را n–امین هسته‌ی تحلیل $0 \longrightarrow M \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow \cdots$ گویند.

قضیه ۱.۲۱. [34, Theorem 9.5]. برای هر R–مدول M، گزاره‌های زیر با هم معادلند:

۱) $\mathrm{pd}(M) \leq n$؛

۲) برای هر R–مدول N و هر $k \geq n+1$، $\mathrm{Ext}^k(M,N) = 0$؛

۳) برای هر R–مدول N، $\mathrm{Ext}^{n+1}(M,N) = 0$.

۴) هر تحلیل تصویری برای M، دارای $(n-1)$–امین هسته‌ی تصویری است.

قضیه ۱.۲۲. [34, Exercises 9.7, 9.12, and lemma 9.26].

فرض کنید R یک حلقه و $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی دقیق از R–مدول‌ها باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) اگر دو تا از مدول‌ها دارای بعد تصویری متناهی باشند، آن‌گاه سومی نیز چنین است.

۲) اگر $\mathrm{pd}(M') = n < \infty$ و $\mathrm{pd}(M'') \leq n$، آن‌گاه $\mathrm{pd}(M) = n$.

۳) اگر M تصویری باشد، آن‌گاه یا هر سه مدول تصویری‌اند و یا $\mathrm{pd}(M'') = \mathrm{pd}(M') + 1$.

۴) $\mathrm{pd}(M) \leq \max\{\mathrm{pd}(M'), \mathrm{pd}(M'')\}$.

[۳] Coherent

[۴] $P_{-1} = M$.

۵) $\operatorname{pd}(M'') \leq 1 + \max\{\operatorname{pd}(M), \operatorname{pd}(M')\}$.

تعریف ۲۳.۱. فرض کنیم M یک R–مدول باشد. همچنین M دارای تحلیلی انژکتیو به شکل $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$ است. در این صورت گوییم بعد انژکتیو M حداکثر n است و می‌نویسیم $\operatorname{id}(M) \leq n$. اگر چنین تحلیلی وجود نداشته باشد، گوییم M دارای بعد انژکتیو نامتناهی است. در ضمن برای هر $n \geq 0$، برد همریختی $E^{n-1} \longrightarrow E^n$[5] را n–امین برد تحلیل $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$ گویند.

قضیه ۲۴.۱. [34, Theorem 9.8]. برای هر R–مدول M، گزاره‌های زیر با هم معادلند:

۱) $\operatorname{id}(M) \leq n$؛

۲) برای هر R–مدول N و هر $k \geq n+1$، $\operatorname{Ext}^k(N, M) = 0$؛

۳) برای هر R–مدول N، $\operatorname{Ext}^{n+1}(N, M) = 0$؛

۴) هر تحلیل انژکتیو برای M، دارای n–امین برد انژکتیو است.

تعریف ۲۵.۱.

۱) بعد سراسری تصویری چپ حلقه‌ی R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$lpD(R) = \sup\{\operatorname{pd}(M) | M \in R - Mod\};$$

۲) بعد سراسری انژکتیو چپ حلقه‌ی R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$liD(R) = \sup\{\operatorname{id}(M) | M \in R - Mod\}.$$

---

[5] $E^{-1} = M$.