بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای عبدالله آل‌هوز** رشته **ریاضی‌محض** تحت عنوان:

«شرط‌های پوچ‌سازی در مدول‌های آرمنداریز و حلقه‌های چندجمله‌ای اریب» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۲- استاد مشاور	دکتر محمد مهدوی‌هزاوه‌ای	استاد	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر داریوش کیانی	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر علی ایرانمنش	استاد	

آیین‌نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به این‌که چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیت‌های علمی- پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:
«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته
است که در سال در دانشکده دانشگاه تربیت مدرس
به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر
و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر
از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به‌علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتاب‌های عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **عبدالله آل‌هوز** دانشجوی رشته **ریاضی محض** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: **عبدالله آل‌هوز**

تاریخ و امضا: **۸۹/۱۱/۲۸**

A. A

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش‌های علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسان‌ها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهش‌های علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرح‌های تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان‌نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آن‌ها متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدیدآورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی به‌صورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **عبدالله آل‌هوز** دانشجوی رشته **ریاضی محض** ورودی سال تحصیلی ۸۷-۸۸ مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش‌های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می‌دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم.»

امضا: عبدالله آل‌هوز

تاریخ: ۱۳۸۹/۱۱/۲۸

A.A

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

شرط‌های پوچ‌سازی در مدول‌های آرمنداریز و حلقه‌های چندجمله‌ای اریب

توسط

عبدالله آل‌هوز

استاد راهنما

دکتر سید احمد موسوی

استاد مشاور

دکتر محمد مهدوی هزاوه‌ای

بهمن ۱۳۸۹

قدردانی

حمد و سپاس به درگاه آن یکتای بی‌همتا که قلم را قداست و انسان را کرامت بخشید و توانایی پیمودن راهی نه آسان را به بنده‌ی حقیر عنایت فرمود و شوق آموختن در گستره‌ی لایتناهی هستی را عطایم نمود. هیچ راهی آغاز نخواهد شد مگر با امید به همدلی همراهان، طی نخواهد شد جز با همپایان خستگی‌ناپذیر و به نهایت نخواهد رسید مگر به یاری دستان یاری‌گر. دشواری راه را بزرگانی آسان نمودند که دیدنشان افتخاری و حضور در خدمتشان در تصورات آرزو بود. این چند سطر فرصتی است کوتاه اما مغتنم جهت سپاس از این سروران گرامی. از آقای دکتر سید احمد موسوی، استاد فرهیخته‌ای که بی‌دانشی مرا با صبوری نواخت و رسم معلمی به رنج خود کفایت کرد، سپاس‌گزارم. مراتب امتنان و سپاس‌گزاری خویش را از استاد مشاور گرامی‌ام، جناب آقای دکتر محمد مهدوی هزاوه‌ای به جهت راهنمایی‌های ارزشمندشان در طول انجام پایان‌نامه ابراز نموده و سلامتی و توفیق روزافزون ایشان را آرزومندم. هم‌چنین از اساتید بزرگوار جناب آقایان دکتر داریوش کیانی و دکتر علی ایرانمنش که زحمت داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از آقای دکتر ابراهیم هاشمی به خاطر اولین درس جبر که از محضر ایشان آموختم و از آقای دکتر علی رجایی که در مدت اندکی که در خدمتشان بودم از ایشان بسیار آموختم، سپاس‌گزارم. درنهایت منت‌دار آنانم که نخست حق را بر من دارند، شرمسار رنج و خستگی نهفته در دیدگان پدر، مادر، برادر و خواهرانم هستم. زبان واژه قاصر است از تقدیر سخاوت بی‌منتهای پدر و مادر عزیزم که هماره صبورانه رنج‌های مرا به دوش می‌کشند. دست‌های گرم و مهربان آن‌ها را می‌بوسم، هرچند نثار آن‌ها به وجود حقیرم تا همیشه مهر است و مهر و پیشکش من به پای آن‌ها همه شرم است و شرم. در پایان، عذر تقصیر از دوستان و هم‌دوره‌ای‌های عزیزم و همه عزیزانی که صمیمانه دست‌هایم را فشردند و یاری‌گر من بودند اما نامی از آن‌ها در اینجا ذکر نشده است.

عبدالله آل‌هوز

بهمن ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

اسطوره های عشق، محبت، صبر، تلاش، فداکاری و از جان گذشتگی، پدر و مادر عزیزم که

نور شمع وجودشان امید بخش زندگی ام

گوهر سخنشان آرام بخش ذهنم

دست نوازشگرشان درمان دردهایم

و نگاه مهربانشان قوت قلبم می باشد

* * * * * * * * * * * * *

اساتید و معلمانی که افتخار شاگردیشان را داشته ام

* * * * * * * * * * * * *

و همه دوستان عزیزم که همواره به بنده لطف داشته و دارند

شرط‌های پوچ‌سازی در مدول‌های آرمنداریز و حلقه‌های چندجمله‌ای اریب

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر و یک‌دار، M یک R−مدول یکانی، α یک همریختی و δ یک α−مشتق روی حلقه‌ی R باشد. ابتدا، حلقه‌های آرمنداریز ضعیف و آرمنداریز پوچ را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم که در این حلقه‌ها عناصر پوچ‌توان حلقه خواص جالبی دارند. سپس، حلقه‌های مک‌کوی ضعیف را به عنوان تعمیمی از حلقه‌های مک‌کوی و آرمنداریز ضعیف معرفی کرده و ضمن بررسی خواص آن، رابطه‌ی آن با دیگر ساختارها را نیز بیان می‌کنیم. هم‌چنین این ساختار را روی حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\alpha,\delta]$ مورد بررسی قرار داده و حلقه‌ی مک‌کوی ضعیف اریب را تعریف می‌کنیم و شرایط کافی برای این‌که حلقه‌ی R مک‌کوی ضعیف اریب باشد را فراهم می‌کنیم. با آوردن مثال‌های متعدد و متنوع، رفتار حلقه‌های مک‌کوی ضعیف تحت برخی توسیع‌های حلقه‌ای را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. هم‌چنین، رادیکال‌های حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\alpha,\delta]$ را برحسب حلقه‌ی آرمنداریز اریب R به‌دست آورده و نشان می‌دهیم که اگر R حلقه‌ای آرمنداریز اریب و α درونریختی‌ای سازگار از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه حلقه‌ی R و هم‌چنین حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\alpha,\delta]$ در حدس کوته صدق می‌کنند. هم‌چنین در حالتی که R حلقه‌ای آرمنداریز اریب و α درونریختی‌ای سازگار از حلقه‌ی R می‌باشد، نشان می‌دهیم که بسیاری از شرط‌های پوچ‌سازی از حلقه‌ی R به حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ انتقال پیدا می‌کنند. ضمن معرفی برخی زیرحلقه‌های ماکسیمال نسبت به خاصیت آرمنداریز اریب از حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی، شرایط لازم و کافی برای این‌که توسیع بدیهی حلقه‌ی R، آرمنداریز اریب باشد را بیان می‌کنیم. در ادامه، رابطه‌ی بین R−مدول M_R و مدول چندجمله‌ای‌های $M[x]$ روی حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\alpha,\delta]$ را مطالعه خواهیم کرد. هم‌چنین، مفاهیم مدول آرمنداریزاریب و مدول شبه−آرمنداریز اریب را تعریف می‌کنیم که در واقع تعمیمی از مدول‌های α−آرمنداریز هستند و کلاس مدول‌های اریب غیرکاهشی را گسترش می‌دهند.

واژه‌های کلیدی : حلقه‌ی آرمنداریز ضعیف، حلقه‌ی آرمنداریز پوچ، حلقه‌ی مک‌کوی، حلقه‌ی مک‌کوی ضعیف، حلقه‌ی آرمنداریز اریب، مدول آرمنداریز اریب، مدول شبه−آرمنداریز اریب

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

در این فصل مفاهیمی را که در طول این پایان‌نامه با آن‌ها سروکار داریم، به اختصار بیان می‌کنیم. اکثر لم‌ها و قضایای این فصل با این فرض که خواننده احتمالاً با آن‌ها آشناست بدون اثبات آورده شده‌اند.

۱.۱ تعریف و لم

تعریف ۱.۱.۱ . عضو a را در حلقه‌ی R **خودتوان** گویند هرگاه $a^۲ = a$. به‌طور کلی‌تر می‌توان گفت که عضو a خودتوان است هرگاه برای هر عدد طبیعی n، $a^n = a$.

تعریف ۲.۱.۱ . عضو a را در حلقه‌ی R **پوچ‌توان** گویند هرگاه عدد طبیعی n چنان باشد که $a^n = ۰$. مجموعه‌ی تمام عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی R را با نماد $nil(R)$ نشان می‌دهند و به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$nil(R) = \{a \in R \mid \exists\ n \in \mathbb{N}\ s.t\ \ a^n = ۰\}$$

لم ۱.۱.۱ . اگر R یک حلقه و S زیرحلقه‌ی آن باشد، در این‌صورت $nil(S) \subseteq nil(R)$.

نکته‌ای که در اینجا قابل توجه می‌باشد این است که، اگر R یک حلقه باشد آن‌گاه $nil(R)$ لزوماً ایده‌آل آن نمی‌باشد. مثال زیر نشان می‌دهد که $nil(R)$ حتی شرط زیرحلقه بودن را نیز برآورده نمی‌کند.

مثال ۱.۱.۱ . فرض کنیم R یک حلقه باشد، حلقه‌ی ناجابجایی S را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in R,\ ۱ \leq i, j \leq ۲ \right\}$$

نشان می‌دهیم $ni\ell(S)$ زیرحلقه‌ی S نمی‌باشد. فرض کنیم

$$\alpha = \begin{pmatrix} \circ & a \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \ , \ \beta = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ b & \circ \end{pmatrix} \in S$$

به طوری‌که $\alpha^۲ = \beta^۲ = \circ$، لذا $\alpha,\ \beta \in ni\ell(S)$. حال نشان می‌دهیم که $\alpha - \beta \notin ni\ell(S)$. با توجه به تعاریف $\alpha,\ \beta$، می‌توان نوشت،

$$\alpha - \beta = \begin{pmatrix} \circ & a \\ -b & \circ \end{pmatrix}$$

با به توان رساندن این ماتریس خواهیم دید که برای هر n، $(\alpha - \beta)^n \neq \circ$. این مطلب نشان می‌دهد که $ni\ell(S)$ خاصیت بسته بودن را ندارد و لذا زیرحلقه‌ی S نیست.

در فصل‌های بعد، شرایطی را روی حلقه‌ی R بررسی می‌کنیم که تحت آن‌ها $ni\ell(R)$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد.

لم ۲.۱.۱ . فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آل آن باشد به طوری‌که $I \subseteq ni\ell(R)$. در این‌صورت $ni\ell(\frac{R}{I}) \subseteq ni\ell(R)$.

اثبات. تعریف می‌کنیم $\bar{a} = a + I$ که در آن $a \in R$. به این ترتیب

$$ni\ell(\frac{R}{I}) = \{\bar{a} \mid a \in R\ ,\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \ s.t\ \ (\bar{a})^n = \circ_{\frac{R}{I}}\}$$

طبق تعریف داریم،

$$\bar{x} \in ni\ell(\frac{R}{I}) \Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}\ \ s.t\ \ (\bar{x})^n = \bar{\circ} \Rightarrow x^n + I = I \Rightarrow x^n \in I$$

از طرفی طبق فرض قضیه، $I \subseteq ni\ell(R)$. بنابراین $x^n \in ni\ell(R)$، یعنی عدد طبیعی مانند m وجود دارد به طوری‌که $x^{mn} = \circ$. لذا $x \in ni\ell(R)$. ■

لم ۳.۱.۱ . فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آل پوچ آن باشد. اگر تعریف کنیم $\bar{R} = \frac{R}{I}$، در این‌صورت $nil(\bar{R}) = \overline{nil(R)}$.

اثبات. بنا به تعریف می‌دانیم،

$$nil(\bar{R}) = \{\bar{a} \mid a \in R \ , \ \exists \ n \in \mathbb{N} \ \ s.t \ \ (\bar{a})^n = \bar{0}\}$$

فرض کنیم $\bar{x} \in nil(\bar{R})$، لذا

$$\exists \ n \in \mathbb{N} \ \ s.t \ \ \bar{x}^n = \bar{0} \Rightarrow x^n \in I \Rightarrow \bar{x} \in \overline{nil(R)}$$

زیرا I ایده‌آل پوچ حلقه‌ی R است، لذا عدد طبیعی مانند m وجود دارد به طوری‌که $x^{mn} = 0$. پس $x \in nil(R)$.

برعکس، فرض کنیم $\bar{x} \in \overline{nil(R)}$، در این‌صورت $x \in nil(R)$ موجود است به طوری‌که $\bar{x} = x + I$. چون $x \in nil(R)$، پس عدد طبیعی مانند n هست به قسمی‌که $x^n = 0$، در نتیجه $x^n \in I$. بنابراین

$$\bar{x}^n = (x + I)^n = x^n + I = I \Rightarrow \bar{x} \in nil(\bar{R})$$

■

لم ۴.۱.۱ . فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر $a, b \in R$ آن‌گاه Rab ایده‌آل یک‌طرفه‌ی حلقه‌ی R است.

اثبات. بنا به تعریف $Rab = \{rab \mid r \in R\}$. ادعا می‌کنیم که این مجموعه نسبت به جمع بسته است، زیرا برای هر $r_1, r_2 \in R$ که $r_1 ab, r_2 ab \in Rab$، داریم،

$$r_1 ab + r_2 ab = (r_1 + r_2)ab$$

از طرفی چون R یک حلقه است، لذا $r_1 + r_2 \in R$، بنابراین $r_1 ab + r_2 ab \in Rab$.

حال فرض کنیم s عضو دلخواه حلقه‌ی R باشد و $rab \in Rab$، در این‌صورت، $s(rab) = sr(ab)$ و چون R یک حلقه است، لذا $sr \in R$، پس $s(rab) \in Rab$. به این ترتیب ثابت کردیم که Rab یک

ایده‌آل چپ حلقه‌ی R است. به وضوح می‌بینیم که Rab ایده‌آل راست حلقه‌ی R نیست. ■

در اینجا حلقه‌ای را بیان و ایده‌آل‌هایی از آن را معرفی می‌کنیم که این ایده‌آل‌ها، ایده‌آل‌های یک‌طرفه و یا دوطرفه هستند.

مثال ۲.۱.۱ . حلقه‌ی $M_2(\mathbb{Z})$ را در نظر بگیریم. فرض کنیم،

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z} \right\}, \quad I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$I_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad I_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

ماتریس صفر متعلق به I_1 می‌باشد، لذا این مجموعه ناتهی است. از طرفی برای $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ در I_1،

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ b-d & 0 \end{pmatrix} \in I_1$$

زیرا $a-c\ ,\ b-d \in \mathbb{Z}$. حال اگر $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ را در نظر بگیریم، داریم،

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+yb & 0 \\ za+wb & 0 \end{pmatrix} \in I_1$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bx & by \end{pmatrix} \notin I_1$$

پس I_1 ایده‌آل چپ حلقه‌ی $M_2(\mathbb{Z})$ است ولی ایده‌آل راست آن نمی‌باشد.

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که I_2 ایده‌آل دوطرفه است، I_3 ایده‌آل حلقه نیست و I_4 ایده‌آل یک‌طرفه‌ی راست است.

لم ۵.۱.۱ . فرض کنیم R یک حلقه و $T_n(R)$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ با درایه‌هایی از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت

$$nil(T_n(R)) = \begin{pmatrix} nil(R) & R & \cdots & R \\ 0 & nil(R) & \cdots & R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & nil(R) \end{pmatrix}.$$

اثبات. ماتریس $A \in nil(T_n(R))$ را در نظر بگیریم. چون $nil(T_n(R)) \subseteq T_n(R)$، پس A به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

لذا عدد طبیعی مانند l وجود دارد به طوری‌که $A^l = 0$. با به توان رساندن ماتریس فوق خواهیم داشت،

$$A^l = \begin{pmatrix} a_{11}^l & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22}^l & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^l \end{pmatrix} = O.$$

پس برای هر $1 \leq s \leq n$، $a_{ss}^l = 0$. بنابراین $a_{ss} \in nil(R)$.

برعکس، فرض کنیم برای هر $1 \leq s \leq n$، $a_{ss} \in nil(R)$، لذا برای هر s، عدد طبیعی n_s موجود است به طوری‌که $a_{ss}^{n_s} = 0$. بنابراین با تعریف

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

و قرار دادن $m = Max\{n_s\}_{s=1}^{n}$ داریم،

$$A^m = \begin{pmatrix} a_{۱۱}^m & * & \dots & * \\ ۰ & a_{۲۲}^m & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & a_{nn}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & * & \dots & * \\ ۰ & ۰ & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \end{pmatrix}$$

به وضوح A^m پوچ‌توان است، پس $A \in ni\ell(T_n(R))$. ■

قضیه ۱.۱.۱ . (باقی‌مانده‌ی چینی) فرض کنیم R یک حلقه و $A, A_۱, ..., A_k$ ایده آل‌های R باشند. اگر

۱) $A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_k = A$،

۲) برای هر $۱ \leq i < j \leq k$، $A_i + A_j = R$،

آن‌گاه، $\frac{R}{A} \cong \frac{R}{A_۱} \times \cdots \times \frac{R}{A_k}$.

اثبات. تابع $\varphi : R \longrightarrow \frac{R}{A_۱} \times \cdots \times \frac{R}{A_k}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(r) = (r + A_۱, ..., r + A_k)$$

به وضوح φ یک همریختی است. نشان می‌دهیم $Ker\varphi = A$. برای اثبات این مطلب، فرض کنیم $x \in Ker\varphi$، لذا $\varphi(x) = ۰$. با توجه به تعریف تابع φ، داریم $\bar{۰} = (x + A_۱, ..., x + A_k)$، پس برای هر $۱ \leq i \leq k$، $x + A_i = \bar{۰}$. بنابراین برای هر $۱ \leq i \leq k$، $x \in \bigcap_{i=۱}^{k} A_i = A$، در نتیجه $Ker\varphi \subseteq A$. عکس مطالب گفته شده همواره برقرار است، لذا ثابت می‌شود که $Ker\varphi = A$.

اکنون کافی است ثابت کنیم که همریختی φ، پوشا است، آن‌گاه با توجه به قضیه‌ی اول همریختی حکم بدست می آید. فرض کنیم $b_۱, ..., b_k$ عناصر دلخواه از حلقه‌ی R باشند. عنصر $r \in R$ را باید پیدا کنیم به طوری‌که $\varphi(r) = (b_۱ + A_۱, ..., b_k + A_k)$، یا به عبارتی برای $۱ \leq i \leq k$، $r - b_i \in A_i$.
با توجه به فرضیات قضیه، می‌توان نوشت:

$$R = RR = (A_۱ + A_۲)(A_۱ + A_۳) = A_۱A_۱ + A_۱A_۳ + A_۲A_۱ + A_۲A_۳ \subseteq A_۱ + A_۱ + A_۱ + (A_۲ \cap A_۳)$$

زیرا $A_۲$ و $A_۳$ ایده‌آل‌های حلقه‌ی R هستند، لذا $A_۲A_۳ \subseteq A_۲ \cap A_۳$. از طرفی $A_۱ = A_۱ + A_۱ + A_۱$، پس با توجه به قسمت دوم فرض قضیه، $R = (A_۲ \cap A_۳) + A_۱ \subseteq R$.

این مطلب برای تمام ایده‌آل‌های حلقه‌ی R برقرار است، لذا برای هر $۱ \leq i, j \leq k$ و $i \neq j$،

$$(A_i + A_۱)...(A_i + A_{i-۱})(A_i + A_{i+۱})...(A_i + A_k) = A_i + (A_۱ \cap ... \cap A_{i-۱} \cap A_{i+۱} \cap ... \cap A_k) = R$$

به این ترتیب برای هر $۱ \leq i \leq k$، خواهیم داشت، $b_i = a_i + r_i$ که $a_i \in A_i$ و $r_i \in (A_۱ \cap ... \cap A_{i-۱} \cap A_{i+۱} \cap ... \cap A_k)$. قرار دهیم $r = r_۱ + \cdots + r_k$، در این‌صورت چون $a_i \in A_i$، $r_i \in (A_۱ \cap ... \cap A_{i-۱} \cap A_{i+۱} \cap ... \cap A_k)$ و $R - (A_۱ \cap ... \cap A_{i-۱} \cap A_{i+۱} \cap ... \cap A_k) = A_i$، لذا خواهیم داشت:

$$r - b_i = r_۱ + \cdots + r_k - (a_i + r_i) = r_۱ + \cdots + r_{i-۱} + r_{i+۱} + \cdots + r_k - a_i \in A_i \qquad .$$

■

تعریف ۳.۱.۱ . فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از آن باشد. رادیکال I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \ \ s.t \ \ a^n \in I\}.$$

تعریف ۴.۱.۱ . عضو a را در حلقه‌ی R در نظر بگیریم. پوچ‌ساز راست (چپ) عضو a در حلقه‌ی R را با $rAnn_R(a)$ ($lAnn_R(a)$) نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$rAnn_R(a) = \{b \in R \mid ab = ۰\} \quad (lAnn_R(a) = \{b \in R \mid ba = ۰\}) \qquad .$$

تعریف ۵.۱.۱ . عنصر a را مقسوم‌علیه صفر چپ (راست) حلقه‌ی R می‌نامیم هرگاه عنصر غیرصفر $b \in R$ موجود باشد به طوری‌که $ab = ۰$ ($ba = ۰$).

عنصر a را مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R می‌نامیم هرگاه مقسوم‌علیه صفر راست و چپ باشد.

تعریف ۶.۱.۱ . عنصر a از حلقه‌ی R را عنصر منظم می‌نامیم هرگاه مقسوم‌علیه صفر چپ و راست نباشد.

حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی منظم نامند هرگاه هر عضو آن منظم باشد.

تعریف ۷.۱.۱ . فرض کنیم R یک حلقه‌ی یکدار و S زیرمجموعه‌ی ناتهی آن باشد. S را زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R می‌نامیم هرگاه:

الف) $1_R \in S$.

ب) به ازای هر $x, y \in S$، $xy \in S$.

تعریف ۸.۱.۱ . حلقه‌ی شرکت‌پذیر A را یک جبر روی میدان F می‌خوانند هرگاه A یک فضای برداری روی F باشد به طوری‌که، به ازای هر $a, b \in A$ و هر $\alpha \in F$،

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b).$$

همسانی‌ها، یکسانی‌ها، ایده‌آل‌ها و مانند این‌ها، برای جبرها مثل حلقه‌ها تعریف می‌شوند، با این شرط اضافی که این‌ها باید تحت نهاد فضای برداری محفوظ یا نامتغیر باقی بمانند.

تعریف ۹.۱.۱ . ایده‌آل I از حلقه‌ی R را **ایده‌آل اول** گوییم هرگاه برای $ab \in I$، نتیجه شود که $a \in I$ یا $b \in I$.

تعریف ۱۰.۱.۱ . ایده‌آل سره‌ی I از حلقه‌ی R را **ایده‌آل نیم‌اول** نامیم هرگاه برای ایده‌آل J از حلقه‌ی R و عدد صحیح و مثبت n، اگر $J^n \subseteq I$، نتیجه شود که $J \subseteq I$.

در این فصل به معرفی حلقه‌های کاهشی، نیم‌جابجایی و آرمنداریز می‌پردازیم و برخی خواص این حلقه‌ها و چگونگی ارتباط آن‌ها با یکدیگر را بیان می‌کنیم. هم‌چنین در فصل‌های آتی به بررسی بیشتر حلقه‌های آرمنداریز و توسیع‌های متفاوتی از آن‌ها مانند حلقه‌های آرمنداریز ضعیف، آرمنداریز پوچ، مک‌کوی، مک‌کوی ضعیف و توسیع‌های آن‌ها روی حلقه‌های چندجمله‌ای اریب خواهیم پرداخت.

۲.۱ حلقه‌های کاهشی

تعریف ۱.۲.۱ . حلقه‌ای را که هیچ عنصر پوچ‌توان غیرصفر نداشته باشد، حلقه‌ی کاهشی می‌نامند.

لم ۱.۲.۱ . حلقه‌ی R کاهشی است اگر و تنها اگر حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $R[x]$ کاهشی باشد.

اثبات. فرض کنیم حلقه‌ی R کاهشی باشد. برای اثبات کاهشی بودن حلقه‌ی $R[x]$، کافی است ثابت کنیم که این حلقه عضو پوچ‌توان غیرصفر ندارد.

چندجمله‌ای $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ را در $R[x]$ با ضرایب در حلقه‌ی R در نظر بگیریم. فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ ای موجود باشد به طوری‌که $[f(x)]^n = 0$. با بسط توان، این چندجمله‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$[f(x)]^n = \sum_{s=0}^{n} \sum_{s=i_1+\ldots+i_n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} x^s \quad .$$

اگر $i_j (1 \leq j \leq n)$ اندیس ضرایب یکسان در بسط فوق باشد، آن‌گاه $a_{i_j}{}^n = 0$ و چون حلقه‌ی R کاهشی است، نتیجه می‌شود که $a_{i_j} = 0$. از طرفی چون سایر ضرایب $f(x)$ نیز شامل یکی از a_{i_j} ها می‌باشد، پس هر ضریب $f(x)$ نیز صفر می‌شود.

به این ترتیب ثابت شد که تمام ضرایب $f(x)$ صفر هستند، لذا $f(x) = 0$. بنابراین حلقه‌ی $R[x]$ عنصر پوچ‌توان غیرصفر ندارد.

برعکس، فرض کنیم حلقه‌ی $R[x]$ کاهشی باشد. a را یک عنصر دلخواه در حلقه‌ی R در نظر بگیریم و فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری‌که $a^n = 0$. تعریف کنیم $f(x) = a$. به وضوح $[f(x)]^n = a^n = 0$ و چون حلقه‌ی $R[x]$ کاهشی است، پس $f(x) = 0$. یعنی $a = 0$ و این مطلب کاهشی بودن R را ثابت می‌کند. ■

نتیجه ۱.۲.۱ . زیرحلقه‌ی هر حلقه‌ی کاهشی، کاهشی است.

تعریف ۲.۲.۱ . حلقه‌ی R را نیم‌جابجایی می‌نامند در صورتی‌که برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$ آن‌گاه $aRb = 0$.