بسما...الرحمن الرحیم

عملگرهای انتقال وزن‌دار ابردوری

توسط

زهرا بوربورعظیمی اول

پایان نامه

ارائه شده به دانشکده تحصیلات تکمیلی بعنوان بخشی ازفعالیت های

تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی‌ارشد

دررشته

ریاضی محض

از

دانشگاه شیراز

شیراز، ایران

ارزیابی وتصویب شده توسط کمیته‌پایان نامه بادرجه: عالی

امضاء اعضاء کمیته پایان نامه:

کریم هدایتیان، استادیار ریاضی (رئیس‌کمیته) ....

محسن تقوی، دانشیار ریاضی ....

حیدر زاهدزاهدانی، استادیار ریاضی ....

عبدالعزیز عبدالهی، استادیار ریاضی ....

آبان ماه ۱۳۸۱

تقدیم به:

او که یادش همیشه یاورم بوده.

پدر و مادر عزیزم، فرشتگان مهربانی که بال و پر گستردند تا در سایه محبت و فداکاری بی‌دریغشان سیر ترقی را بپیمایم و آرزوهایشان را در رسیدن به اهدافم خلاصه کنم.

خواهر و برادرانم، که کردارشان آکنده از راستی و قلبهایشان مملو از مهر است.

همسر بردبارم، که فروغ محبتش شورانگیز و امیدبخش است.

سپاسگزاری

در این جا وظیفه خود می‌دانم سپاس صمیمانه‌ام را تقدیم به استاد بزرگوار و دلسوز جناب آقای دکتر هدایتیان که در مراحل گوناگون این مقاله مرا یاری نموده‌اند، بنمایم. همچنین از اساتید دانشمند، آقایان دکتر زاهدانی و دکتر تقوی و دکتر عبدالهی که رنج و زحمت خواندن این تألیف را با دقت بسیار تحمل فرموده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم.

در پایان از سرکار خانم نیک‌منش که بردبارانه و با دقت توانستند حروفچینی و آرایش فرمولها و صفحه‌ها را انجام دهند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

چکیده

عملگرهای انتقال وزن‌دار ابردوری

به وسیله‌ی:

زهرا بوربورعظیمی‌اول

عملگر خطی و کراندار T را روی یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر (یا یک فضای باناخ جدایی‌پذیر و یا حتی یک فضای برداری توپولوژیک جدایی‌پذیر) X ابردوری گویند هرگاه $x \in X$، چنان باشد که $orb(T, x)$ در X چگال باشد.

در این پایان‌نامه به بررسی عملگرهای انتقال وزن‌دار می‌پردازیم و شرایطی را که تحت آنها این عملگرها ابردوری می‌شوند، بیان خواهیم کرد.

فصل اول را به مقدمات و تعاریف اولیه مورد نیاز اختصاص داده‌ایم. در فصل دوم عملگرهای ابردوری را معرفی می‌نماییم و همچنین محک ابردوری را ارائه می‌کنیم و قضایا و لم‌های مربوط به عملگرهای ابردوری و همچنین عملگرهای انتقال وزن‌دار ابردوری را معرفی می‌کنیم. در فصل سوم یکی از شرایط لازم و کافی برای ابردوری بودن یک عملگر انتقال را بیان کرده و اثبات می‌کنیم.

در فصل چهارم نشان خواهیم داد که اگر T یک عملگر انتقال به عقب وزن‌دار یک جانبه با وزن‌های مثبت باشد آنگاه $I + T$ ابردوری است.

در فصل پنجم به بررسی شرایط آسانتر برای ابردوری یا دوری بودن یک عملگر انتقال وزن‌دار دوجانبه معکوس‌پذیر خواهیم پرداخت.

بالاخره در فصل ششم با بیان شرایط ضعیف‌تری نسبت به شرایطی که در فصل پنجم گفته شده ابردوری بودن عملگر انتقال وزن‌دار دوجانبه را بررسی کرده‌ایم.

فهرست مطالب

۱ـ مقدمه

پدیدهٔ ابردوری بودن (hypercyclicity) اولین بار در سال ۱۹۲۹ در یکی از کارهای بیرهف (.G. D. Birkhoof's) مشاهده شد. او به وجود یک تابع تام که انتقالهایش در فضای توابع تحلیلی چگال است پی برد. در واقع نشان داد که عملگر انتقال روی فضای توابع تحلیلی دارای یک اربیت چگال می‌باشد. اما در سال ۱۹۵۲ مک‌لین (G. R. MacLane) نتیجه بیرهف را به نوعی برای عملگر مشتق تعمیم داد و نشان داد که عملگر مشتق روی فضای توابع تحلیلی بر $\mathbb{C}$ دارای یک اربیت چگال است و یا به عبارتی دیگر یک تابع تام روی $\mathbb{C}$ هست که مشتقاتش در فضای توابع تحلیلی چگال است.

اما نظریه‌پردازان آنالیز تابعی با الهام از کار مک‌لین به مدل‌بندی طیف وسیعی از عملگرها با نام عملگرهای ابردوری (hypercyclic operator) پرداختند که کار مک‌لین و بیرهف را نیز در بر گرفت. از آنجا که عملگر انتقال به عقب (backward shift) رفتاری شبیه به عملگر مشتق دارد، انتظار می‌رفت که مانند عملگر مشتق دارای یک اربیت چگال، در فضاهایی که می‌تواند بر آن تعریف شود، باشد.

در سال ۱۹۶۹ رولی وایتس (Rolewicz) ([۱۴]) به این مفهوم دست یافت و نشان داد که عملگر انتقال به عقب و مضارب بزرگتر از یک آن، بر دنبالهٔ فضاهای $l^p(1 \leq p \leq \infty)$ و $c_\circ$ و فضاهایی که شبیه آنها رفتار می‌کنند، ابردوریست.

اما برای پی‌بردن به عملگرهای بیشتری که این خاصیت را دارند، بررسی ارتباط میان آن و مفاهیم از پیش تعیین شدهٔ آنالیز تابعی حائز اهمیت است. همین مساله موجب شد که شرطهای لازم و شرطهای کافی زیادی راجع به آن ارائه شود که از میان آنها شرط لازم کیتای از همه چشمگیرتر است.

کارل کیتای (Carol-Kitai) در سال ۱۹۸۲ در رسالهٔ دکتری خود نشان داد که اگر عملگری ابردوری

باشد هر مؤلفه (زیرمجموعهٔ همبند و ماکزیمال) از طیف آن باید دایرهٔ یکه را قطع کند. ([۱۳])

در سال ۱۹۸۷ شاپیرو و گتنر (R. M. Gethner, J. M. Shapiro) به تعمیم کار رولی وایس بر فضاهای برگمن و هاردی پرداختند که در واقع بیشترین توجه آنها معطوف به عملگر انتقال به عقب روی این نوع فضاها بود. [۲۴]

در سال ۱۹۹۱ شاپیرو و گدفری (G. Godefroy, H. Shapiro) ابردوری بودن عملگرهای انتقال به عقب را روی فضاهای هاردی بررسی کردند. [۱۶]

در سال ۱۹۹۵ سالاس (H. N. Salas) ابردوری بودن عملگرهای انتقال وزن‌دار را بررسی کرد و محک مخصوصی را برای این عملگرها ارائه داد.

در سال ۱۹۹۹ بوردن (P. D. Bourdon) ابردوری بودن عملگرهای انتقال به عقب را روی فضاهای برگمن بررسی کرد.

میلر (V. G. Miller) در سال ۱۹۲۷ به رابطه بین عملگرهای ابردوری متناهی و ابردوری پرداخت.

بعد از آن در سال ۲۰۰۱، پریس (A. Peris) ثابت کرد که عملگرهای ابردوری چندگانه لزوماً ابردوری هستند.

و بالاخره در سال ۲۰۰۰ و ۲۰۰۱، فلدمن (N. S. Feldman) عملگرهای ابرنرمال و هم ابرنرمال را بررسی کرد و شرایط لازم و کافی برای ابردوری بودن عملگرهای هم ابرنرمال ارائه داد و همچنین عملگرهای ابردوری شمارا را معرفی کرد و ارتباط آنها را با عملگرهای هم ابرنرمال بررسی کرد و محک ابردوری شمارا را ارائه داد.

فصل اول

مقدمات

۱ ـ مقدمات

در این فصل سعی شده است تعاریف و قضایای مقدماتی را که بعداً از آنها استفاده خواهیم کرد بیان شوند. این تعاریف و قضایا بیشتر مربوط به فضاهای باناخ و هیلبرت و خواص آنها می‌باشد.

۱.۱ تعریف: اگر H یک فضای هیلبرت باشد و $M \subseteq H$، آنگاه

$$M^{\perp} = \{y \in H :< x, y >= \circ \quad \forall x \in M\}$$

که یک فضای بسته و ناتهی از H می‌باشد.

۱.۲ قضیه: اگر M یک زیرفضای بسته از فضای هیلبرت H باشد و $h \in H$ آنگاه بردار یکتای $P_h \in M$ هست که $h - P_h \in M^{\perp}$، همچنین

الف) نگاشت $P : H \longrightarrow M$ با ضابطه $P(h) = P_h$ یک تبدیل خطی است.

ب) به ازای هر $h \in H$، $\|P(h)\| \leq \|h\|$ و در نتیجه P پیوسته است.

پ) $P^{۲} = P$

ت) $\ker P = M^{\perp}$ و $ranP = M$. [۵]

۱.۳ تعریف (فضای جدایی‌پذیر) separable space

اگر X یک فضای نرم‌دار باشد آنگاه X جدایی‌پذیر است اگر دارای یک زیرمجموعهٔ شمارای چگال باشد.

۱.۴ تعریف: فضای تمام دنباله‌های $x = (x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ که

$$\|x\| = (\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i|^{۲})^{\frac{۱}{۲}} < \infty$$

یک فضای هیلبرت است و با $\ell^{۲}(Z)$ نشان می‌دهیم. [۵]

۱.۵ قضیه: اگر H یک فضای هیلبرت نامتناهی‌البعد باشد آنگاه H جدایی‌پذیر است اگر و فقط اگر $\dim H = \mathcal{N}_{\circ}$. [۵]

۱.۶ نتیجه: $\ell^{۲}(Z)$ یک فضای جدایی‌پذیر است.

برهان: از آنجایی که $\dim \ell^{۲}(Z) = \mathcal{N}_{\circ}$ بنابراین بنابر قضیه ۱.۵ ، $\ell^{۲}(Z)$ یک فضای جدایی‌پذیر است.

۱.۷ تعریف: فرض کنید $\beta = \{\beta(k) : k \geq \circ\}$ یک دنبالهٔ از اعداد مثبت باشد به طوری که

$$\sup_{k\geq \circ} \frac{\beta(k)}{\beta(k+۱)} < \infty$$

در این صورت $H^{۲}(\beta)$ فضای سری‌های $f(z) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \hat{f}(k) z^{k}$ است به طوری که

$$\sum_{k=\circ}^{\infty} \beta(k) |\hat{f}(k)|^{۲} < \infty$$

حال توجه کنید که اگر $\beta(k) = \frac{۱}{۱+k}$ آنگاه $H^{۲}(\beta) = A^{۲}$ فضای برگمن است و اگر $\beta(k) = ۱$ آنگاه $H^{۲}(\beta) = H^{۲}$، فضای هاردی است.

۱.۸ تعریف: بردار $x = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ از $\ell^{۲}(\mathbf{Z})$ را با محافظ متناهی گویند هرگاه بتوان آن را به صورت ترکیب خطی متناهی از عناصر پایه نوشت.

۱.۹ تعریف: فرض کنید $\varepsilon > \circ$، دنباله $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ در یک فضای باناخ را $\varepsilon-$ جداشده گوییم هرگاه برای هر $n \neq k$ داشته باشیم

$$\|x_n - x_k\| \geq \varepsilon$$

حال آن که $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$ را جداشده گوییم، هرگاه $\varepsilon > \circ$ چنان موجود باشد که $(x_n)_{n=۱}^{\infty}$، $\varepsilon-$ جدا شده باشد.

۱.۱۰ تعریف: زیرفضاهای پایا (Invariant Subspaces)

اگر $A \in B(H)$ و H و $M \leq H$، گوییم M یک زیرفضای پایا برای A است، هرگاه

$$\text{برای هر} \quad h \in M \quad \text{داشته‌باشیم} \quad Ah \in M$$

یا به عبارت دیگر $AM \subseteq M$.

۱.۱۱ تعریف: اگر $T \in B(H)$، آنگاه طیف T که با $\sigma(T)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{معکوس‌پذیرنباشد } T - \lambda\}$$

همچنین طیف نقطه‌ای T که با $\sigma_p(T)$ نمایش می‌دهیم به صورت

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \ker(T - \lambda) \neq (\circ)\}$$

تعریف می‌شود. اعضای $\sigma_p(T)$ را مقادیر ویژه نامند، حال اگر $\lambda \in \sigma_p(T)$، آنگاه اعضای $\ker(T - \lambda)$ را بردار ویژه نامند و همچنین $\ker(T - \lambda)$ را فضای ویژه T در λ نامند.

بعلاوه طیف نقطه‌ای تقریب (approximate point spectrum) برای T، $\sigma_{ap}(T)$ را به صورت

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \|(T-\lambda)x_n\| \longrightarrow \circ, \ \|x_n\| = ۱, \ n \text{ دنباله } (x_n) \text{ چنان موجود است که برای هر}\}$$

تعریف می‌کنیم.

۱.۱۲ قضیه: اگر $T \in B(x)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$، آنگاه عبارتهای زیر با هم معادلند:

الف) $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$

ب) $\ker(T - \lambda) = (\circ)$ و $ran(T - \lambda)$ بسته است.

پ) ثابت $c > \circ$ چنان است که برای هر x، $\|(T - \lambda)x\| \geq c\|x\|$

برای مشاهده اثبات این قضیه به [۱۹] صفحه ۲۰۹ مراجعه کنید.

فصل دوم

آشنایی با عملگرهای ابردوری، سوپردوری و خواص آنها

۲ـ آشنایی با عملگرهای ابردوری، سوپردوری و خواص آنها

هدف ما در این فصل آشنا کردن خواننده با تعریف و خواص مقدماتی مورد نیاز برای بررسی عملگرهای ابردوری مخصوصاً عملگرهای انتقال می‌باشد و نکات تخصصی و قضایای پیچیدهٔ مربوط به آن را بعداً بررسی خواهیم کرد.

۲.۱ **تعریف**: **دوری بودن** (cyclicity)

عملگر خطی و کراندار T را روی یک فضای باناخ جدایی‌پذیر X عملگر دوری (cyclic operator) گوییم اگر $x \in X$ وجود داشته باشد، به طوری که مدار (orbit) آن یعنی:

$$orb(T,x) = \{x, Tx, Tx^{۲}, \ldots\}$$

یک خمینه خطی (linear manifold) چگال تولید کند و بردار x نظیر را بردار دوری (cyclic vector) گوییم.

۲.۲ **تعریف**: **ابردوری بودن** (Hypercyclicity)

عملگر خطی و کراندار T را روی یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر (یا یک فضای باناخ جدایی‌پذیر و یا حتی یک فضای برداری توپولوژیک جدایی‌پذیر) X در نظر بگیرید. اگر $x \in X$، چنان باشد که $orb(T,x)$ در X چگال باشد، آنگاه T را عملگر ابردوری (Hypercyclic operator) و بردار x نظیر را بردار ابردوری (Hypercyclic vector) گوییم، ما مجموعه تمام بردارهای ابردوری T را با $HC(T)$ نمایش می‌دهیم.

۲.۳ تعریف: ابردوری چندگانه (Multi-Hypercyclic)

فرض کنید T عملگر خطی و کراندار روی یک فضای باناخ جدایی‌پذیر X باشد در آن صورت T را ابردوری چندگانه (Multi-Hypercyclic) گویند، اگر $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq X$ وجود داشته باشند به طوری که

$$\bigcup_{k=1}^{n} orb(T, x_k)$$

در X چگال باشد.

۲.۴ تعریف: سوپر دوری بودن (supercyclicity)

فرض کنید T عملگر خطی کراندار روی فضای باناخ جدایی‌پذیر X باشد در آن صورت عملگر T را سوپردوری (supercyclic operator) گویند اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\{\lambda T^n x : \ n \geq 0, \ \lambda \in \mathbb{C}\}$$

در X چگال باشد.

۲.۵ عملگر انتقال به جلو وزن‌دار دوجانبه (bilateral forward weighted shift)

فرض کنید (e_n) پایه استاندارد برای فضای $\ell^2(\mathbb{Z})$ باشد، عملگر T که به صورت

$$Te_n = w_n e_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

تعریف می‌شود را عملگر انتقال به جلو وزن‌دار دوجانبه گویند که در آن دنبالهٔ کراندار $\{w_n\}$ وزن‌های مثبت T هستند. در ضمن عملگر الحاقی T به صورت

$$T^* e_n = \bar{w}_{n-1} e_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

می‌باشد.