بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه:

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض ، گرایش هندسه

عنوان پایان نامه:

انشعاب مسیرهای هموکلینیک استوار برنقطه زینی – مرکزی

درسیستمهای بازگشت پذیر

استاد راهنما :

آقای دکتر امید ربیعی مطلق

استاد مشاور:

خانم دکتر ثریا طالبی

استاد داور:

آقای دکتر علی جلیلیان

مؤلف :

نرگس نهبندانی

تابستان ۱۳۸۷

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش پروردگار یکتا که چراغ توفیق را فرا راهم گذاشت تا این مرحله از زندگی علمی خویش را با سربلندی پشت سر گذاشته و به من توفیق کسب مدارج علمی را داد.

برخود لازم می دانم که از همه مربیان و اساتید و پرسنل دانشگاه که به نحوی حق تعلیم و تربیت بر گردنم دارند تشکر و سپاسگذاری نمایم.

بخصوص از اساتید ارجمند:

جناب آقای دکتر امید ربیعی مطلق که با راهناییهای خود مرا در این مرحله همراهی کردند، و سرکار خانم دکتر ثریا طالبی که زحمت مشاوره این پایان نامه را بعهده داشتند ،و همچنین جناب آقای دکتر جلیلیان که داوری این رساله را بعهده گرفتند قدردانی و سپاسگذاری ویژه دارم.

این تلاش علمی خود را تقدیم به تمام کسانی می کنم که در طول دوران تحصیل برایم زحمات فراوان کشیده و همواره مشوق و همراهم بودند.

چکیده

گسترش کاربرد ریاضیات در علوم و مهندسی که از اواخر قرن پازدهم میلادی, و تقریبا هم زمان بـا ارائـه نظریات جدید در نجوم کلاسیک و کمی پس از آن مکانیک نیوتونی شکل گرفت؛ امروزه بـه بخـش جـدایی ناپذیر علم ریاضیات تبدیل شده است. بطوریکه در بسیاری از مـوارد, ابـداع نظریـات جدیـد در ریاضـیات و خلق مفاهیم نو, ناشی از نگرش فیزیکی و یا علوم زیستی به پدیده ها در دنیای بیرون بوده اسـت. امـروزه, شاید بتوان گفت که مهمترین محرک در گسترش مفاهیم ریاضی نه در خود ریاضی بلکه در علومی است که از ریاضی بعنوان یک زبان و ابزاری برای جمعبندی مطالب خود استفاده می کنند.

در این میان ارائه مدلهای ریاضی از پدیده های طبیعی به عنوان یک شاخه از ریاضیات تحت عنوان مدل سازی (modeling) با استفاده گسترده از نظریه معادلات دیفرانسیل و سیستمهای دینامیکی, نقش به سـزایی در ایجاد این ارتباط بین ریاضیات و ایـن علـوم دارد. قابلیـت منحـصر بفـرد نظریـه معـادلات دیفرانـسیل در توصیف و پیش بینی رفتار یک پدیده جاری در زمان که وابستگی به متغیرهـا و پارامترهـای گونـاگون دارد, و امکان بررسی رفتار دستگاه را حتی در گذشته نیز ممکن می سـازد, باعـث شـده اسـت تـا بخـش مهمـی از مدلهای پدیده های طبیعی به شکل یک معادله دیفرانسیل ارائه گردند

در مدل سـازی یـک پدیـده بـا اسـتفاده از معـادلات دیفرانـسیل, واقعیتهـای فیزیکـی از قبیـل تقارنهـا و یکسانی ها نقش عمده ای در شکل نهایی مدل بدست آمده دارند. بسیاری از پدیده ها که در ذات خود باعـث ایجاد یک عکس العمل وارونه و متقارن در دستگاه می گردند را میتوان در غالـب نـوعی خـاص از معـادلات دیفرانسیل که به آنها معادلات بازگشت پذیر می گوییم دسته بندی کرد.

هدف اصلی این پایان نامه, بررسی رفتار یک نوع خاص از معادلات دیفرانسیل بازگشت پـذیر اسـت. برای حفظ یکنواختی در نوشتار, ابتدا در فصل یک, چند مفهوم مقدماتی از نظریه معادلات دیفرانـسیل را کـه در طول پایان نامه به آنها احتیاج خواهیم داشت به همراه مفهوم معادله بازگشت پذیر, بیان می کنیم. خـواهیم دید که منظور ما از یک هموکلینیک و انشعاب هموکلینیکی چیست. همچنین بطور کاملا خلاصه تـصویری از یک انشعاب هموکلینیکی ارائه خواهیم کرد. در فصل بعد کمی درباره مفهوم سه تایی نمایی صحبت خـواهیم کرد که بعدها از آن به عنوان ابزاری اساسی در اثبات قضایا و لم هـا اسـتفاده مـی کنـیم. همچنـین شـرایط و مشخصات سیستم بازگشت پذیر مورد بحث را معرفی خواهیم کرد که شامل قیدهایی بـرروی بعـد دسـتگاه, وجود مدارهای هموکلینیکی و نقاط ثابت, و همچنین قیدهایی برای حفظ برخی تقارنها و نسبتها اسـت کـه همگی آنها باعث می شوند تا بتوانیم چند لم مفید درباره ساختار زیرفضاهای برداری متناظر با معادله انشعاب دستگاه ثابت کنیم. و بالاخره قضایای اصلی ما که وجود یک مدار هموکلینیکی و انشعاب مربوط به آن رابرای دستگاه مورد بحث تضمین میکند.

Bifurcation of homoclinic orbits

to a saddle – center

in reversible systems

We consider two-parameter families of reversible vector fields having a homoclinic orbit to a nonhyperbolic fixed point. The nonhyperbolicity is due to a pair of purely imaginary eigenvalues we give a complete description of the

bifurcation one-homoclinic orbits to the center manifold.

Keywords:

reversible system; homoclinic orbit; nonhyperbolic fixed point ; bifurcation

فهرست مندرجات

فصل دوم انشعاب مدارهای هموکلینیک در سیستمهای بازگشت پذیر

مقدمه

معادلات دیفرانسیل مولودزیبای حساب دیفرانسیل وانتگرال است که درتبیین وتوصیف پدیده های فیزیکی و مهندسی نقش اساسی دارد ، زیـرا مـدل ریاضـی، بـسیاری از مـسائل فیزیکـی و مهندسـی را بصورت معادلات دیفرانسیل در می آورد. بویژه پدیده های فیزیکی و مهندسی مرتبط بـا زمـان معمـولا بصورت دستگاههای دیفرانسیلی موسوم به سیستمهای دینامیکی، نوشته می شوند.

از اینروفصل اول را با مفاهیم ، تعاریف وویژگیهـایی از ایـن دسـتگاههای معـادلات دیفرانـسیل شروع می کنیم.دراین فصل بطور مختصرانواع نقاط و مدارها را بـه ترتیـب دربخـشهای (۱-۵) و(۱-۶) برای یک سیستم دینامیکی معرفی کرده وتعریفی از مجموعه های $\omega -$ حدی و $\alpha -$ حدی را دربخـش (۱-۷) خواهیم داشت. فضای مماسی یک نقطـه از منیفلـد M کـه هـم بعـد ایـن منیفلـد مـی باشـد را دربخـش(۱-۸) توضـیح خـواهیم داد.فـصل را بابحثهـایی مقـدماتی از اریبـی ، منیفلـدهای پایـدار وناپایدارومرکزی ادامه می دهیم و قضیه تابع ضمنی که نقش اساسی در مبحث اصـلی (فـصل۲) دارد را دربخش (۱-۱۳) بیان می کنیم.سیستمی کـه در مقالـه اصـلی (فـصل ۲) بکـار رفتـه اسـت ، سیـستمی بازگشت پذیر است.از اینرو تعریفی ساده از سیستمهای بازگـشت پـذیر در بخـش (۱-۱۴) آورده شـده است.انشعاب ،یعنی تغییر وضعیت پایداری یک سیستم بازای تغییرات اندک یکی از پارامترهای دستگاه و انشعاب هموکلینیک که حالت خاصی از این بحث می باشدرا در بخش (۱-۱۶) توضیح خواهیم داد.

J.KLAUS و J.KNOBLOCH وضعیت انشعاب مـدارهای هموکلینیـک اسـتواربر یـک نقطـه ی زینی– مرکزی را در یک سیستم بازگشت پذیر بررسی کرده اند که درفصل دوم بطـور اجمـال بـه ایـن مطلب می پردازیم. این قسمت در دو وضـعیت مـدارهای هموکلینیـک اسـتوار برنقطـه بحرانـی (۲–۳) ومدارهای هموکلینیک استوار بر منیفلد مرکزی(۲–۵) در نظـر گرفتـه شـده اسـت و درهـردو سـرانجام معادله انشعابی ساخته خواهد شد که جوابهای آن مدارهای هموکلینیک استوار بر نقطه بحرانی یا منیفلد مرکزی می باشد (۲–۴) ،(۲–۶) .فصل دوم را با بررسی چندین لـم و قـضیه و روابـط مربـوط بـه آنهـا پی گرفته و در نهایت در دو حالت ذکر شده به معادله انشعاب مناسب خواهیم رسید.

فصل اول

تعاریف مقدماتی و پیش نیازها

در این فصل ابتدا به دستگاه های معـادلات دیفرانـسیل و سیـستمهای دینـامیکی مـی پـردازیم و ویژگی های این دستگاه ها را در قالب تعریف و قضیه بیان می کنیم. سیستمهای بازگشت پذیرکه مبنای اصلی کار در فصل بعد می باشد را تعریف کرده وبه مسئله انـشعاب کـه نقـش عمـده ای در معـادلات دیفرانسیل دارد درقالب مفاهیم و تصاویر ساده ای می پردازیم.

۱-۱ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی عادی به صـورت $\dot{x} = Ax$ اسـت کـه در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و A یک ماتریس $n \times n$ و $\dot{x}$ یک بردار ستونی با n مؤلفه به صورت زیر است:

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix} \frac{dx_۱}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

جواب دستگاه خطی بالا همراه با شرط اولیه ی $x(\circ)=x_\circ$ با استفاده ازرابطه ی $x(t)=e^{tA}x_\circ$ بدسـت می آید که در آن e^{tA} نمای ماتریس tA است(مرجع[۱۱]).

۱-۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی

دستگاه غیر خطی معادلات دیفرانسیل به شکل $\dot{x}=f(x)$ می باشد که در آن $f:E\rightarrow \mathbb{R}^n$ و E یک زیر مجموعه باز در $\mathbb{R}^n$ است. تحت شرایط مشخصی این دستگاه غیر خطی دارای جواب یگانه ای است که از نقطه $x_\circ \in E$ می گذرد و روی قلمرو ماکزیمال[۱] $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ تعریف می شود. با استفاده از قضایای هارتمن-گروبمن[۲](مرجع [۵])و قضیه منیفلد پایدار[۳] (مرجع [۵]) نشان داده می شود که رفتار موضعی دستگاه غیر خطی بالا در یک همسایگی از نقطه ی ساکن هذلولوی[۴] $x_\circ$ ($f(x_\circ)=\circ$) ، به طور توپولوژیکی با رفتار دستگاه خطی $\dot{x}=Ax$ در نزدیکی مبدا یکسان است، زمانیکه A مشتق f درنقطه ی $x_\circ$ باشد، یعنی $A=Df(x_\circ)$(مرجع [۵]).

لازم به ذکر است دستگاه معادلات دیفرانسیلی که وابسته به پارامتر t باشد را به صورت $\dot{x}=f(x,t)$ نشان می دهیم و به دستگاه های غیر خودگردان معروف می باشند. توجه کنید که وجود جواب معادله دیفرانسیل مقدماتی $\dot{x}=f(t)$ را می توان به فرم $x(t)=x(\circ)+\int_\circ^t f(s)ds$ داشت، به شرطی که $f(t)$ انتگرال پذیر باشد، در حالت کلی معادله دیفرانسیل $\dot{x}=f(x)$ یا $\dot{x}=f(x,t)$ دارای جواب است، اگرتابع f پیوسته باشد(مرجع [۱۱]).

---

۱ *Maximal domain*

۲ *Hartman – Grobman theorem*

۳ *Invariant manifold theorem*

٤ *Hyperbolic fixed point* = در بخش (۱- ۵) تعریف خواهد شد.

۱-۳ شار[5] یک معادله دیفرانسیل

۱-۳-۱ شار دستگاه خطی

شار دستگاه خطی $\dot{x}=Ax$ را به صورت $e^{tA}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تعریف می کنیم که e^{tA}به عنوان یک نگاشت با ضابطه $\phi_t=e^{tA}$ برای هر $x\in\mathbb{R}^n$ دارای خواص اساسی زیر است:

$$(i) \quad \phi_\circ(x)=x$$

$$(ii) \quad \phi_s(\phi_t(x))=\phi_{s+t}(x) \qquad \forall s,t\in\mathbb{R}$$

$$(iii) \quad \phi_{-t}(\phi_t(x))=\phi_t(\phi_{-t}(x))=x \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

۱-۳-۲ شار دستگاه غیرخطی

شار ϕ_t دستگاه غیر خطی $\dot{x}=f(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

فرض کنید E زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^n$ باشد و $f\in C^1(E)$ و برای هر $x_\circ\in E$، $\phi(t,x_\circ)$ جواب مساله مقدار اولیه $\begin{cases}\dot{x}=f(x)\\ x(\circ)=x_\circ\end{cases}$ باشد که در قلمرو ماکزیمال $I(x_\circ)$ تعریف شده است.در این صورت برای $t\in I(x_\circ)$ نگاشت $\phi_t:E\to E$ که با $\phi_t(x_\circ)=\phi(t,x_\circ)$ تعریف می شود، شار معادله دیفرانسیل $\dot{x}=f(x)$ نامیده می شود. ϕ_tهمچنین به عنوان شار میدان برداری $f(x)$ نامیده می شود.

۱-۴ تعریف کلی یک سیستم دینامیکی

یک سیستم دینامیکی سه تایی (T,M,ϕ) است که در آن T را به عنوان یک گروه[6] جمعی با عمل مخصوص خودش در نظر می گیریم. M یک مجموعه و ϕ یک تابع است، به صورت $\phi:U\subset T\times M\to M$ که دارای خواص زیر است:

---

۵ *Flow*
۶ *Group*

$(i)\, \phi(0, x) = x$

$(ii)\, \phi(t_2, \phi(t_1, x)) = \phi(t_1 + t_2, x) \qquad t_1, t_2, t_1 + t_2 \in I(x)$

که در آن $I(x)=\{t\in T ;(t,x)\in U\}$.

در این تعریف M را فضای زمینه می نامیم. در ضمن اگر داشته باشیم $\begin{cases} \phi_x(t)=\phi(t,x) \\ \phi^t(x)=\phi(t,x) \end{cases}$ یعنی یکی از متغیر ها را به عنوان ثابت در نظر بگیریم، آنگاه $\phi_x : I(x)\to M$ را شار گذرنده از x می نامیم.

- مجموعه $\gamma_x=\{\phi(t,x)\ ;\ t\in I(x)\}$ را مدار[۷] گذرنده از x می نامیم.

- زیر مجموعه S از فضای زمینه M را نسبت به تابع ϕ پایدار می نامیم اگر برای تمام x های عضو S و برای تمام t های عضو T داشته باشیم: $\phi(t,x)\in S$.

- در تعریف هندسی سیستم دینامیکی، M یک منیفلد است.

۱-۵ انواع نقاط برای یک دستگاه معادله دیفرانسیل (سیستم دینامیکی)

۱-۵-۱ نقطه ساکن

نقطه $x_0 \in \mathbb{R}^n$ نقطه ساکن یا نقطه بحرانی[۸] دستگاه $\dot{x}=f(x)$ نامیده می شود، هرگاه $f(x_0)=0$

۱-۵-۲ نقطه هذلولوی

نقطه ساکن x_0 نقطه هذلولوی[۹] دستگاه $\dot{x}=f(x)$ نامیده می شود، هرگاه هیچ یک از مقادیر ویژه ی $Df(x_0)$ دارای قسمت حقیقی صفر نباشد.

---

۷ *Orbit*
۸ *Fixed point*
۹ *Hyperbolic*

۱-۵-۳ چاه و چشمه

نقطه ساکن $x_\circ$ دستگاه $\dot{x}=f(x)$ یک چاه[۱۰] نامیده می شود، هر گاه تمامی مقادیر ویـژه مـاتریس $Df\ (x_\circ)$ دارای قسمت حقیقی منفی باشند و این نقطه ساکن یک چـشمه[۱۱] نامیـده مـی شـود، هرگـاه تمامی مقادیر ویژه ماتریس $Df\ (x_\circ)$ دارای قسمت حقیقی مثبت باشند.

۱-۵-۴ نقطه زینی

نقطه ی ساکن $x_\circ$ را یک نقطه زینی[۱۲] می نامیم اگر $Df\ (x_\circ)$ مقـادیر ویـژه بـا قـسمت حقیقـی مثبت و منفی داشته باشد.

۱-۵-۵ کانون

در دستگاه $\dot{x}=Ax$ نقطه ساکن $x_\circ$ را یک کانون[۱۳] می نـامیم، هرگـاه A مقـدار ویـژه ی موهـومی نداشته باشد.

۱-۵-۶ مرکز

در دستگاه $\dot{x}=Ax$ نقطه ساکن $x_\circ$ را یـک مرکـز[۱۴] مـی نـامیم، هرگـاه A فقـط مقـدار ویـژه ی موهومی محض داشته باشد.

۱-۶ انواع مدارها

هر میدان برداری X منجر به تولید یک دستگاه معادله دیفرانـسیل $\dot{x}=f(x)$ کـه در آن f یـک میـدان بـرداری اسـت، مـی شـود. متنـاظر بـا هـر نقطـه یـک منحنـی انتگـرال مـاکزیمم داریـم:

---

۱۰ *Sink*
۱۱ *Source*
۱۲ *Saddle*
۱۳ *Focus*
۱۴ *Center*

اگر منیفلد M که دستگاه معادله دیفرانسیل را روی آن تعریف می کنیم فشرده $\forall p{:}\exists\alpha \quad s.t \quad \alpha(\circ)=p$ باشد به ازای هر منحنی انتگرال α بازه ماکزیمال آن مجموعه ی اعداد حقیقی می باشد.در حقیقت اگر $X_t{:}M\to M$ باقانون $X_t(p)=\alpha_p(t)$ برقرار باشد ،منحنی انتگرال ماکزیمال را بصورت $\partial(p)=\{X_t(p)\ ;\ t\in\mathrm{R}\}$ داریم.

۱-۶-۱نقطه تکین

اگر در نقطه ای مثل p هیچ جریانی وجود نداشته باشد، این نقطه را تکین[15] می نامیم. در اینصورت برای میدان برداری X داریم : $X(p)=\circ$ در نتیجه $\partial(p)=p$.

۱-۶-۲ مدار بسته

اگر ایمرسیون[16] $f{:}\mathrm{R}\to M$ با قانون $(\forall p\in M) \quad f(t)=X_t(p)$ را در نظر بگیریم، چنانچه این ایمرسیون یک به یک نباشد یعنی بعد از گذشت زمان ω مدار به مکان اولیه اش برگردد ($\exists\omega>\circ \quad s.t \quad X_\omega(p)=p$) مدار بسته ی $\partial(p)$ تشکیل می شود.کوچکترین زمان ω را دوره ی تناوب می نامیم.

۱-۶-۳ مدار منتظم

اگر ایمرسیون تعریف (۱-۶-۲)یک به یک باشد، یک مدار منتظم[17] درست می شود که درطول منیفلد جریان داردوخودش را قطع نمی کند(مرجع[۱۱]).

---

۱۵ *Singularity*
۱۶ *Immersion*
۱۷ *Regular orbit*

۱-۷ مجموعه های ω - حدی و α - حدی

فرض کنید M یک منیفلد هموار (از رده ی C^r)باشد و $p\in M$ و X یـک میـدان بـرداری از رده C^∞روی منیفلد Mباشد($X : M \xrightarrow{C^\infty} TM$)آنگاه مجموعه های ω - حدی[۱۸] و α - حدی[۱۹] نقطه ی p را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\omega(p) = \left\{ q\in M \,;\, \exists\left\{t_n\right\}\subset \mathbb{R} : t_n \to +\infty \Rightarrow X_{t_n}(p)\to q\right\}$$

$$\alpha(p) = \left\{ q\in M \,;\, \exists\left\{t_n\right\}\subset \mathbb{R} \,;\, t_n \to -\infty \Rightarrow X_{t_n}(p)\to q\right\}$$

- اگـر میـدان بـرداری را بـه قرینـه آن تبـدیل کنـیم جهـت منحنـی هـای انتگـرال[۲۰] عـوض می شود $(X \to -X)$ در نتیجه $\omega_{-X}(p)=\alpha_X(p)$. یعنی هر خاصیتی کـه بـرای مجموعـه هـای $\omega-$ حدی برقرار باشد را می توان برای مجموعه های $\alpha-$ حدی نیز در نظر گرفت.

۱- ۸ فضای مماسی یک نقطه از منیفلد

مجموعـه ای از نگاشـتهای $X_P : C^\infty(p)\to\mathbb{R}$ کـه بـرای همـه $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$و $f,g \in C^\infty(p)$ دارای دو خاصیت زیر باشند، فضای مماسی[۲۱] در نقطه p از منیفلد Mنامیده می شود:

خطی بودن $\quad (i)\quad X_P(\alpha f + \beta g) = \alpha\,(X_P f) + \beta(X_P g)$

لایپ نیتز[۲۲] $\quad (ii)\quad X_P(fg) = (X_P f)g + f(p)(X_P g)$

$\dim T_P M = \dim M \qquad TM = \bigcup_{p\in M} T_p M$

---

۱۸ ω-limit set
۱۹ α-limit set
۲۰ Integral curve
۲۱ Tangent space
۲۲ Leibniz rule

۱-۹ تقاطع اریب[۲۳]

فرض کنید M و N دو منیفلد هموار باشند و $S\subset N$ یک زیر منیفلد از رده C^r باشد. و $f:M\to N$ یک نگاشت C^k باشد. می گوئیم نگاشت f بر S در نقطه $p\in M$ اریب است اگر یک کدام از دو حالت زیر پیش بیاید:

$(i)\quad f(p)\notin S$

$(ii)\quad if\quad f(p)\in S\Rightarrow df_p(T_PM)+T_{f(p)}S=T_{f(p)}N$

درحالت دوم در حقیقت می گوئیم دو زیر فضای سمت چپ، فضای مماسی در نقطه $f(p)$ برمنیفلد N را تولید کند. در نتیجه بیان می کنیم f بر S اریب است اگر بر S در هر نقطه $P\in N$ اریب باشد و می نویسیم $f\pitchfork S$.

۱-۱۰ منیفلدهای پایدار[۲۴] و ناپایدار[۲۵]

اگر f عضو مجموعه ی دیفیومورفیسم[۲۶]های رده ی C^r روی منیفلد M باشد و $p\in M$ یک نقطه ی ثابت هذلولوی برای f باشد منیفلدهای پایدار و ناپایدار نقطه p را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$W^s(p)=\{\, q\in M\,;$ مجموعه $\omega-$ حدی q باشد $p\,\}$ یا $f^n(q)=p$

$W^u(p)=\{\, q\in M\,;$ مجموعه $\alpha-$ حدی q باشد $p\,\}$ یا $f^{-n}(q)=p$

---

۲۳ *Transversality*
۲۴ *Stable manifold*
۲۵ *Unstable manifold*
۲۶ *Diffeomorphism*