دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه

حل عددی دستگاههای معادلات انتگرال فردهلم روی بازه‌های کراندار

نگارش

احمد کاظملو شیخی

استاد راهنما : دکتر حمید مسگرانی

استاد مشاور : دکتر محسن شاهرضایی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

شهریورماه 1389

بسم الله الرحمن الرحيم

باسمه تعالي

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

مديريت تحصيلات تكميلي

تعهد نامه ی اصالت اثر

اینجانب احمد کاظملو شیخی متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است ، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است . این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است . در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد .

کلیه ی حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می باشد .

نام و نام خانوادگی دانشجو : احمد کاظملو شیخی

امضاء

تهران- لویزان – کد پستی 16788 – صندوق پستی 163-16785 – تلفن 9 – 22970060(داخلی 2347) – نمابر 22970011 – پست الکترونیکی: sru@sru.ac.ir

دانشکده علوم پایه

حل عددی دستگاههای معادلات انتگرال فردهلم روی بازه‌های کراندار

نگارش

احمد کاظملو شیخی

استاد راهنما : دکتر حمید مسگرانی

استاد مشاور : دکتر محسن شاهرضایی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

شهریورماه 1389

تاییدیه هیات داوران

تقدیم به :

پدر و مادرم که نور دیدگانم و خواهران و برادرانم که بالهای پروازم هستند

و همسر فداکارم که نقش برجسته زندگیم است.

سپاس و قدردانی

حمد و سپاس بیکران خداوند عز و جل را که مرا بر طریق علم رهنمـون کـرد. کـه در ایـن راه بـر خود لازم میدانم از استاد راهنمای خود جناب **آقای دکتر مسگرانی** که به حق از اساتید برجـسته رشـته ریاضی در سطح کشور می‌باشد و رساله حاضر نتیجه راهنمائی‌ها و کمک‌های بی‌دریغ ایشان است، تـشکر و قدردانی نمایم. همچنین از بذل توجه استاد مشاورم جناب **آقای دکتر شاهرضایی** کـه بـا مطالعـه دقیـق پایان‌نامه در تنظیم آن کمک‌های شایانی نمودند تشکر می‌نمایم.

از استاد ارجمندم جناب **آقای دکتر میمنی** و جناب **آقای دکتر مجید کرمی** که زحمت داوری پایان‌نامه بنده را عهده‌دار بودند و از جناب **آقای دکتر زعیم باشی** نماینده محترم تحصیلات تکمیلـی بـه جهت حضور در جلسه دفاعیه تشکر می‌کنم.

از دوست عزیزم جناب **آقای حامد ربیعی** که در تهیه این پایان نامه کمک های خویش را از ایـن حقیر دریغ ننمودند سپاسگزارم .

در پایان از **خانواده عزیزم** که در همه لحظات تحصیل یارو یاورم بودند نیز صمیمانه سپاسگزارم.

چکیده

یکی از شاخه های علم ریاضی که کاربرد فراوانی در مسائل مهندسی و فیزیک دارد معادلات انتگرال است. روشهای متعدی برای حل این معادلات وجود دارد, در این پایان نامه روش های عددی برای تقریب جواب دستگاهی از معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم ارائه می کنیم. یک روش تصویری و یک روش نیستروم در فضاهای متفاوت مطرح می کنیم. نشان می دهیم چنین شیوه ای پایدار و همگراست

اشاره می‌کنیم که دستگاههای معادلات خطی را که حل می‌کنیم خوش وضع هستند یعنی اعداد وضعیت ماتریس های ضرایب آنها بطور یکنواخت کراندار است به جز برای عامل لگاریتمی ممکن.در اینجا به خاطر سادگی دستگاهی را با دو معادله انتگرال در نظر گرفته اما مطالبی را که توضیح داده و اثبات می کنیم می‌توان کمابیش برای دستگاههایی با n معادله انتگرال فردهلم نوع دوم تعمیم داد.

کلید واژه: معادلات انتگرال فردهلم , روش تصویری , روش نیستروم , درونیابی لاگرانژ و عدد و ضعیت

فهرست

فهرست جداول

فصل چهارم

فصل اول

معادلات انتگرال و قضایای مورد نیاز

1-1 تاریخچه

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه های آنالیز ریاضی است که اصولا اهمیت آن از لحاظ مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی است. معادلات انتگرال در خیلی از مسائل فیزیکی و فنی ظاهر می شود. در تحقیقات قرن اخیر در نظریه کشسانی، این نوع معادلات نقش مهمی را بازی کرده اند. بخصوص دسته ای از آنها که به معادلات انتگرال منفرد شهرت دارند.[1].

در ابتدا حل معادله انتگرال تحت عنوان معکوس گرفتن از انتگرال تلقی میشد. لیکن اولین بار اصطلاح معادله انتگرال بوسیله ریموند[1] پیشنهاد شد. لاپلاس[2] درسال 1782 معادله انتگرالی برای تابع f بصورت زیر ارائه داد :

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t)dt \qquad (1-1)$$

در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات فوریه[3] در سال 1811 روی نظریه حرارت کار کرد و مقالاتی از خود برجای گذاشت. آبل[4] نیز در سال 1823 در مسئله خود که به مسئله مکانیکی آبل معروف است کاربرد معادلات انتگرال را مطرح کرد. در سال 1826 پوآسن[5] در نظریه مغناطیس خود، نوعی معادله انتگرال

1- Bois-Reymond
2- Laplace
3- Fourier
4- Abel
5- Poisson

مطرح کرد. لیوویل[1] مستقلا معادلات انتگرال خاصی را از سال 1832 به بعد حل کرد. یک قدم مهم در راه توسعه معادلات انتگرال توسط لیوویل برداشته شد و آن چگونگی حل بعضی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود.

اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال بکار میرود اولین بار توسط هیلبرت[2] پیشنهاد شد. البته قبل از هیلبرت معادلات آبل و لیوویل به فرمهای زیر مطرح بود و هر دو از نمونه های مهم در معادلات انتگرال هستند:

$$g(x)=\int_a^x k(x,y)f(y)dy \qquad (2\text{-}1)$$

$$f(x)=g(x)+\int_a^x k(x,y)f(y)dy \qquad (3\text{-}1)$$

که در آنها k, g توابعی معلوم و f تابعی مجهول است.[2].

پوآنکاره[3] درسال 1896 معادله انتگرال زیر را که متناظر با معادله دیفرانسیل جزئی (حرکت موج) $\nabla u+\lambda u=f(x,y)$ می باشد بدست آورد که در آن

$$\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{و} \quad u(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)u(y)dy=f(x) \qquad (4\text{-}1)$$

فردهلم[4] جهت بدست آوردن جواب این معادله تحقیقاتی انجام داد. ولترا[5] اولین کسی بود که در اواخر قرن نوزدهم نظریه عمومی معادلات انتگرال را ارائه کرد. فردهلم در اوایل قرن جدید جهت حل مسئله دیریکله[6] از معادلات انتگرال نوع دوم استفاده کرد. معادله انتگرال فردهلم بصورت زیر است:

$$f(x)=g(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)dy \qquad a\le x\le b \qquad (5\text{-}1)$$

1- Liouvill
2- Hilbert
3- Poincare
4- Erik Ivan Fredholm
5- Vito- Volterra
6- Dirichlet

ارائه یک سمینار توسط اریک هولمگر[1] در سال 1901 بر روی کارهای فردهلم علاقه هیلبرت را به تحقیق روی معادلات انتگرال برانگیخت و او در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال کمک گرفت. هیلبرت فاصله انتگرالگیری را (0,1) و هسته را پیوسته فرض کرد. یکی از کارهای مهم هیلبرت فرموله کردن مسئله معادلات دیفرانسیل مقدار مرزی بصورت معادله انتگرال است . در اوایل نیمه دوم قرن اخیر تحقیقات زیادی روی جواب معادله انتگرال بوسیله هرمن ویل[2] در ارتباط با اینکه به ازای چه مقادیر λ، معادله انتگرال جواب دارد، صورت گرفته است.از این به بعد تقریبا روی روشهای عددی کار شده، که یکی از آنها روش نیستروم می باشد.

2-1 معادله انتگرال

تعریف 1-2-1: یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود.

یک نمونه از یک معادله انتگرال که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است و باید معلوم شود به صورت زیر است:

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \qquad (6\text{-}1)$$

$k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می شود. $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند.

در معادله (6-1) تابع مجهول یعنی $u(x)$ در زیر علامت انتگرال ظاهر شده است و در حالتهای دیگر ممکن است تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال هم ظاهر شود.

باید توجه کرد که هسته معادله یعنی $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند.

هدف، پیدا کردن تابع مجهول $u(x)$ است که در رابطه (6-1) صدق کند. برای این کار روشهای

1- Erick Holmger
2- Hermann Weyl

مختلفی به کار برده می شود.معادلات انتگرال در مباحث بسیاری از علوم از قبیل فیزیک، بیولوژی، شیمی و مهندسی ظاهر می شوند. مراجع [1,2] منابع خوبی برای پی بردن به منشا ظهور اینگونه معادلات می‌باشند. در مثال زیر نحوه تبدیل یک مسئله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال بحث خواهیم کرد.

مثال 1-2-1 :

مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم :

$$u'(x) = 2xu(x) \qquad x \geq 0 \tag{7-1}$$

که در شرط اولیه زیر صدق می‌کند

$$u(0) = 1 \tag{8-1}$$

معادله (1-7) را میتوان به سادگی با به کار بردن ایده جداکردن متغیرها حل کرد.

جواب معادله دیفرانسیل (1-7) با توجه به شرط (1-8)به صورت زیر خواهد بود

$$u(x) = e^{x^2} \tag{9-1}$$

اما اگر از طرفین رابطه (1-7) نسبت به x از ٠ تا x انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$\int_0^x u'(t)dt = \int_0^x 2tu(t)dt \tag{10-1}$$

و در نتیجه با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (1-10) و استفاده از شرط اولیه (1-8) داریم :

$$u(x) = 1 + \int_0^x 2tu(t)dt \tag{11-1}$$

از مقایسه طرفین رابطه (1-11) و (1-6) درمی‌یابیم که (1-11) یک معادله انتگرال با هسته $K(x,t) = 2t$ و تابع $f(x) = 1$ است.

همانطوری که در بالا اشاره شد، هدف اصلی ما تعیین تابع غیر معلوم $u(x)$ است که در زیر علامت انتگرال نظیر معادله کلی (1-6) و معادله خاص(1-11) ظاهر شده و در معادله انتگرال داده شده صدق می کند. به معادلات انتگرال (1-6)و (1-11) معادلات انتگرال خطی می گویند زیرا که تابع $u(x)$ زیر

علامت انتگرال به صورت خطی است یعنی توان یک دارد. اما اگر تابع $u(x)$ در زیر علامت انتگرال با توابعی غیرخطی نظیر $u^2(x)$ یا $\cos u(x)$ یا $e^{u(x)}$ و غیره تعویض شود، آنگاه معادله انتگرال را غیرخطی می گویند.

3-1 تقسیم بندی معادلات انتگرال خطی

اما معادلات انتگرال خطی وغیر خطی را می توان به چهار نوع دسته بندی کرد:

1- معادلات انتگرال فردهلم

2- معادلات انتگرال ولترا

3- معادلات انتگرال – دیفرانسیل

4- معادلات انتگرال منفرد

اکنون تعاریف و خواص هر نوع را بررسی می کنیم.

1-3-1 معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم که در آنها حد پایین و حد بالای انتگرال‌گیری به ترتیب اعداد ثابت a,b هستند به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)u(x)= f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad a\le x,t\le b \qquad (12\text{-}1)$$

که در آن هسته معادله انتگرال، $K(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل مشخص هستند و λ هم یک پارامتر معلوم است. معادله (12-1)را خطی می گویند زیرا که تابع مجهول $u(x)$ در زیر علامت انتگرال به صورت خطی

ظاهر شده است یعنی توان $u(x)$ یک است. برحسب اینکه $\phi(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را انتخاب کند دو دسته معادلات انتگرال فردهلم به صورت زیر می باشند :

1- زمانی که $\phi(x)\equiv 0$ معادله (1-12) به معادله زیر تبدیل می شود

$$f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt=0 \qquad (13\text{-}1)$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می نامند.

2- زمانی که $\phi(x)\equiv 1$ معادله (1-12) به شکل زیر در خواهد آمد

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (14\text{-}1)$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می نامند.

1-3-2 معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، که در آنها حد پایین انتگرال ثابت و حد بالای انتگرال گیری متغیر باشد به صورت زیر است :

$$\phi(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)u(t)dt \qquad (15\text{-}1)$$

که در آن تابع مجهول یعنی $u(x)$ در زیر علامت انتگرال به صورت خطی می باشد.

باید توجه کرد که (1-15) را می توان به عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت به طوریکه هسته $k(x,t)$، برای $x\in[a,b], t>x$ صفر فرض شود.

دو دسته معادلات انتگرال ولترا به صورت زیر می باشند:

1- در حالتی که $\phi(x)\equiv 0$ معادله (1-15) به صورت زیر تبدیل خواهد شد

$$f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)u(t)dt=0 \qquad (16\text{-}1)$$

این معادله را معادله انتگرال ولترای نوع اول می گویند.

-2 زمانی که $\phi(x)\equiv 1$ آنگاه معادله (1-15) به شکل زیر درخواهد آمد

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)u(t)dt \qquad (17\text{-}1)$$

این معادله را معادله انتگرال ولترای نوع دوم می گویند.

با توجه به معادلات (1-12) تا (1-17) می توانیم نتیجه گیریهای زیر را ارائه نمائیم :

الف) ساختمان معادلات فردهلم و ولترا

در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع اول، تابع مجهول $u(x)$ به طور خطی زیر علامت انتگرال ظاهر می شود.

اما در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع دوم، تابع مجهول هم در زیر علامت انتگرال و هم در خارج از علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می شود.

ب) حدود انتگرالگیری

در معادلات انتگرال فردهلم، انتگرالگیری روی یک فاصله متناهی با حدود ثابت انجام می شود. اما در معادلات انتگرال ولترا، حداقل یکی از حدود فاصله انتگرالگیری متغیر است و معمولا حد بالای انتگرالگیری به صورت متغیر انتخاب می شود.

ج) خاصیت خطی بودن

تابع مجهول $u(x)$ در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم در زیر علامت انتگرال با توان یک ظاهر می شود اما زمانی که به جای $u(x)$ عبارتی مانند $F(u(x))$ داشته باشیم، معادلات انتگرال غیر خطی فردهلم و ولترا خواهیم داشت.

در زیر مثالهایی از معادلات انتگرال غیر خطی آورده شده است :

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)u^2(t)dt \qquad (18\text{-}1)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) e^{u(t)} dt \qquad (19\text{-}1)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \sin(u(t)) dt \qquad (20\text{-}1)$$

د) خاصیت همگن بودن

اگر در معادله انتگرال فردهلم نوع دوم (1-14) و معادله انتگرال ولترا نوع دوم (1-17) شرط $f(x) \equiv 0$ برقرار باشد، معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن می نامند. در غیر این صورت معادله را یک معادله انتگرال غیرهمگن می گویند.

ه) رفتار تکین معادله انتگرال

یک معادله انتگرال را تکین می نامند اگر انتگرالگیری ناسره باشد. این معمولا زمانی رخ می دهد که فاصله انتگرالگیری نامتناهی باشد یا اینکه هسته معادله در یک یا تعداد بیشتری نقطه از حوزه مورد نظر یعنی $a \le t \le b$ بی کران باشد.

1-3-3 معادلات انتگرال – دیفرانسیل

ولترا در اوایل 1900 در حال مطالعه موضوع رشد جمعیت بود که با معادلات انتگرال – دیفرانسیل مواجه شد. در اینگونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ معمولا در دو طرف ظاهر می شود. در یک طرف، در زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر تحت عملگر مشتق معمولی ظاهر می شود.

مدلسازی ریاضی تعدادی از پدیده ها در فیزیک و بیولوژی در قالب این نوع معادلات انتگرال – دیفرانسیل ارائه می شوند. البته اینگونه معادلات در هنگام تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال هم نمایان می گردند.

در زیر چند مثال از معادلات انتگرال – دیفرانسیل آورده شده است