بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش جبر

گراف های جابجایی حلقه های نیم ساده

استادان راهنما:

دکتر علیرضا عبدالهی

دکتر علی اکبر محمدی

پژوهشگر:

فاطمه نیرومند

دی ماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم فاطمه نیرومند

تحت عنوان:

گرافهای جابجایی حلقه های نیم ساده

در تاریخ ... ۸۷/۱۰/۳ ..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....بسیار خوب...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکترعلیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی اکبر محمدی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر شکرا.. سالاریان	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر جواد اسدالهی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

گروه ریاضی دانشکده علوم دانشگاه اصفهان

تشکر و قدردانی

منت خدای را عزوجل، که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت.

خدا را شاکرم که این توفیق را عنایت فرمود تا برگ دیگری از دفتر زندگی خویش را ورق بزنم و این مرحله از تحصیل علم را پشت سر گذارم. زندگی پر از لحظات تلخ و شیرین است. امروز حلاوت در کامیابی فکر و تلخی از ناکامی آنست. پله های تکامل را نهایتی نیست و به روی ما گشوده است. در جهت تقدیر از مساعی بیدریغ همه اعضاء خانواده ام که همواره مشوق و راهنمای من بوده اند صمیمانه قدردانی می نمایم. افزون بر آن از همه اساتید بزرگواری که از محضر آنان کسب علم نموده ام تشکر می نمایم. در پایان از همه دوستان که مرا مرهون لطف و محبت خویش قرار دادند سپاسگزاری می کنم.

تقدیم به

همه عزیزانم

چکیده

در این پا یان نا مه گراف های جبری را مورد بررسی قرار می د هیم . از جمله گراف های مورد بررسی گراف جا بجا یی روی حلقه های نیم ساده و گراف مقسوم علیه صفر روی حلقه های متناهی است. گراف جا بجا یی و گراف مقسوم علیه صفر را بـه صورت زیر تعریف می کنیم .

فرض می کنیم R یک حلقه ناجابجایی با شد. در این صورت گراف جا بجا یی R را با $\Gamma(R)$ نشان می دهیم . مجموعه رئوس $\Gamma(R)$ عبارت است از مجموعه ی $R \setminus Z(R)$ و دو راس متمایز a و b مجاورند اگر $ab=ba$.

گراف جهتدار مقسوم علیه صفر را با $\Gamma(R)$ نشان می دهیم که مجموعه رئو س $\Gamma(R)$ عبارت است از مجموعه ی همه ی مقسوم علیه های صقر غیر صفر R و راس a به راس b متصل است اگر $ab=0$.

گراف بدون جهت مقسوم علیه صفر را با $\overline{\Gamma}(R)$ نشان می دهیم که مجموعه رئوس $\Gamma(R)$ عبارت است از مجموعه ی همه ی مقسوم علیه های صقر غیر صفر R و دو راس متمایز a و b مجاورند اگر وتنها اگر $ab=0$ یا $ba=0$.

می نیمم درجه و ماکزیمم درجه و عدد خوشه ای وعدد استقلال را در گراف جا بجا یی نشان می دهیم .

در گراف مقسوم علیه صفر نشان می دهیم تعداد یالهای گراف زوج است .

واژه های کلیدی: گراف جا بجا یی ، حلقه نیم ساده ، گراف اویلری ، گراف مقسوم علیه صفر

فهرست مندرجات

پیشگفتار

در این پایان‌نامه گراف‌های جبری را مورد بررسی قرار می‌دهیم، که شامل چهار فصل است.

در فصل اول برخی از تعاریف و قضایایی که در این پایان‌نامه کاربرد دارد بیان شده است.

در فصل دوم گراف جابجایی روی حلقه‌ی نیم ساده را بررسی و مطالعه می‌کنیم.
گراف جابجایی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم R یک حلقه‌ی ناجابجایی باشد. در این صورت گراف جابجایی R را با $\Gamma(R)$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی رئوس $\Gamma(R)$ عبارت است از مجموعه‌ی $R\backslash Z(R)$ و دو رأس متمایز a و b مجاورند اگر $ab = ba$.

در این فصل نشان می‌دهیم که اگر گراف‌های جابجایی حلقه‌های R و S یکریخت باشند آن‌گاه حلقه‌های جابجایی و نیم ساده‌ی R_1 و S_1 و حلقه‌ی نیم ساده‌ی T وجود دارد که

$$R \simeq T \times R_1 \text{ و } S \simeq T \times S_1 \text{ و } |R_1| = |S_1|$$

سپس ماکزیمم و می‌نیمم درجه و عدد خوشه‌ای گراف جابجایی روی میدان را به‌دست می‌آوریم.

در فصل سوم گراف مقسوم‌علیه صفر را روی حلقه‌های متناهی بررسی می‌کنیم. گراف مقسوم‌علیه صفر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گراف جهت‌دار مقسوم علیه صفر R را با $\Gamma(R)$ نشان می دهیم که مجموعه رئوس $\Gamma(R)$ عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم علیه‌های صفر غیر صفر R و رأس x به رأس y متصل است اگر $xy = 0$.

گراف بدون جهت مقسوم علیه صفر R را با $\bar{\Gamma}(R)$ نشان می‌دهیم که مجموعه رئوس $\bar{\Gamma}(R)$ عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم علیه‌های صفر غیر صفر R و دو رأس x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = 0$ یا $yx = 0$.

در این فصل نشان می‌دهیم برای هر حلقه‌ی متناهی R، تعداد یال‌های $\Gamma(R)$ زوج است. همچنین بعضی از خواص گراف‌های مقسوم علیه صفر را روی حلقه‌های ماتریسی بررسی می‌کنیم و از جمله نتایج این فصل داریم

برای هر دو حلقه‌ی یکدار و جابجایی ومتناهی R و S و $n, m \geqslant 2$، اگر $\Gamma(M_n(R)) \simeq \Gamma(M_m(S))$، آن‌گاه

$n = m$ و $|R| = |S|$ و $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$.

در فصل چهارم گراف‌های جابجایی روی حلقه‌ی غیر جابجایی R با مرتبه‌ی p^2 و p^3 را بررسی می‌کنیم.

در این فصل نشان می‌دهیم اگر R یک حلقه‌ی غیر جابجایی از مرتبه‌ی p^2 (p

اول) و S یک حلقه‌ی غیر جابجایی دلخواه باشد به طوری که $\Gamma(S) \overset{\varphi}{\cong} \Gamma(R)$، آن‌گاه $|R| = |S|$.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱—۱ تعاریف وقضایای مقدماتی

در این پایان‌نامه فرض شده است خواننده با مفاهیم مقدماتی جبر آشنا است. لذا در این فصل برخی از تعاریف و قضایایی که در این پایان‌نامه کاربرد دارد بیان شده است.

تعریف ۱—۱.۱ اگر R یک حلقه باشد، مرکز R به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Z(R) = \{c \in R \mid cr = rc, \quad \text{به ازای هر } r \in R\}$$

تعریف ۱—۲.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقه و $\varnothing \neq A \subseteq R$ مرکزساز A در R را با $C_R(A)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_R(A) = \{x \in R \mid ax = xa, \quad \text{به ازای هر } a \in A\}.$$

اگر $A = \{a\}$، آن‌گاه $C_R(a)$ مرکزساز a در R است.

تعریف ۱—۱.۳ مدول A را نیم‌ساده گویند اگر برای هر زیرمدول از A مثل K، زیرمدولی از A مثل P وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $A = K \oplus P$

تعریف ۱—۱.۴ حلقه‌ی یکدار R که در آن $۰ \neq ۱$ نیم‌ساده است، هرگاه به عنوان مدول چپ روی خودش نیم‌ساده باشد.

تعریف ۱—۱.۵ حلقه‌ی جابجایی R را موضعی می‌نامیم، اگر یک ایده‌آل چپ ماکسیمال منحصربه‌فرد داشته باشد.

تعریف ۱—۱.۶ فرض کنید R یک حلقه باشد. می‌گوییم R حلقه‌ای آرتینی چپ(راست) است اگر در شرایط زیر صدق کند

هرگاه $(I_i)_{i\in N}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R چپ (راست) باشد و

$$I_۱ \supseteq I_۲ \supseteq \cdots \supseteq I_i \supseteq I_{i+۱} \supseteq \cdots$$

آن‌گاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $i \in N$، $I_k = I_{k+i}$.

تعریف ۱—۱.۷ یک عنصر a از یک حلقه‌ی R را پوچ‌توان می‌گوییم اگر به ازای یک عدد صحیح مثبت n، $a^n = ۰$.

تعریف ۱—۱.۸ حلقه‌ی R پوچ‌توان است اگر عدد صحیح $n > ۱$ وجود داشته باشد به طوری که $R^n = \{\sum_{i=۱}^{m} a_{۱i}\ldots a_{ni} = ۰ \mid a_۱,\ldots,a_n \in R, m \in \mathbb{N}\}$.

تعریف ۱—۱.۹ یک عنصر a از یک حلقه‌ی R را خودتوان می‌گوییم اگر $a^۲ = a$.

تعریف ۱—۱۰.۱ حلقه‌ی R، یک حلقه‌ی کاهشی است اگر R هیچ عضو پوچ‌توان غیر صفر نداشته باشد.

تعریف ۱—۱۱.۱ فرض می‌کنیم R حلقه‌ی جابجایی باشد. رادیکال جیکبسن R را اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R تعریف می‌کنیم و آن را با $J(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱—۱۲.۱ فرض می‌کنیم F یک میدان و E یک توسیع جبری از F باشد. عنصر $a \in E$ را روی میدان F جبری گوییم اگر a ریشه‌ی یک چندجمله‌ای ناصفر در F باشد.

تعریف ۱—۱۳.۱ فرض می‌کنیم F یک میدان باشد. E را یک توسیع جبری F گوییم هرگاه هر عنصر E روی F جبری باشد.

تعریف و نمادگذاری ۱—۱۴.۱ فرض می‌کنیم F یک میدان باشد. $M_n(F)$ مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان F است.

تعریف ۱—۱۵.۱ فرض می‌کنیم F یک میدان باشد. ماتریس A در $M_n(F)$ را یک ماتریس دوری گوییم اگر چندجمله‌ای می‌نیمال و مشخصه‌ی آن یکسان باشند.

تعریف ۱—۱۶.۱ فرض می‌کنیم F یک میدان باشد. برای هر $1 \leqslant i, j \leqslant n$، E_{ij} یک ماتریس $n \times n$ در $M_n(F)$ است که درایه‌ی (i,j)ام آن برابر ۱ است و دیگر درایه‌ها صفر هستند.

تعریف ۱—۱.۱۷ عضو ناصفر a در حلقه‌ی R را مقسوم‌علیه چپ [راست] a گوییم هرگاه عضو ناصفر $b \in R$ وجود داشته باشد که $ab = \circ$ [$ba = \circ$]. یک مقسوم‌علیه صفر عضوی از R است که هم مقسوم‌علیه راست صفر و هم مقسوم‌علیه چپ صفر باشد.
مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر R را با $D(R)$ نمایش می‌دهیم، همچنین پوچ‌ساز راست صفر را با $Ann_r(x) = \{a \in R \mid xa = \circ\}$ و پوچ‌ساز چپ صفر را با $Ann_l(x) = \{a \in R \mid ax = \circ\}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱—۱.۱۸ حلقه‌ی جابجایی و یک‌دار R را دامنه‌ی صحیح می‌نامیم هرگاه مقسوم‌علیه صفر غیرصفر نداشته باشد.

لم ۱—۱.۱۹ هر حلقه‌ی جابجایی و متناهی با بیش از یک عضو که مقسوم‌علیه صفر ندارد یک میدان است.

اثبات. ر. ک.[۱] [۲۵ ، صفحه‌ی ۳۷۴]. □

تعریف ۱—۱.۲۰ اگر برای حلقه‌ی R عدد طبیعی n وجود داشته باشد که برای هر $a \in R$، $na = \circ$ (یعنی مرتبه‌ی جمعی اعضای R همگی متناهی و یک کران n داشته باشد) گوییم مشخصه‌ی R ناصفر است و کوچک‌ترین عدد طبیعی واجد این خاصیت را مشخصه‌ی R گوییم.
در صورتی‌که چنین عددی وجود نداشته‌باشد مشخصه‌ی R صفر است.
مشخصه‌ی R را با $\mathrm{Char}R$ نشان می‌دهیم.

[۱] مخفف رجوع کنید به

تعریف ۱—۲۱.۱ اگر G یک گروه و عدد طبیعی n وجود داشته باشد که به ازای هر $a \in G$، $a^n = e$ (e عنصر همانی گروه G است)، گوییم نمای G متناهی است. کوچکترین عدد طبیعی n با این خاصیت را نمای G می‌نامیم و آن را با $\exp(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف و نمادگذاری ۱—۲۲.۱ فرض کنید M و N دو R– مدول باشند. مجموعه‌ی تمام R—همریختی‌های از M به N را با $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ نمایش می‌دهیم، یعنی

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) = \{\varphi : \text{همریختی است}-R \text{ یک } \varphi : M \to N\}$$

که این مجموعه با عمل جمع معمولی توابع یک گروه آبلی است.

تعریف و نمادگذاری ۱—۲۳.۱ فرض کنید M یک R– مدول باشد. دراین صورت $\mathrm{Hom}_R(M,M)$ را با $\mathrm{End}_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱—۲۴.۱ فرض کنید n یک عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی یک باشد. در این صورت گروه ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$، روی میدان F، نسبت به ضرب ماتریس‌ها را گروه خطی عام از درجه‌ی n روی F نامیده و آن را با $\mathrm{GL}(n,F)$ نمایش می‌دهند. اگر F یک میدان متناهی با q عنصر باشد به جای نماد $\mathrm{GL}(n,F)$ از نمادهای $\mathrm{GL}(n,q)$ یا $\mathrm{GL}_n(q)$ نیز استفاده می‌شود.

قضیه ۱—۲۵.۱ فرض کنید R، حلقه‌ی آرتینی چپ (آرتینی راست و آرتینی) باشد. دراین‌صورت $J(R)$، پوچ‌توان است، یعنی عددی طبیعی مثل n موجود است که $J(R)^n = 0$.

اثبات. ر. ک. [۲۶ ، صفحه‌ی ۱۶۹]. □

قضیه ۱—۲۶.۱ (ودربرن—آرتین [۲]) اگر R حلقه‌ی نیم‌ساده‌ی چپ باشد، آن‌گاه $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \ldots \times M_{n_r}(D_r)$، برای حلقه‌های تقسیمی مناسب D_1،...،D_r و اعداد صحیح n_1،...،n_r.

عدد r به طور منحصر بفرد تعداد زوج‌های (n_1, D_1)،...،(n_r, D_r) را مشخص می‌کند.

به طور یکریختی دقیقاً r مدول ساده‌ی چپ، روی R وجود دارد.

اثبات. ر. ک. [۱۹ ، صفحه‌ی ۳۶]. □

لم ۱—۲۷.۱ اگر D_1،...،D_r حلقه‌های تقسیمی باشند، آن‌گاه برای اعداد طبیعی دلخواه n_1،...،n_r، $M_{n_1}(D_1) \times \ldots \times M_{n_r}(D_r)$ حلقه‌ای نیم‌ساده‌ی چپ است.

اثبات. ر. ک. [۱۹ ، صفحه‌ی ۳۵]. □

قضیه ۱—۲۸.۱ یک حلقه‌ی آرتینی به طور منحصر بفرد قابل یکریخت شدن با حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی از حلقه‌های آرتینی موضعی است.

اثبات. ر. ک. [۶ ، صفحه‌ی ۹۰]. □

قضیه ۱—۲۹.۱ (کرول—اشمیت) فرض کنید R یک حلقه و M یک R مدول باشد که دارای دو تجزیه‌ی

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_r = N_1 \oplus \ldots \oplus N_s$$

[۲] Wedderburn-Artin

به زیرمدول‌های تجزیه ناپذیر است. دراین صورت $r = s$، بعد از یک اندیس‌گذاری مناسب برای هر i، $1 \leqslant i \leqslant r$ داریم $M_i \cong N_i$.

ر. ک. [۱۹ ، صفحه‌ی ۳۰۳]. □

قضیه ۱—۱.۳۰ یک حلقه‌ی آرتینی R، موضعی است اگروتنهااگر R هیچ عنصر خودتوان نداشته باشد.

ر. ک. [۱۹ ، صفحه‌ی ۲۹۵]. □

لم ۱—۱.۳۱ فرض کنیم F یک میدان باشد و $A \in M_n(F)$. دراین صورت ماتریس $B \in M_n(F)$ یک چند جمله‌ای بر حسب A است اگروفقط‌اگر B با هر ماتریس که با A جابجا می‌شود، جابجا شود.

ر. ک. [۱٦ ، نتیجه‌ی ۱۹.۴.۴]. □

قضیه ۱—۱.۳۲ فرض کنید T یک عملگر خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V روی میدان F و $P = P_1^{r_1} \dots P_k^{r_k}$ چند جمله‌ای کمین T باشد که درآن P_i ها چند جمله‌ای تکین تحویل ناپذیر متمایز روی F و r_i ها اعداد صحیح مثبتی هستند. فرض کنید W_i فضای پوچ $P_i(T)^{r_i}$ باشد. دراین صورت

الف) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$

ب)همه‌ی W_i ها تحت T پایا هستند.

ج)اگر T_i عملگر القا شده توسط T روی W_i باشد، آن‌گاه چند جمله‌ای کمین T_i عبارتست از $P_i^{r_i}$.

ر. ک. [۱۵ ، صفحه‌ی ۲۲۰]. □

لم ۱—۱.۳۳ فرض کنید R، حلقه‌ای دلخواه باشد. اگر R را به عنوان یک $R-$ مدول راست در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم $End_R(R) \cong R$.

اثبات. ر. ک. [۲٦ ، صفحه‌ی ۱۸۰]. □

قضیه ۱—۱.۳۴ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت داریم

$$End_R(\underbrace{M \oplus \ldots \oplus M}_{n}) \cong M_n(End_R(M)).$$

(در اینجا $M_n((End_R(M))$ حلقه ماتریس‌های مربعی از مرتبه‌ی n با درایه‌هایی از حلقه‌ی $End_R(M)$ است و $\cong$ یکریختی حلقه‌ای است.)

اثبات. ر. ک. [۲٦ ، صفحه‌ی ۱۸۴]. □

۱—۲ تعاریف و قضایای مقدماتی گراف

تعریف ۱—۲.۱ گراف G یک دوتایی $(V(G), E(G))$ است که تشکیل شده از یک مجموعه ناتهی $V(G)$ از رأس ها و یک مجموعه‌ی $E(G)$ از یالها که متشکل از زیر مجموعه‌های دوتایی $V(G)$ است. اگر $e = \{u, v\}$ یک یال باشد، گوییم e رأس‌های u و v را به هم وصل کرده است. رأس‌های u و v دو سر یال e نامیده می شوند.