بسمه تعالی

وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور مشهد

دانشکده علوم

گروه ریاضی

آنالیز موجکی روی منیفلدها

استاد راهنما : دکتر علی جلیلیان عطار

تهیه کننده : مهدی قسوره

تیرماه ۱۳۸۷

با تشکر فراوان از شما بزرگواران

باسمه تعالی

نام خانوادگی: قسوره	نام : مهدی
عنوان پایان نامه : آنالیز موجکی روی منیفلد ها	
استاد راهنما : دکتر علی جلیلیان عطار	استاد مشاور : دکتر ثریا طا لبی
نماینده گروه آموزشی : دکتر مرتضی آقایی	استاد داور : دکتر علیرضا میر مصطفا یی

درجه تحصیلی : کار شناسی ارشد　　رشته : ریاضی محض　　گرایش : آنالیز

دانشگاه : پیام نور　　دانشکده / مرکز　　علوم ریاضی / مشهد　　تاریخ دانش آموختگی : ۱۳۸۷/٤/۲۹

تعداد صفحه : ۸۲

کلید واژه ها : ۱- موجک ها　۲- منیفلد ها　۳- عملگرهای خود الحاق　٤- فضای هیلبرت

چکیده :

آنالیز موجک یکی از دستاوردهای نسبتاً جدید و وسیع ریاضیات محض مبتنی بر چنـدین دهـه پـژوهش در آنالیز همساز است . موجک تابع مشخص مفروضی با میانگین صفر است و بسط بر حسب انتقال ها و اتساع های این تابع انجام می گیرد . بر خلاف چند جمله ای های مثلثاتی، موجک ها در فضا بصورت موضعی بررسـی مـی شوند و به این ترتیب ارتباط نزدیک تری بین بعضی توابع و ضرایب آن ها امکان پذیر می کنند.

در این پایان نامه به بررسی و مطالعه ی آنالیز موجک ها روی منیفلدها و توصیف آنالیز موجکی کشی جدیـد از عملگرهای خود الحاقی در فضاهای هیلبرت و کاربردهای آن در مسائل اساسی آنالیز پرداخته و نشان داده ایم که چگونه آنالیز موجکی کشی در نظریه ی عملگرهای دیفرانسیلی بیضوی روی منیفلدها و مسائل مرزی خوش طرح مرتبه اول به کار می رود.

In the name of God

Thesis details

Mashhad Payam Noor Univercity

Title : WAVELET ANALYSIS ON MANIFOLDS

Student's name : Ghasvareh, M.	Supervisor : Dr. Jalilian Atar, A.
Field of study : Pure math	Department : Mathematical sciences
Date of start : Nov 24 2007	Date of finish : Jul 19 2008
Number of page : 82	For degree : M.Sc

فهرست مندرجات

عنوان

فصل اول – مقدمات و پیش نیازها

فصل اول

مقدمات و پیش نیازها

۱.۱ پیش گفتار

در جهان واقعی، بسیاری از فرآیندها و پدیده های فیزیکی را می توان توسط مدل های ریاضی بیان کرده و سپس مورد مطالعه قرار داد. با تفکیک مفاهیم اصلی از کاربردهای مشخص ، ریاضیات موجب گردید که دانشمندان رشته ها ی مختلف – در فیزیک، در پردازش سیگنال، در نظریه ی اطلاعات و غیره- دریابند که گذر به فراسو، صیقل دادن ابزارها و کنترل کردن کارایی موفقیت آنها ،همه ی این هدف ها مدیون کارهای جدیدی است که روی آنالیز فوریه صورت گرفته است. سرانجام ،این نظریه امکان به کار بستن روش استانداردی را در محاسبه ی علمی فراهم کرد. این روش، تبدیل به موجکها سریع است که محصول همکاری بین ریاضیدانان و متخصصین پردازش سیگنال است. لذا هر کاربردی را که مبتنی بر تبدیل سریع فوریه است می توان با استفاده از موجک ها فرمول بندی کرد و اطلاعات فضایی (یا زمانی) موضعی بیشتری بدست آورد. بطور کلی، این موضوع بر پردازش سیگنال و تصویر و الگوریتم های عددی سریع برای محاسبه ی عملگرهای انتگرالی اثر می گذارد.

آنالیز موجک که یکی از دستاوردهای نسبتاً جدید و وسیع ریاضیات محض مبتنی بر چندین دهه پژوهش در آنالیز همساز است، امروزه کاربردهای مهمی در بسیاری از رشته های علوم و مهندسی یافته و امکانات جدیدی برای درک جنبه های ریاضی آن و نیز افزایش کاربردهایش فراهم شده است. در آنالیز موجک مانند آنالیز فوریه با بسط توابع سروکار داریم. ولی این بسط برحسب موجک ها انجام می شود.

موجک تابع مشخص مفروضی با میانگین صفر است و بسط بر حسب انتقال ها و اتساع های این تابع انجام می گیرد . بر خلاف چند جمله ای های مثلثاتی، موجک ها در فضا بصورت موضعی بررسی می شوند و به این ترتیب ارتباط نزدیک تری بین بعضی توابع و ضرایب آن ها امکان پذیر می کنند.

در این رساله سعی کرده ایم، ابتدا به توصیف آنالیز موجکی کوشی جدید از عملگرهای خود الحاقی در فضاهای هیلبرت پرداخته و سپس از عملگر انتگرال سنتز موجکی برای معرفی

الف) یک محاسبات موجکی جدید برای توابع توانی و نمایی

ب) یک رده ی جدید از توابع زتا و اتای فراکتالی تعمیم یافته

استفاده کرده[۵] , [۱۶] در مبحث کاربردها نیز نشان داده می شود که چگونه آنالیز موجکی کوشی در نظریه عملگرهای دیفرا نسیلی بیضوی روی منیفلد ها و مسائل مرزی خوش طرح مرتبه ی اول بکار می رود [۱۷].

۲.۱ اهداف و انگیزه های پایان نامه

در فصل اول این پایان نامه انگیزه ها و اهداف آن ، سیر تاریخی موجک و برخی از پیش نیازها مربوط به فصول آتی را بیان کرده ایم.

در فصل دوم ابتدا آنالیز موجکی نسبت داده شده به گروه های فشرده موضعی را بیان کرده و سپس محاسبات موجکی جدید برای عملگرهای خود القا در یک فضای هیلبرت تعریف شده بر اساس تبدیل موجکی پیوسته و معکوس آن نسبت به موجک های کوشی ترکیب شده با محاسبات سیلی گراب آورده ایم.

در فصل سوم سعی بر تعریف خانواده موجکی جدید از توابع زتا و اتای فراکتالی، به عنوان تعمیمی از توابع ریمان و ایراشتراس[1] داشته و تعمیمی از توابع زتا و اتای عملگر های بیضوی روی مینفلد ها مورد بررسی قرار گرفت. ضمناً به توضیحاتی پیرامون پایاهای اثر موجی دیسترمات - گیلمین- وینشتاین که به عنوان پایاهای تابع زتای موجکی می باشند نیز پرداختیم.

فصل چهارم به توصیف ساختار های تکین از توابع زتا و اتای فراکتالی و انبساط های اثر حرارتی کامل برای مسائل مرزی شبه دیفرانسیلی سیستم های بیضوی عمومی (P,S_P) روی منیفلد های فشرده اختصاص یافته و در مبحث کاربردها آنها را برای مسائل مرزی خوش طرح مرتبه اول به کار بردیم [۱] ، [۲] ، [۳] ، [۵] ، [۶] ، [۷] ، [۱۱] ، [۱۴] ، [۱۵] ، [۱۶] ، [۱۷] ، [۱۹] ، [۲۰] ، [۲۳] ، [۲۵] ، [۲۸] و [۲۹].

در اینجا وظیفه خود می دانم تا مراتب سپاس و تشکر خود را از زحمات و راهنمایی های ارزنده استاد بزرگوار جناب آقای دکتر علی جلیلیان که مرا در طول تهیه و تدوین این پایان نامه یاری نموده اند، ابراز نمایم. همچنین از زحمات سرکار خانم دکتر طالبی و جناب آقای دکتر میر مصطفایی کمال تشکر و سپاس را دارم.

در انتها از تمام کسانی که در دوران تحصیلات تکمیلی ام و همچنین در هنگام تدوین این پایان نامه مرا یاری کرده اند تشکر و سپاسگزاری می نمایم.

[1]. Riemann- Weierstrass

۱.۳ سیر تاریخی

آنالیز موجک حاصل ۵۰ سال کار ریاضی (نظریه ی لیتلوود - پالی و کالدرون[2]- زیگموند[3]) است که طی آن، با توجه به مشکلاتی که در پاسخ دادن به ساده ترین پرسش های مربوط به تبدیل فوریه وجود داشت، جانشین های ا نعطا ف پذیر ساده تری از طریق آنالیز همساز ارا ئه شد. در سال ۱۹۸۰، ایومیر[4] ریاضیدان فرانسوی، نخستین پایه های موجکی متعامد را کشف کرد. در همین سال مورله مفهوم موجک و تبدیل موجک را به عنوان یک ا بزار برای آنالیز سیگنال زمین لرزه وارد کرد و گراسمان فیزیکدان نظری فرانسه نیز فرمول وارونی را برای تبدیل موجک بدست آورد.

در سال ۱۹۷۶ میرو و مالت از پایه های موجک متعامد آنالیز چند تفکیکی را بسازند و مالت تجزیه موجک ها و الگوریتم های بازسازی را با بکار بردن آنالیز چند تفکیکی بوجود آورد. در سال ۱۹۹۰ مورنزی همراه با آنتوان موجک ها را به دو بعد و سپس به فضاهایی با ابعاد دیگر تعمیم دادند و بدین ترتیب بود که آنالیز موجکی پایه گذاری گردید.

جدا از این نظریه که درمتن ریاضیات محض جای دارد، صورت های مختلفی از این رهیا فت چند مقیاسی[5] را در طی دهه ی گذشته در پردازش تصویر، آکوستیک، کدگذاری (به شکل فیلترهای آیینه ای متعامد و الگوریتم های هرمی) و استخراج نفت دیده ایم.

آنالیز موجک همراه با تبدیل سریع فوریه، در تحلیل سیگنال های گذرایی که سریعاً تغییر می کنند، صدا و سیگنال های صوتی، جریان های الکتریکی در مغز، صدا های زیر آبی ضربه ای و داده های طیف نمایی *NMR* و نیز در کنترل نیروگاه های برق از طریق صفحه ی نمایش کامپیوتر بکار رفته است. این آنالیز به عنوان یک ا بزارعددی می تواند ما نند تبدیل سریع فوریه تا حد زیادی از پیچیدگی محاسبات بزرگ مقیاس بکاهد، بدین ترتیب که با تغییر هموار ضرایب، ماتریس های متراکم را به شکل تنکی[6] که به سرعت قا بل محاسبه باشد در می آورد. راحتی و سادگی این آنالیز باعث ساختن تراشه هایی شده است که قادر به کد گذاری به نحوی بسیار کارا و فشرده سازی سیگنال ها و تصاویرند.

از کاربردهای دیگر آنالیز موجک، می توان به استفاده در تصویر برداری پزشکی، سی تی ا سکن جداسازی بافت های مغزی از تصاویر تشدید مغناطیس، تشخیص خودکار خوشه های میکروکلسیفیکاسیون، تحلیل تصاویر طیفی تشدید مغناطیسی و عملکردهای تشدید مغناطیسی اشاره نمود.

---

2 .Calderon
3. Zygmund
4.Yves Meyer
5. multi Scale
6. sparseness

همچنین موجک ها می توا نند در آنالیز تا بعی بویژه $L_2(R)$ (فضای همه توابع مختلط که مربع قدر مطلق آن انتگرال پذیر لبگ باشد) استفاده شوند.

۴.۱ پیش نیازها

در این بخش به معرفی اجمالی برخی از پیش نیازها که در اثبات بعضی از قضایای فصول آینده همچنین در مثال ها استفاده خواهد شد،می پردازیم.

۱. منیفلد دیفرانسیل پذیر

موجک یک تابع $\psi(t) \in L_2(R)$ (به ویژه دو تایی متعامدی) است به طوری که خانواده ای ازتوابع

$$\psi_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \qquad j,k \in Z$$

پایه های متعامدیکه در فضای هیلبرت $L_2(R)$ می باشد.

مبنای عامل $2^{\frac{j}{2}}$ ، $\|\psi_{jk}\| = \|\psi\| = 1$ را نتیجه می دهد. عوامل مبنا،در این نوع از موجک ها مانند موجک های دوتایی که به طور معمول شناخته شده ا ند توانی از ۲ است. اینکه آیا موجک های یکنواخت وجود دارد یا نه از تعریف مشخص نمی شود. یک تکنیک به منظور ساختن موجک ها آنالیز چند تفکیکی یا مجموعه های موجکی است.

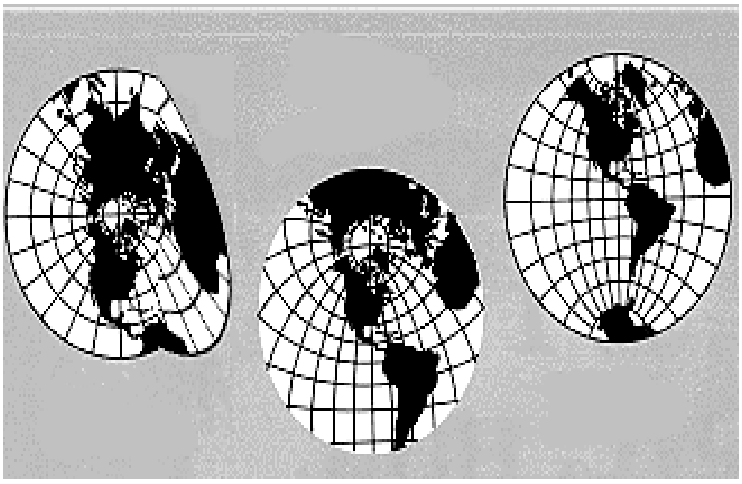
به طور غیر دقیق، یک منیفلد دیفرانسیل پذیر، منیفلدی است که تبدیلی از یک نوع فضای توپولوژیکی بوده و به قدر کا فی مشا به فضای اقلیدسی به منظور ا نجام دادن محاسبات باشد.

توجه به این نکته مهم است که معنی دیفرا نسیل پذیری می توا ند تا حدودی در متون متفاوت باشد به عنوان مثال دیفرانسیل پذیری به طور پیوسته، Kبار دیفرانسیل پذیری، بی نهایت بار مشتق پذیری (هموار) یا دیفرا نسیل پذیری مختلط (هولومرف)[7] از آن جمله اند.

هر منیفلد می تواند بوسیله یک مجموعه یا ا طلس از نمودارها بیان شود. هر نمودار یک دستگاه مختصات روی یک قطعه از منیفلد تعیین کننده ی تا بعی از یک قطعه منیفلد به داخل فضای اقلیدسی است. البته ممکن است در آن هنگام ایده هایی از محاسبات، درون نمودارهای منحصربه فرد به کار رود .

[7] .Holomorph

در شکل ۱-۴، یک ا طلس دیفرا نسیل نا پذیر برای کره ی گوشه ی تیز در اولین نمودار سمت چپ نشان داده شده است دو منحنی دیگر منحنی های هموارند.



شکل۱-۴ ا طلس دیفرا نسیل نا پذیر

به طور شهودی یک منیفلد دیفر ا نسیل پذیر یک منیفلد توپولوژیکی با تعریف کلی ساختار دیفرانسیل پذیری است.

هر منیفلد دیفرانسیل پذیر می تواند با یک ساختارموضعی دیفرانسیل پذیر و با استفاده از همیومورفیسم تعیین شده باشدکه در آن اطلس ها با ساختار دیفر ا نسیل پذیری استا ندارد روی فضای اقلیدسی ترکیب شده ا ند.

یک منیفلد توپولوژیک یک فضای ها سدورف شمارای نوع دوم است که موضعاً هما نسا ن با فضای اقلیدسی می باشد.

۲. منیفلد هرمیتی

در ریاضیات، منیفلد هرمیتی، یک مجتمع قیاسی از منیفلد ریما نی است. منیفلد ریمانی خمینه ای مشتق پذیر است که در آن بردارهای مماس حول هر نقطه حاصلضربی داخلی دارند و چنان تعریف می شوند که بررسی تعمیم یافته ای از فاصله وتعامد را امکانپذیر می سازند. .همچنین مجتمع، فضایی است که بصورت اجتماعی از سادکها[8] نمایش داده شده و با اضافه کردن حاصلضرب داخلی هرمیتی روی فضای مماس، یکدیگر را در وجوه شان قطع می کنند. سادک n بعدی در یک

[8] .simplex

فضای اقلیدسی مرکب از $n+1$ نقطه مستقل خطی $p_{\circ}$ ، p_1 ، ... ، p_n ، همراه با همه نقطه های مشخص شده به وسیله عبارت $a_{\circ} p_{\circ} + a_1 p_1 + ... + a_n p_n$ که در آن $a_i \geq \circ$ و $a_{\circ} + a_1 + ... + a_n = 1$ است.

E و B و F منیفلدهای c^r، $r \geq \circ$ و $P : E \to B$ یک نگاشت c^r هستند چهارتایی (E,P,B,F) یک کلاف تاری c^r خوانده می شوداگر برای هر $b \in B$، زیر مجموعه ی باز U از B حول b و دیفئومورفیسم c^r، $\phi : P^{-1}(U) \to U \times F$ وجود داشته باشد بطوریکه نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} P^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "P"'] & & U \times F \arrow[dl, "P_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

E فضای کل ، B را فضای پایه ، F را تار کلاف می نامیم. برای $b \in B$ $F^{-1}(b)$ تار روی b می گویند.همچنین P_1 تصویر روی مولفه اول است.

۳. گراسمان لاگرانژ-گروه یکانی

گراسمان لاگرانژ ، یک منیفلد هموار از زیر فضای لاگرانژ از یک فضای برداری همتافته حقیقی با بعد 2n است که با یک فضای همگن $u(n)/o(n)$ همسان شده که در آن $U(n)$ گروه یکانی و $O(n)$ گروه متعامد است. یک گروه اساسی u/o دوره ای نامتناهی با یک مولد اصلی است که به کمک مربع یک دترمینان ماتریس یکانی داده شده، بعنوان نگاشتی به دایره واحد است و ضمناً اولین گروه هومولوژی بوده و لذا دوره ای نامتناهی است، همچنین اولین گروه کوهومولوژی می باشد. گروه هومولوژی، هر گروه از دنباله گروههای $H_n(x)$ وابسته به یک فضای توپولوژیک X که نشان می دهند چگونه مجتمع های سادکی nبعدی را می توان برای پر کردن X به کار برد.

نظریه ی کوهومولوژی نظریه ای است که گروههای جبری را برای بررسی ویژگی های هندسی فضاهای توپولوژیک به کار می برد و ارتباط نزدیکی نیز با نظریه هومولوژی دارد. از طرفی گروه متعامد، گروه ماتریس هایی که از تبدیلات متعامد یک فضای اقلیدسی پدید می آیند و گروه بنیادی برای یک فضای توپولوژیک ، گروه رده های هوموتوپی همه مسیرهای بسته حول نقطه ای در فضا است . این گروه اطلاعاتی درباره تعداد و نوع سوراخ های یک رویه می دهد. گروه یکانی، گروه تبدیلات یکانی

بر یک فضای برداری مختلط K بعدی است که با نماد $U(K)$ معمولاً نشان داده می شود. آرنولد[۹] نشان می دهد که این توصیف، بدست آوردن شاخص ماسلو[۱۰] است. یک شاخص ماسلو ، روش بازگشتی نگاشتی در $H'(M,z)$ از مولد $H'(\lambda(n),z)$ مشخص می کند و برای یک زیر منیفلد لاگرانژ M از V نگاشت $M \to \lambda(n)$ هست بطوریکه رده ی آن فضای مماس در هر نقطه را بیان می کند.

۴. انتگرالهای بیضوی

انتگرالهای بیضوی از نوع اول و دوم و سوم بطور متوالی به صورت زیر تعریف میشوند:

$$F(k,\phi)=\int_{\circ}^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\theta}},\qquad \circ<k<1$$

$$E(k,\phi)=\int_{\circ}^{\phi}\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\theta}\,d\theta,\qquad \circ<k<1$$

$$\Pi(k,\phi,a)=\int_{\circ}^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\theta)(1+a^{2}\sin^{2}\theta)}},\qquad a\neq k,\qquad \circ<k<1$$

حال با قرار دادن $\frac{\pi}{2}$ به جای ϕ در روابط فوق بطور متوالی انتگرا لهای بیضوی کامل از نوع اول، دوم و سوم به صورت زیر حاصل می شوند:

$$K(k)=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\theta}},$$

$$E(k)=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\theta}\,d\theta,$$

$$\Pi(k,a)=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^{2}\sin^{2}\theta)(1+a^{2}\sin^{2}\theta)}}$$

[9] .Arnold
[10] .MASLOV INDEX

۵. توابع بیضوی گویا و عملگر شبه دیفرانسیل

توا بع بیضوی گویا دنبا له ای از توا بع گویا با ضرایب حقیقی هستند که بطور گسترده کاربرد دارند این توا بع را گا هی توابع گویای چبیشف می نامند.
توا بع بیضوی گویا بوسیله رتبه ی عدد صحیح مثبت n تعیین شده و شامل پارامتری به نام فاکتور انتخاب هستند.

توابع بیضوی گویا برای x بین ۱- و ۱ برای مرتبه های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ با فاکتور تشخیص $\zeta = 1$ طرح ریزی شده اند و چون همه آنها میان ۱- و ۱ محصورند لذا همگی در x = ۱ مقدار ۱ دارا می باشند.
اگر V یک فضای برداری توپولوژیک حقیقی یا مختلط و X زیر مجموعه ای از Vباشد، یک همسایگی مخروطی از X یک مخروط در Vاست .

۶. معادله شرودینگر و معادله غیر خطی شرودینگر

معادله شرودینگر ، اساسی‌ترین معادله غیر نسبیتی در مکانیک کوانتومی برای توصیف تحول حالت[11] یک ذره است . معادله شرودینگر در سال ۱۹۲۶ توسط اروین شرودینگر[12] به ثبت رسید و پس از او نیز هایزنبرگ[13] معادله برا بری را به صورت عملگرهای خطی و عملگرهای جابجایی به وجود آورد. معادله شرودینگر در حالت ساده به صورت زیر بیان میشود:

$$H(t)\left|\psi(t)\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle$$

که H یک عملگر خطی در فضای (اصولاً بی نهایت بعدی) هیلبرت است و عملگر همیلتونی[14] نام دارد. مقدارهای ویژه این نگاشت اصولاً مقادیر کوا نتومی انرژی هستند. $|\psi\rangle$، یک بردار در فضایِ هیلبرت است، که حالت ذره را توصیف می‌کند.(در اینجا $|X\rangle$، ماتریس سطری و ماتریس ستونی را با نماد $\langle X|$ ، نشان می دهیم).

اگر این بردار را به صورت یک تابع زمان و مکان بنویسیم، معادله شرودینگر به صورت زیر در می آید :

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)$$

11 .state
12 .Schrodinger
13 Heisenbrg
14 .Hamilton operator

البته اگر $|\psi_n\rangle$ را به عنوان بردار ویژه H انتخاب کنیم، آن وقت معادله متغیر زما نی ندارد و

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n(x)\rangle$$

با در نظر گرفتن نظریه نسبیت خاص، معادله شرودینگر دیگر صادق نیست و در این حالت از معادله دیراک که کلی‌تر است استفاده می‌شود.
نوع غیر خطی معادله شرودینگر در فیزیک نظری، کاربرد دارد این معادلـه غیـر خطـی یـک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر است:

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\partial_x^2\psi + \kappa|\psi|^2\psi$$

که در آن ψ میدان مختلط است.

۷. معادله دیراک

معادله‌ای در مکانیک کوانتومی و تعمیم یافته معادله شرودینگر است که توسط فیزیکدان بریتانیایی، پل دیراک پدید آمد و برای محاسبه تابع موجی ذرّات، به کارمی رود. بـا ایـن تفـاوت کـه ایـن معادلـه نظریه نسبیت خاص را نیز در بر می‌گیرد.

این معادله ، تابع موجی ذرّات با اسـپین نیمـه یعنـی فرمیـون‌هـا را (ماننـد الکتـرون‌هـا) توجیـه می‌کند، همچنین دیراک توانست با معادله‌اش ، موجودیت ضد ماده به خصوص پوزیترون را سـه سـال قبل از کشف آنها توسط آزمایش نشان دهد. در صورتی که هیچ نیـروی خـارجی وجـود نداشـته باشـد معادله ی دیراک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = \left(i\partial\!\!\!/ - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$

که $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu\partial_\mu$ و γ^μ ماتریس‌های ۴×۴ هستند که به ماتریس‌های دیراک مشهورند.

ضمناً

$$\gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ \gamma_k = \beta\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ -\sigma_n & 0 \end{pmatrix}$$

که σ_n ماتریس‌های پائولی نامیده می شـود کـه عبارتنـد از $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ و

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

۸. تابع زتای ریمان

در ریاضیات، **تابع زتای ریمان** تابعی بسیار مهم و پرکاربرد در نظریه اعداد است . زیـرا بـا توزیـع اعداد اول رابطه دارد. همچنین کاربردهای دیگری در علومی چون فیزیک، نظریه احتمـال و اسـتاتیک دارد.

تعریف : تابع زتا ی ریمان $\zeta(s)$ با سری نامتناهی زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

تابع $f(x) = x^{-s}$ را در نظر گرفته، داریم:

$$\int_1^{\infty} x^{-s}\, dx = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big)_1^{+\infty} \qquad p \neq 1$$

$$= Ln(x)\Big)_1^{+\infty} \qquad p = 1$$

لذا انتگرال ودر نتیجه سری به ازای $s \leq 1$ واگرا و به ازای $s > 1$ همگرا است.

ارتباط این تابع با اعداد اول نخستین بار توسط لئونارد اویلر به صورت زیر بیان شد:

$$\varsigma(s)(1-2^{-s}) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots - (\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \ldots)$$

$$\varsigma(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s}) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots - (\frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \ldots)$$

بهمین ترتیب پس از اختصار و به ازای $p \to \infty$ داریم:

$$\varsigma(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s})\ldots(1-p^{-s})=1$$

بنابراین:

$$\varsigma(s)=\prod_{p\in P}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

در زیر مقادیر تابع زتاریمان که عمومیت بیشتری دارند، نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}
\zeta(1) &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty\\
\zeta(2) &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.645\\
\zeta(3) &= 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\approx 1.202\\
\zeta(4) &= 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}\approx 1.0823
\end{aligned}$$

همچنین معادله تابع زتا به صورت زیر بیان می شود و برای تمام S های در $C\setminus\{0,1\}$ معتبر است

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

معکوس تابع زتا نیز از سری دریکله روی معادله ی موبیدس برای هـر عـدد مخـتلط S بـا $\Re(s)>1$ به صورت زیر نتیجه می شود[۱۵]:

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$$

[15] . به کتاب special function Z.X.Wang.صفحه ی 134 مراجعه شود.

۹. تابع زتای ریمان از تبدیل ملین

در فیزیک ریاضی به زوجهایی از توابع بر می خوریم که بصورت زیر به هم مربوط شده اند.

$$g(s)=\int_a^b f(x)k(s,x)dx$$

تابع gرا تبدیل (انتگرا لی) تابع f توسط هسته k می نامند این عمل را می توان به عنوان نگاشت تابع f در فضای xرا به تابع gدر فضای s نیز توصیف کرد. دو هسته مهم عبارتند از e^{-sx} و x^{s-1}، این هسته ها به تبدیل های لاپلاس و ملین بصورت زیر منجر می شود[۱۶].

$$g(s)=\int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

$$\{\mathcal{M}f\}(s)=\int_0^\infty f(x)x^s\frac{dx}{x}$$

در ناحیه ای که انتگرال تعریف می شود، تعبیرهای متفاوتی برای تابع زتا در تبدیل ملـین وجـود دارد. اگر قسمت حقیقی S بزرگ‌تر از ۱ باشد داریم[۱۷]:

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\left\{\mathcal{M}\left(\frac{1}{\exp(x)-1}\right)\right\}(s)$$

که با حذف جمله اول بسط سری توانی فـوق حـول صـفر، مـی تـوانیم در دیگـر نـواحی ، تـابع زتـا را به دست آوریم . یعنی

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\left\{\mathcal{M}\left(\frac{1}{\exp(x)-1}-\frac{1}{x}\right)\right\}(s)$$

و وقتی قسمت حقیقی بین ۱- و ۰ باشد داریم:

---

16. رجوع شود به کتاب روشهای ریاضی در فیزیک جورج آفکن. ترجمه اعظم پورقاضی .جلد دوم صفحه ی ۴۵۵ .

17. Edwards H M , Riemann's Zeta Function , New York : Academic Press (1994).