بسم الله الرحمن الرحیم

خداست مالک ملک آسمان و زمین و خدا بر هر چیز تواناست * محققاً در خلقت آسمان و زمین و رفت و آمد شب و روز روشن، دلائلی است برای خردمندان * آنهائیکه در هر حالت ایستاده و نشسته و خفتن، خدا را یاد کنند و دائم فکر در خلقت آسمان و زمین کرده و گویند پروردگارا این دستگاه با عظمت را بیهوده نیافریده ای، پاک و منزهی، ما را به لطف خود از عذاب دوزخ نگاهدار *

قرآن کریم

دانشگاه مازندران

دانشکده فیزیک

عنوان :

گرانش کوانتومی در حضور کمینه طول و بیشینه تکانه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته فیزیک

گرایش گرانش و کیهان شناسی

استاد راهنما :

دکتر کوروش نوذری

استاد مشاور :

دکتر محمد مهدوی

نگارنده :

امیراعتمادی

بـهـمـن ۱۳۹۰

به نام خداوند جان آفرین

حکیم سخن بر زبان آفرین

خداوند بخشنده دستگیر

کریم خطابخش پوزش پذیر

عزیزی که هرگز درش سر بتافت

به هر در که شد هیچ عزت نیافت

پرستار امرش همه چیز و کس

بنی آدم و مرغ و مور و مگس

ز مشرق به مغرب مه و آفتاب

روان کرد و گسترد گیتی بر آب

زمین کز تب لرزه آمد ستوه

فرو کوفت بر دامنش میخ کوه

بر او علم یک ذره پوشیده نیست

که پیدا و پنهان به نزدش یکیست

ما پدیده های جهان خود و دریا را با کمک نیروی جاذبه توضیح دادیم اما دلیل این نیرو را هنوز بیان نکرده ایم. من قادر نبوده ام دلیل این خواص نیروی جاذبه را از پدیده ها کشف کنم و فرضیه ای در این رابطه ندارم.

اسحاق نیوتن

نیروی جاذبه باید کیفیت اسرار آمیز و استادانه ای داشته باشد و یا اثر یک معجزه باشد.

گودفرید ویلهلم لایبنیتز

هو المحبوب

ابتدای سخن، لب میگشایم به حمد و ثنای خداوند بلند مرتبه و اقرار می ورزم بر حقارت و جهل خویش در پیشگاه آستان بی کرانش.
مفاد این رساله کلماتیست چند در رابطه با یکی از داغ ترین و با ارزش ترین دغدغه های علم روز دنیا یعنی گرانش کوانتمی که این حقیر با استناد بر تجارب و تحقیقات اساتید بزرگ منصب و صاحب سبک حال حاضر جهان من جمله استاد بسیار گرانقدر و ارزشمند خود، به محضر شما بزرگواران مشتاق عرضه می دارم.
گرانش به تنهایی آنقدر تفکر را مجذوب و مغروق خود می دارد که فارغ آمدن از آن شاید ممکن نباشد (همان گونه که نیوتن اقرار ورزید) و حال که با مبحث عمیق و ژرف فیزیک کوانتمی تلفیق شده، که نتیجهٔ آن تولد گرانش کوانتمی می باشد، بیش از پیش اندیشمندان و متفکران را مغلوب و مبهوت خویش گردانیده. براستی که شاید گرانش کوانتمی از آخرین مرزهای فکری بشر در محدوده این عالم باشد!
با سختی تمام و مشقت فراوان خود را به گوشه ای از دنیای بی کران این نظم بزرگ می رسانیم و تکه ای کوچک از معمای این پیکره ی زیبا و عظیم را (به گمان خویش) در سر جایش قرار می دهیم، بلکه روزی این پیکره تکمیل شده و حقیقت از میان انبوه ابهامات تار، خویش را نمایان سازد و گوشه ای از جمالش را بر ما آشکار کند تا که ایمان (مردمان!) به زیبایی مطلق را به یقین بدل نماید.
امید دارم که موجبات تحیر و شگفتی شما عزیزان مشتاق، نسبت به شکوه و عظمت این عرصهٔ زیبا از دانش و تفکر ناب را فراهم کرده باشم، همچنانکه خویش غرقه و مبهوت (و البته به سختی شیفته و دلبستهٔ) آنم؛ و هم توانسته باشم تا با ماحصل این تلاش خود قطره ای بر وسعت بینش و نگرشتان در این راستا مؤثر واقع شده باشم که این نهایت افتخار و مایهٔ مباهات برای بنده می باشد.
در پایان بر خود واجب می دانم تا مراتب ادب، احترام، سپاس و قدردانی خویش را خدمت پدر و مادرم، همسرم، استاد مشاورم جناب آقای دکتر مهدوی و نیز استاد عزیز، فاضل و بسیار بزرگوارم جناب آقای پروفسور کوروش نوذری که درس های علمی و معنوی گرانسنگی را از شخصیت والای ایشان کسب کرده ام، ابراز دارم و برای تمام این عزیزانم، که به واقع سوختند تا من ساخته شوم، سلامتی و سعادت را از خداوند بخشایشگر مهربان مسئلت دارم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده.....

فصل اول مقیاس پلانک مرزی برای جستار های فیزیک

۱.۱ مقدمه ۲

۱.۲ پیش درآمد و مروری بر برخی مفاهیم گرانشی و کوانتمی..... ٦

۱.۲.۱ جرم مؤثر فوتون..... ۷

۱.۲.۲ میکروسکوپ هایزنبرگ ۷

۱.۲.۳ متریک..... ۹

۱.۲.٤ شعاع شوارتزشیلد ۱۰

۱.۲.٥ واپیچش نسبی فضا زمان..... ۱۱

۱.۳ از مفاهیم کلاسیک و مدرن تا مقیاس پلانک ۱۲

۱.۳.۱ میکروسکوپ هایزنبرگ و اصل عدم قطعیت تعمیم یافته..... ۱۲

۱.۳.۲ مسافت یابی نوری..... ۱٤

۱.۳.۳ انقباض حجم ۱٦

۱.۳.٤ اندازه گیری خصوصیات یک حجم کوچک ۱۸

۱.۳.٥ چگالی انرژی میدان گرانشی..... ۲۰

۱.۳.٦ برابری گرانش و نیروهای الکتریکی ۲۳

۱.۳.۷ خلاصه و جمع بندی ۲٤

فصل دوم آنالیز ریاضی تکنیک های جبر هایزنبرگی در حضور کمینه طول

۲.۱ مقدمه ۲۷

۲.۲ مکانیک کوانتمی در پایه برگمن فوک با عدم قطعیت کمینه غیر صفر ۳۰

۲.۲.۱ فضای برگمن فوک ۳۰

۲.۲.۲ کرنل های انتگرال ۳٤

۲.۲.۳ مکان و تکانه، بررسی ویژه حالت ها و ویژه توابع ۳٤

۲.۲.٤ ضرب نقطه ای ۳۸

۲.۳ مکانیک کوانتمی تعمیم یافته در پایه برگمن فوک ٤۰

۲.۳.۱ فضاهای برگمن فوک ناجابجایی پذیر ٤۰

۲.۳.۲ مکان و تکانه در چارچوب برگمن فوک تعمیم یافته ٤٥

۲.۳.۳ بحث، نتیجه گیری و چاره اندیشی پیرامون عدم قطعیت های کمینه غیر صفر ٤۸

۲.٤ فضای هیلبرت و تعمیم مکانیک کوانتمی در حضور کمینه طول ٥۲

۲.٤.۱ روابط عدم قطعیت کمینه طول ٥۲

۲.٤.۲ بحث بر روی نمایش فضای هیلبرت ٥٥

۲.٤.۳ آنالیز مقدماتی نمایش فضای تکانه ٥٦

۲.٤.٤ خلاصه ٥۹

فصل سوم **نسبیت خاص دوگان، بیشینه تکانه و تأثیر آن در گرانش کوانتمی**

٣.١ مقدمه ٦١

٣.٢ نسبیت خاص دوگان و بیشینه تکانه ٦٤

٣.٢.١ جابجاگرهای مکانیک کوانتمی اصلاح یافته ٦٤

٣.٢.٢ مثالی با یک برش انرژی، DSR2 ..... ٦٦

٣.٢.٣ مثالی با یک برش تکانه، DSR1 ..... ٦٨

٣.٢.٤ بررسی حالت بدون جرم ٧٠

٣.٢.٥ نتیجه گیری ٧٠

٣.٣ اصل عدم قطعیت تعمیم یافته در حضور کمینه طول و بیشینه تکانه ٧١

٣.٣.١ رابطه جابجایی تعمیم یافته مکان و تکانه در حضور کمینه طول و بیشینه تکانه ٧١

٣.٣.٢ عملگر تکانه تعمیم یافته در حضور کمینه طول و بیشینه تکانه ٧٤

٣.٣.٣ رویکردی غیر بدیهی بر رابطه جابجایی تعمیم یافته تکانه و مکان ٧٦

فصل چهارم **بررسی بنیاد مکانیک کوانتمی در حضور کمینه طول و بیشینه تکانه**

٤.١ مقدمه ٧٩

٤.٢ مروری کوتاه بر اصل عدم قطعیت ٨٠

٤.٣ نمایش فضای هیلبرت ٨٣

٤.٣.١ بررسی برخی نتایج در فضای تکانه ٨٣

٤.٣.٢ ویژه حالت های فضای اندازه حرکت ٨٥

٤.٤ مفهوم بیشینه جایگزیدگی و نتایج حاصل از آن ٨٩

٤.٤.١ آنالیز حالت های با بیشینه جایگزیدگی ٩٠

۴.۴.۲ نمایش شبه مکان ۹۵

۴.۴.۳ بررسی نتایج نمایش شبه مکان ۹۷

۴.۵ تعمیم به n بعد ۹۸

۴.۵.۱ تعمیم جبر هایزنبرگی به n بعد ۹۸

۴.۵.۲ وضعیت گروه دوران در n بعد ۱۰۰

۴.۶ بحثی پیرامون تقارن و خود الحاقیت ۱۰۱

۴.۷ خلاصه و نتیجه گیری ۱۰۳

مروری بر آنچه گذشت و نیز چشم اندازی به مبحث پدیده شناختی گرانش کوانتمی

خلاصه ۱۰۶

نگاهی کوتاه به مبحث پدیده شناختی گرانش کوانتمی ۱۰۸

ضمیمه ۱۱۲

منابع ۱۲۰

چکیده

عرصه گرانش کوانتمی در حدود هفتاد سال پیش از این با کارهای پیشگامانهٔ فیزیکدان برجسته هندی–امریکایی چاندراسخار (Subrahmanyan Chandrasekhar) آغاز شده است؛ یعنی زمانیکه متوجه شدند که مکانیک کوانتمی و گرانش به شیوه ای بنیادی برای شکل دادن کوتوله های سفید (white dwarfs) با هم ترکیب خواهند شد. نظریه گرانش کوانتمی تلاش می کند تا مکانیک کوانتمی، که به خوبی در مقیاس اتمی حکمفرماست، و نظریه کلاسیک نسبیت عام، که حاکم بر سیارات و کهکشان هاست، را با یکدیگر تلفیق کند. فیزیکدانان نظری زیادی از طریق رویکردهای گوناگون در این راستا تلاش کرده اند. از مهمترین نتایجی که در تمامی این رهیافت ها بدست آمده، حضور یک کمینه طول از مرتبه طول پلانک می باشد. اینگونه به نظر میرسد که حضور یک مقیاس طول بنیادی، یک کران پایین برای هر خروجی از اندازه گیری های مکان، اثری مستقل از مدل در گرانش کوانتمی می باشد. در واقع تمامی رهیافت های گوناگون به گرانش کوانتمی به یک چنین نتیجه ای منجر می شوند. حضور این کمینه طول تغییرات اساسی ای را در فرمالیسم مکانیک کوانتمی به دنبال آورد که تلاش های زیادی نیز در جهت بررسی این تغییرات و تعمیم مکانیک کوانتمی صورت گرفته است. از جمله آنها فرمالیسمیست موسوم به فرمالیسم KMM که در دهه ۹۰ میلادی ارائه داده شده است، که در آن مکانیک کوانتمی در حضور کمینه طول اندازه پذیر تعمیم می یابد. همچنین طی بررسی هایی که در یک دهه اخیر در نسبیت خاص صورت گرفته، یک مقدار بیشینه برای اندازه حرکت ذرات به عنوان نتیجه ای از حضور کمینه طول بدست آمده است. یعنی اندازه حرکت یک ذره دیگر نمی تواند به هر اندازه دلخواهی افزایش یابد. در این رساله ما به بررسی تغییرات ناشی از حضور هر دوی کمینه طول و بیشینه تکانه در زمینه روابط و مفاهیم پایه ای مکانیک کوانتمی خواهیم پرداخت. در واقع کار ما تعمیم فرمالیسم KMM در حضور بیشینه تکانه می باشد که امید می رود گامی مؤثر در مسیر دست یافتن به نظریه نهایی گرانش کوانتمی بزرگ محسوب گردد.

فصل اول

مقیاس پلانک مرزی برای جستارهای فیزیک

۱.۱ مقدمه

گرانش یک نیروی بنیادی و عمومی است. یعنی هر آنچه که دارای انرژی باشد، ایجاد جاذبه یا گرانش خواهد کرد و متقابلاً از گرانش نیز تأثیر خواهد پذیرفت (همانطور که در ادامه خواهیم دید، یکی از راه های رسیدن به کمینه طول در نظر گرفتن تأثیر گرانشی فوتون بر ذرات است). هرچند که کوچک بودن ثابت نیوتن سبب این خواهد شد که در مقیاس های کلاسیکی اثرات گرانشی بسیار ضعیف به نظر آیند، اما در مقیاس های کوانتمی و ساختار ریز عالم، بخصوص در شرایط حاد کوانتمی همانند شرایطی که در لحظات اولیه خلقت حاکم بود، ونیز در مقیاس های بزرگ و بسیار بزرگ، گرانش نقش مهم و اساسی خویش را در ساختار عالم نشان میدهد. از قیاس بین گرانش و سایر نیروهای بنیادی در می یابیم که براستی تأثیر گرانش در حالات کلاسیکی بسیار ناچیز است (تقریباً 10^{32} بار کوچکتر از نیروی هسته ای ضعیف که از دیگر نیروها ضعیفتر میباشد)؛

نوع میدان	قدرت نسبی	برد میدان (متر)	ذرات حامل	جرم ذرات
هسته ای قوی			گلوئون	
الکترومغناطیسی		∞	فوتون	
هسته ای ضعیف				90 برابر جرم پروتون
گرانش		∞	گرویتون	

اما در انرژی های بالا، یعنی انرژی های نزدیک به مقیاس پلانک (Planck scale)، گرانش نقش بسیار مؤثر خویش را با ایجاد یک برش (cutoff) در ساختار فضایی، که همان کمینه طول اندازه پذیر (minimal measurable length) در حدود طول پلانک میباشد، نشان میدهد. زیرا هنگامیکه برای بررسی فاصله های

بسیار کوتاه از انرژی های سطح بالا استفاده میکنیم، این انرژی های قوی به علت اثرات گرانشی فوق العاده بالای خود به طرز قابل توجهی ساختار فضا زمانی را مختل میکنند.

امروزه با اینکه سالها از تلاش های فراوان در جهت بنیاد نهادن نظریه ای جامع و نهایی از تلفیق گرانش و مکانیک کوانتمی که از آن به عنوان " **گرانش کوانتمی**" (Quantum Gravity) یاد میکنیم میگذرد، ولی هنوزهم موفق به ایجاد چارچوبی منظم و یکنواخت از آن نشده ایم. از نخستین و مهمترین مشکلاتی که در گرانش کوانتمی با آن روبرو خواهیم شد این است که با وارد کردن گرانش در مبحث تئوری میدان کوانتمی، بازبهنجارش پذیری میدان را از دست خواهیم داد. در الکترودینامیک کوانتمی (QED)، دافعه الکتروستاتیک بین دو الکترون یا جاذبه بین یک الکترون و یک پروتون را به صورت گسیل و جذب فوتون ها توجیه میکنیم به این ترتیب که یک ذره، گسیل کننده فوتون و دیگری جاذب آن خواهد بود؛ این در حالیست که این فوتونها هیچگونه اندرکنشی با یکدیگر ندارند بلکه تنها با بارها و جریان های الکتریکی اندرکنش دارند.

حال اگر ذرات میدان گرانشی را گرویتون (graviton) در نظر بگیریم، همان نقشی را که در الکترودینامیک کوانتمی، فوتون ایفا کننده آن بود اکنون در گرانش کوانتمی، گرویتون بر عهده خواهد داشت؛ اما با این تفاوت اساسی که گرویتون ها برخلاف فوتون ها که هیچ اندرکنشی با هم نداشتند، بر روی یکدیگر تأثیرات گرانشی می گذارند و همین مسئله سبب بغرنج شدن قضیه گرانش کوانتمی خواهد شد. چون با وجود اندرکنش بین گرویتون ها می توان گفت که ذرات مادی با شبکه پیچیده ای از گرویتون ها احاطه شده اند که حلقه های بسته ای را تشکیل می دهند و همین حلقه های بسته سبب بوجود آمدن جواب هایی بی نهایت در برخی محاسبات تئوری میدان خواهند شد. در الکترودینامیک کوانتمی از طریق باز بهنجارش، این بی نهایت ها را برطرف می کنیم ولی در تئوری میدان هنگامی که گرانش حضور پیدا می کند دیگر قادر به بازبهنجارش برای رفع بی نهایت ها نخواهیم بود.

حال نکته اساسی این است که در این میان، حضور یک کمینه طول اندازه پذیر از مرتبه طول پلانک، که ناشی از تأثیرات یا اختلالات گرانشی بر روی فضا زمان در مقیاس پلانک می باشد، بسیاری از مشکلات را از سر راه بر می دارد و بازبهنجارش پذیری را به مسئله بر می گرداند و بدین ترتیب راه را برای رسیدن به یک چارچوب نهایی منظم در قالب گرانش کوانتمی هموارتر می سازد.

چشم اندازهای گوناگونی از دیدگاه گرانش کوانتمی در حال بررسی قوانین عالم هستی می باشد. خوشبختانه امروزه تمامی رهیافت هایی که خود را به عنوان کاندیدی برای گرانش کوانتمی مطرح می کنند، از قبیل نظریه ریسمان

(String Theory)، هندسه ناجابجایی (Non–commutative Geometry) و گرانش کوانتمی حلقوی (Loop Quantum Gravity) و نیز برخی آزمایشهای ذهنی در فیزیک سیاهچاله (Black Hole Physics)، علی رغم برخی تفاوت ها، همگی به یک نقطه مشترک تأکید دارند و آن حضور یک کمینه طول مشاهده پذیر از مرتبه طول پلانک می باشد. در محتوای نظریه ریسمان، کوچکترین فاصله ای که قابل اندازه گیری باشد طول ریسمان است و ما آنرا مرتبط با طول پلانک می دانیم. هنگامی که شعاع شوارتزشیلد در فیزیک سیاهچاله را با شعاع کامپتون از مکانیک کوانتمی تلفیق کنیم، در می یابیم که کمترین مقدار ممکن برای آن ها طولی از مرتبه طول پلانک می باشد. خواستگاه حضور چنین طول کمینه مشترکی در این رهیافت ها، افت و خیز های (fluctuations) کوانتمی متریک زمینه فضا زمان است؛ یعنی فضا زمان اطراف ما دارای حالتی کف گونه (foam–like) است که این حالت کف مانند، دائم در حال افت و خیز می باشد. به عنوان یک فرض غیر بدیهی کوانتمی، بصورت تئوری می توان وجود یک طول کمینه را به عنوان عدم دقت یا عدم قطعیتی در اندازه گیری های مکانی در نظر گرفت؛ البته هرچند که این یک فرض غیر بدیهی (nontrivial assumption) است (یعنی بصورت مسلم و بدیهی قابل شهود و آزمایش نیست)اما کاملاً طبیعی و عاقلانه به نظر می رسد؛ چرا که با وجود یک کمینه طول، دیگر دقت اندازه گیری های ما هر اندازه هم که بهینه باشد در نهایت خطایی حداقل به اندازه کوچک ترین واحد وسیله های اندازه گیری مان، که قبلاً صفر بود ولی اکنون یک واحد طول کمینه می باشد را خواهد داشت و این نهایت دقت ما در اندازه گیری های مکانی می باشد. چرا که دیگر با حضور یک کمینه طول، طول صفر معنایی ندارد که ما آن را به عنوان نهایت دقت یا حداقل خطا به حساب آوریم.

همانطور که در نسبیت به عنوان یک اصل موضوعه این نکته را می پذیریم که سرعت نور نه تنها یکی از ثابت های بنیادی طبیعت می باشد بلکه اندازه آن هم در تمام دستگاه های مرجع لخت و نا لخت ثابت است، به همین ترتیب در گرانش کوانتمی ما این اصل موضوعه را که در طبیعت هیچ طولی کوتاه تر از طول پلانک وجود ندارد خواهیم پذیرفت؛ یعنی جستجو و کاوش در فاصله های کوتاه تر از طول پلانک ممکن نمی باشد. اما در این میان یک نکته ای وجود دارد و آن اینکه قبل از بنا شدن اصل نسبیت، آزمایش هایی صورت پذیرفت که نتیجه آن ها استنباط این موضوع شد که سرعت نور یک ثابت بنیادی طبیعت می باشد در حالیکه با امکانات امروز، انجام آزمایش هایی که دال بر اثبات طبیعت پلانکی جهان ما باشد ممکن نیست چرا که کوچک بودن طول پلانک، کوتاه

بودن زمان آن و یا فوق العاده عظیم بودن انرژی آن بسیار بسیار و باز هم بسیار فراتر از پیشرفته ترین تکنولوژی ها و امکاناتیست که امروزه در آزمایشگاه ها در اختیار داریم.

برای مثال به این نکته اشاره میکنیم که بالاترین انرژی تولید شده در آزمایشات فیزیک ذرات از مرتبه $10^3\ Gev$ می باشد و حتی بزرگترین انرژی ای که تا به امروز از پرتوهای عظیم کیهانی ثبت کرده ایم در حدود $10^{12}\ Gev$ است؛ در حالیکه سطح انرژی پلانک از مرتبه $10^{19}\ Gev$ می باشد یعنی یک میلیون میلیارد بار! عظیمتر از پر انرژی ترین پرتوهای ساخته بدست بشر می باشد و حتی یک میلیون بار بزرگتر از قویترین پرتوهای کیهانی ثبت شده تا به امروز که از عظیمترین آزمایشگاه های جهان هستی، یعنی داخل ستاره های غول پیکر در حال انفجار یا کوتوله های سفید و یا ابرنواخترها می آیند. توجه داشته باشید که ابرنواخترها گاه به چنان نورانیتی دست می یابند که با مجموع نورانیت های **تمام ستارگان یک کهکشان** برابری می کند وگاه **چندین بار!** نورانیتر از کل کهکشان. اندازه طول پلانک 10^{21} بار! کوچکتر از قطر هسته اتم می باشد؛ یعنی تقریبا همان رابطه ای را با ابعاد هسته دارد که اندازه یک انسان با ابعاد یک کهکشان دارا می باشد. و این نکته را نیز در نظر داشته باشید که برای تولید انرژی ای از مرتبه مقیاس پلانک به یک شتابدهنده ای از مرتبه یک کهکشان نیازمندیم.

حال با توجه به این همه ناتوانی و اختلاف در برابر مقیاس پلانک، در حال حاضر تنها می توان از آزمایش های ذهنی ای (Gedanken experiments) بهره جست که از قوانین ناب طبیعت تخطی نکنند (یعنی فیزیک کلاسیک، فیزیک نسبیت، فیزیک کوانتم و مفاد و مفهوم اصول و نظریات آن هاست که بر مبنای مشاهدات و آزمایشات مستقیم درک و تعریف می کنیم).

در ادامه به بررسی چند رهیافت کلاسیک و مدرن می پردازیم که هر یک جداگانه و از مسیر مربوط به خود، ما را به سوی مقیاس پلانک رهنمون خواهند کرد. سرانجام از طریق استدلالاتی منطقی این نتیجه مهم برایمان آشکار خواهد شد که براستی مقیاس پلانک به عنوان یک مقیاس بنیادی، نهایی و نیز کمینه برای رویدادهای فیزیکی می باشد. به عبارت دیگر، مقیاس پلانک یک مرزی برای مفهوم کلاسیک فضا زمان است که در این مرز و ماورای مفهوم کلاسیک دیگر نمی توان از تأثیرات کوانتمی چشم پوشید و طبیعت بنیادی فضا زمان نیاز به یک بازنگری کلی خواهد داشت.

١.٢ پیش درآمد و مروری بر برخی مفاهیم گرانشی و کوانتمی

نخستین بار این ماکس پلانک (Max Planck) بود که در اواخر قرن نوزدهم بر وجود سیستمی از واحدها تأکید کرد که بر اساس سه ثابت بنیادین و بسیار مهم طبیعت

بنا می شدند، که G ثابت نیوتن، c سرعت نور و h ثابت پلانک می باشد. این ثابت ها به گونه ای ترکیب خواهند شد که گویا از حاصل ضرب و تقسیم آنها یک مقیاس طول، یک مقیاس زمان و یک مقیاس جرم نتیجه خواهد شد که ما آنها را مقیاس پلانک می نامیم. از آنجا که در مکانیک کوانتمی در اکثر موارد π در کنار h قرار می گیرد، آنرا به همان شکل مرسومش یعنی $\hbar = h/2\pi$ وارد می کنیم. بنابراین مقیاس پلانک را به این صورت بدست می آوریم

نکته جالبی که می توان آن را مد نظر قرار داد این است که حضور $\hbar$ در این واحد های سیستم پلانک حاکی از ارتباط این مقیاس با اثرات کوانتمی است؛ حضور c بیانگر ارتباط با فضا زمان و حضور G بیانگر ارتباط این مقیاس با گرانش می باشد. پس به عنوان یک نتیجه کلی، این مطلب استنباط خواهد شد که این مقیاس، یک ویژگی از **فضا زمان کوانتمی** یا **گرانش کوانتمی** است.

در ادامه قبل از آنکه رهیافت هایمان به مقیاس پلانک را بیان کنیم اندکی در مورد برخی مفاهیم کوانتمی و گرانشی که در بخش های بعد از آن ها استفاده می کنیم، در قالب یک مقدمه کوتاه صحبت خواهیم کرد.

۱.۲.۱ جرم مؤثر فوتون

تأثیر پذیری نور از میدان گرانشی و انحراف مسیرش در اثر نیروی گرانش که از طریق آزمایش اثبات شده است سندی بر این قضیه می باشد که نور یا فوتون نیز می تواند بر هم کنش گرانشی داشته باشد. مطابق با آنچه که پلانک و اینشتین نشان دادند یک پرتو نوری با فرکانسυ دارای انرژی

می باشد و این انرژی، همانطور که مشهود است کوانتیده می باشد به گونه ای که می توان نور را به صورت بارانی از فوتون ها در نظر گرفت که انرژی هر کدام از آن ها $h\upsilon = h\, c/\lambda$ است.

حال بر اساس رابطه جرم–انرژی اینشتین می توانیم یک معادل جرمی M_{ef} را برای فوتون به این صورت بدست آوریم

$$\begin{cases} E = Mc^2 \\ E = h\upsilon \end{cases}$$

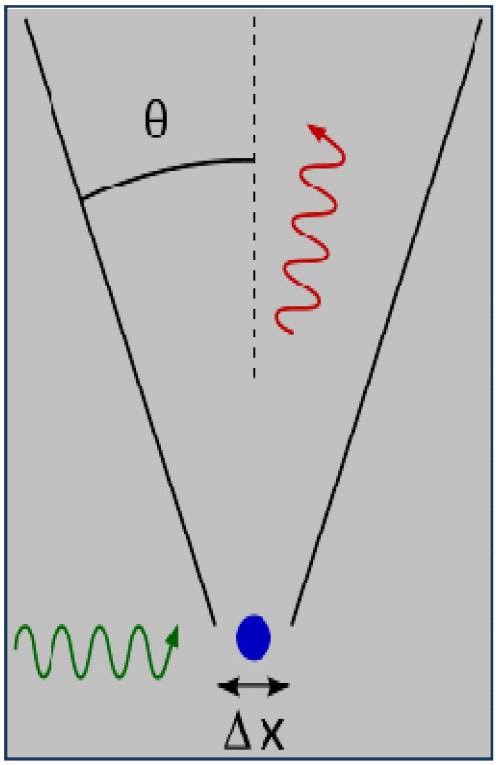
که به آن جرم مؤثر فوتون می گوییم و فوتون ها از طریق این جرم مؤثر قادر به برهم کنش با میدان های گرانشی می باشند.

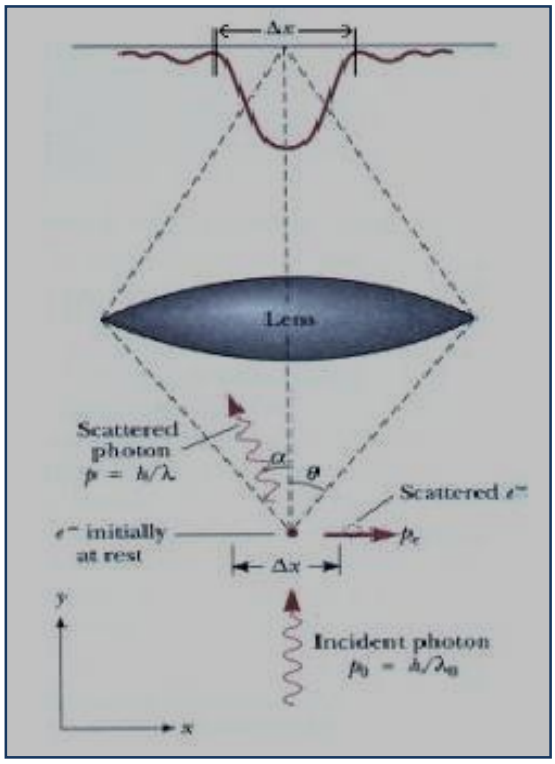
۱.۲.۲ میکروسکوپ هایزنبرگ

در اینجا قصد داریم بطور خلاصه در رابطه با آزمایش ذهنی معروف هایزنبرگ (Werner Heisenberg) و چگونگی رسیدن به اصل عدم قطعیت صحبت کنیم.

ذره ای را در زیر یک میکروسکوپ در نظر می گیریم که بسیار کوچک است و ما قصد داریم که آن را بررسی کنیم. بدین منظور یک پرتو نوری با فرکانس υ را به سوی ذره می تابانیم تا ذره آن را منعکس کرده و رؤیت شود. از فیزیک اپتیک می دانیم که موقعیت یک ذره، با دقتی در حدود طول موج پرتوی که برای رؤیت آن مورد استفاده قرار می گیرد اندازه گیری خواهد شد. پس برای ذره مورد نظر یک عدم قطیت در دقت در اندازه گیری، به این صورت داریم

که 2ϑ، ناحیه قابل دسترس برای فوتون هاییست که وارد عدسی می شوند.





از فیزیک کلاسیک اینگونه استنباط خواهد شد که در بهترین حالت برای دقت در اندازه گیری موقعیت مکانی یک ذره باید از امواجی با طول موج بسیار کوتاه استفاده کنیم. از طرف دیگر همانطورکه می دانیم، طبق رابطه طول موج و انرژی

هر اندازه که طول موج یک پرتو کوتاهتر باشد، انرژی آن بیشتر خواهد شد. پس هنگامی که برای مشاهده ذرات ریز و ارزیابی موقعیت مکانی آنها از امواجی با طول موج کوتاه استفاده میکنیم، بسته به ذره مورد نظر، یک حد و مرزی در انتخاب کوتاهی طول موج پرتو مورد استفاده وجود دارد. زیرا شدت و طول موج پرتو فرودی باید به گونه ای انتخاب شود که میدان الکتریکی این پرتو صدمه ای به ذره وارد نکند. برای کمترین شدت می توانیم از یک فوتون استفاده کنیم. از فیزیک اپتیک میدانیم که فوتون پراکنده شده توسط ذره مورد نظر که وارد میدان دید میکروسکوپ خواهد شد، اختلالی در اندازه حرکت ذره از مرتبه

ایجاد می کند. حال اگر این رابطه را در Δx ضرب کنیم بدست می آوریم

که به اصل عدم قطعیت هایزنبرگ (Heisenberg uncertainty principle or HUP) معروف است. بنابراین اصل عدم قطعیت به ما میگوید که مکان و اندازه حرکت ذرات را در حالی بررسی می کنیم که بصورت ذاتی و بنیادی دارای ابهام و عدم وضوح کامل می باشند به طوری که ذره مورد بررسی، حداقل منطقه ای به ابعاد $\hbar$ را در فضای فاز (x, p) اشغال می کند. پس ما نمی توانیم صحبت از مسیر یک ذره کوانتمی بکنیم، در عوض در توصیفاتمان می بایست که عدم وضوح (fuzziness) چنین ذره ای را از طریق تابع موج یا عدم قطعیت مد نظر قرار دهیم؛ یعنی یک ذره در مکانیک کوانتمی، از طریق تابع موج و اصل عدم قطعیت بررسی خواهد شد و دیگر بمانندمکانیک کلاسیکی دارای یک وضوح و موقعیت محض و کاملاً مشخص نمی باشد.

۱.۲.۳ متریک

همانطور که می دانیم در نسبیت برای بررسی فضا زمان بین نقاط مجاور از متریک استفاده می شود که معمولا در قالب مختصات لورنتس بدین صورت ارائه می شود

$$ds^2 = (c\,dt)^2$$

در نسبیت عام این گونه استنباط می شود که گرانش سبب خمیدگی فضا زمان خواهد شد. وظیفه مختصات در نسبیت عام صرفاً برچسب زدن به نقاط در فضا زمان است و دیگر مانند حالت کلاسیک بیانگر فاصله های فیزیکی نمی باشد. از اینرو ما به متریک نیاز داریم تا رابط میان فاصله های مختصاتی فضا زمانی و مسافت های

فیزیکی کلاسیک (physical distance intervals) باشد. در یک میدان گرانشی ضعیف و برای اجسامی با حرکت های آهسته، متریک را در اصطلاح به صورت حد نیوتنی ارائه می دهیم، به این شکل

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c}\right.$$

که ϕ پتانسیل نیوتنی است و فرض بر این داریم که کمیت $\frac{\phi}{c^2}$ کوچک می باشد و در فواصل دور از چشمه به سمت صفر کاهش می یابد. مثلا پتانسیل برای یک جرم نقطه ای به این شکل خواهد بود

حال با توجه به رابطه (۳) فاصلهٔ ویژه زمانی (proper time separation) را به این صورت تعریف می کنیم

$$ds = c\,dt\,\sqrt{1}$$

یعنی ویژه زمان بین دو رویداد که در یک مکان فضایی رخ داده اند ولی با فاصله مختصه زمانی $c\ dt$ متفاوت؛ و اختلاف فضایی (space separation) را به این شکل تعریف میکنیم

$$dx\sqrt{1 - \frac{2\phi}{c^2}}$$

یعنی اندازه مسافت فیزیکی بین دو رویدادی که توسط فاصله مختصه فضایی dx از هم جدا شده اند.

۱.۲.۴ شعاع شوارتزشیلد

حد نیوتنی در معادله (۳) در بسیاری از موارد، تقریبی خوب به حساب می آید؛ اما در نسبیت عام و بخصوص برای ورود به مبحث گرانش کوانتمی باید از متریک هایی دقیقتر و بهتر استفاده کنیم. از معروفترین این متریک ها متریک شوارتزشیلد می باشد که برای توصیف سیاهچاله ها و یا هر نوع جسم متقارن کروی کاربرد دارد. حالت دقیق این متریک به این صورت بیان می شود

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{}{2}\right.}{\left(1 + \frac{}{2}\right.}$$