دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

عنوان

استنباط بر اساس سانسور هیبرید واحد شده در توزیع نمایی، نمایی تعمیم یافته دو پارامتری و وایبل

استاد راهنما

دکتر آرزو حبیبی راد

استاد مشاور

دکتر جعفر احمدی

تهیه و تنظیم

معصومه ایزانلو

پاییز ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

فهرست علائم

احتمال پوشش	PC
تابع مولد گشتاور	MGF
انحراف معیار(خطای استاندارد)	SE
برآورد درستنمایی ماکسیمم	MLE
سانسور هیبرید واحد شده	UHC
سانسور هیبرید تعمیم یافته	GHC
میانگین توان دوم خطا	MSE
میانگین طول بازه اطمینان	Cw
میانگین طول بازه باور	Cw_B
نمونه‌های مستقل و هم‌توزیع	iid

چکیده

بالاکریشنان[۱] و همکاران (۲۰۰۸)، برای اولین بار سانسور هیبرید واحد شده[۲] را معرفی نموده و بر مبنای آن برآوردگر درستنمایی ماکسیمم پارامتر مجهول توزیع نمایی را بدست آورده و ویژگی‌های آن را بررسی کردند. در این پایان‌نامه، ابتدا بررسی‌های انجام گرفته در مورد توزیع نمایی تحت این سانسور را آورده‌ایم. سپس به تحلیل داده‌های سانسور هیبرید واحد شده در توزیع نمایی تعمیم یافته دو پارامتری و وایبل می‌پردازیم. مشاهده می‌شود در توزیع نمایی تعمیم یافته دو پارامتری برآوردگر درستنمایی ماکسیمم پارامترها صورت تابعی صریحی ندارند. برای حل این مشکل از الگوریتم EM استفاده می‌کنیم. اما در توزیع وایبل، برآوردهای درستنمایی ماکسیمم را می‌توان با حل یک معادله غیر خطی به دست آورد، بنابراین یک روش ساده تکرار را برای حل آن پیشنهاد می‌کنیم. همچنین با استفاده از الگوریتم EM نیز برآوردهای درستنمایی ماکسیمم را بدست می آوریم. در هر دو توزیع می‌توان با استفاده از ماتریس اطلاع فیشر مشاهدات، فاصله اطمینان مجانبی پارامترها را محاسبه کرد. همچنین برآوردگر بیز پارامترهای مجهول را در توزیع نمایی تعمیم یافته دو پارامتری که صورت تابعی مشخصی نداشته، با کمک نمونه‌گیری بر مبنای اهمیت محاسبه می‌کنیم و در توزیع وایبل، که تحت فرضیه‌های پیشین گاما به وضوح قابل محاسبه نمی‌باشند، با کمک نمونه‌گیری گیبس بدست آورده و فواصل باور آنها را محاسبه می‌کنیم. نتایج حاصل از برآوردهای معرفی شده را با کمک شبیه‌سازی، با یکدیگر مقایسه و برای درک بهتر مطالب، مثال‌های عددی متعددی را به همراه جداول و نمودار ارائه می‌دهیم. برای بدست آوردن نتایج عددی در این پایان‌نامه از نرم افزار R۲.۱۰.۱ استفاده شده که کلیه برنامه‌های مربوطه در ضمیمه پایان‌نامه آورده است.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم EM، برآورد درستنمایی ماکسیمم، برآورد بیز، توزیع مجانبی، سانسور هیبرید واحد شده، نمونه‌گیری بر مبنای اهمیت، نمونه‌گیری گیبس، ماتریس اطلاع فیشر.

---

[۱] Balakrishnan

[۲] Unified Hybrid Censored

پیشگفتار

در یک آزمایش خاص و تحت شرایط زیست محیطی یکسان، n واحد را در نظر بگیرید این واحدها می‌توانند برخی از سیستم‌ها، مؤلفه‌ها یا تراشه‌های رایانه‌ای در آزمایش مطالعه قابلیت اعتماد باشند، یا بیمارانی که تحت درمان با یک داروی خاص قرار گرفته‌اند، باشند.حال اگر بنا به دلایلی آزمایش را متوقف سازیم در این صورت زمان شکست کامل برای برخی از واحدها مشاهده نمی‌شود به عبارت دیگر، برای برخی از واحدها در طول آزمایش شکست اتفاق نمی‌افتد و از ادامه آزمایش باز نمی‌مانند در این صورت این واحدها سانسور می‌شوند.

حال یک آزمون طول عمر با n واحد را در نظر بگیرید، اگر k امین شکست قبل از زمان T_1 رخ دهد آزمایش در زمان $\min(\max(X_{r:n}, T_1), T_2)$، اگر بین T_1 و T_2 رخ دهد آزمایش در زمان $\min(X_{r:n}, T_2)$ و اگر بعد از زمان T_2 رخ دهد، آزمایش در زمان $X_{k:n}$ پایان پذیرد، گوئیم سانسور هیبرید واحد شده رخ داده است.قابل ذکر است که مقادیر $T_1, T_2 \in (0, \infty)$ و $r, k \in \{1, 2, ..., n\}$ بطوری که $T_1 < T_2$ و $k < r$ باشد، قبل از شروع آزمایش تعیین می‌شوند. این طرح سانسور اولین بار توسط بالاکریشنان و همکاران در سال ۲۰۰۸ معرفی گردید. بالا کریشنان و همکاران به بررسی این طرح سانسور جدید هنگامی که توزیع طول عمر واحدها متغیرهای مستقل و همتوزیع با تابع چگالی احتمال نمایی باشند، پرداختند و نشان دادند که برآوردهای درستنمایی ماکسیمم همواره موجود و صورت تابعی صریحی دارند همچنین تابع چگالی دقیق $\hat{\theta}$ را با کمک تابع مولد گشتاور $\hat{\theta}$ بدست آوردند.

این پایان‌نامه، مشتمل بر شش فصل است ابتدا در فصل اول مفاهیم و مقدماتی را که در فصل‌های آینده مورد نیاز هستند، آورده شده است. در فصل دوم، به تعریف سانسور و انواع سانسورها به همراه مثال‌هایی برای توضیح و تفهیم بیشتر موضوع، پرداخته شده است. در این فصل سانسور هیبرید واحد شده به طور مفصل تعریف و تابع درستنمایی تحت آن بدست آمده است. در فصل سوم، برآوردگر درستنمایی ماکسیمم پارامتر مجهول و فواصل اطمینان مختلف بر اساس این سانسور جدید در توزیع نمایی را محاسبه می‌کنیم. همچنین برآورد بیز پارامتر مجهول و فاصله باور آن را با این فرض که توزیع پیشین گاما باشد، بدست می‌آوریم. در فصل چهارم، به تحلیل داده‌های سانسور شده هیبرید واحد شده در توزیع نمایی تعمیم یافته دو پارامتری پرداخته و برآورد

درستنمایی ماکسیمم و بیز پارامترها و همچنین فاصله اطمینان و فاصله باور پارامتر را بدست می آوریم. در فصل پنجم این پایان‌نامه، به بررسی این طرح سانسور جدید هنگامی که طول عمر واحدها متغیرهای تصادفی مستقل و هموزیع با تابع چگالی احتمال وایبل باشند، می‌پردازیم، برآورد درستنمایی ماکسیمم و برآورد بیز پارامترهای مجهول را محاسبه می‌کنیم.در انتها در فصل شش، نتیجه‌گیری کلی و کارهایی که در آینده قصد داریم انجام دهیم، آورده شده است. درضمیمه پایان‌نامه، برنامه‌های رایانه‌ای مربوط به فصل‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم که به زبان نرم افزار R۲.۱۰.۱ نوشته شده را قرار داده‌ایم.

بسیار کوشش شده است تا این پایان‌نامه با حداقل کاستی ارائه شود. در این پایان‌نامه مطالبی که توسط اینجانب اثبات شده است با علامت $(*)$ و مطالبی که ایده جدید می‌باشد با $(**)$ مشخص شده است.

در پایان لازم می‌دانم تشکر و قدردانی خالصانه خود را نسبت به استاد عزیز و ارجمندم، سرکار خانم دکترآرزو حبیبی راد (استادیار گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد) که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و همچنین جناب آقای دکتر جعفر احمدی که سمت مشاوره این پایان‌نامه را عهده‌دار بودند، اعلام نمایم. از داوران محترم جناب آقایان دکتر مصطفی رزمخواه و دکتر مهدی دوست‌پرست تشکر می‌نمایم. از سرکار خانم دکتر فاطمه یوسف‌زاده که با صبر بنده را در نوشتن برنامه‌های مربوط به فصل پنجم یاری و راهنمایی رساندند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از همکاری‌های صمیمانه مسئولین کتابخانه که در تهیه مراجع و کتاب‌های مورد نیاز اینجانب را یاری رساندند، کمال تشکر و احترام را دارم. در نهایت، از کمک‌ها، صبر و شکیبایی بی دریغ مادر و پدر عزیزم و همسر مهربانم، سپاسگزارم.

معصومه ایزانلو

پاییز ۸۹

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات

۱—۱ مقدمه

در این فصل به تعریف مفاهیم و اصطلاحاتی نظیر آماره‌های مرتب، روش درستنمایی ماکسیمم، فاصله اطمینان، احتمال پوشش، آمار بیز، روش‌های تکرار عددی، الگوریتم EM و غیره که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

۱—۲ آماره‌های مرتب و تابع چگالی توأم آنها

فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n$، n متغیر تصادفی پیوسته مستقل و همتوزیع با تابع چگالی مشترک f و تابع توزیع F باشند، آنگاه $X_{۱:n}, X_{۲:n}, ...X_{n:n}$ مقادیر مرتب شده $X_۱, X_۲, ..., X_n$ به طوری که $X_{۱:n} < X_{۲:n} < ... < X_{n:n}$، را آماره‌های مرتب متناظر با متغیرهای تصادفی $X_۱, X_۲, ..., X_n$ نامند.
تابع چگالی آماره مرتب j—ام، برابر است با

$$f_{X_{j:n}}(x) = \frac{n!}{(n-j)!(j-۱)!}(F(x))^{j-۱}(۱-F(x))^{n-j}f(x).$$

همچنین تابع چگالی توأم آماره‌های مرتب i—ام و j—ام ($X_{i:n} < X_{j:n}$) عبارت است

$$\begin{aligned} f_{X_{i:n},X_{j:n}}(x_i,x_j) &= \frac{n!}{(i-۱)!(j-i-۱)!(n-j)!}(F(x_i))^{i-۱}[F(x_j)-F(x_i)]^{j-i-۱} \\ &\times (۱-F(x_j))^{n-j}f(x_i)f(x_j). \end{aligned}$$

آماره‌های مرتب در بحث داده‌های سانسور شده مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای اطلاعات بیشتر در مورد آماره‌های مرتب و کاربرد آنها به آرنولد[۱] و همکاران (۱۹۹۲) و یا دیوید و ناگاراجا [۲](۲۰۰۳)، مراجعه کنید.

[۱] Arnold

[۲] David and Nagaraja

۱ــ۳ روش درستنمایی ماکسیمم

روش درستنمایی ماکسیمم [۳] (ML) از قدیمی‌ترین و متداول‌ترین روش‌ها در نظریه برآوردهاست. روش برآورد ML اولین بار توسط گوس [۴] به کار گرفته شد و پس از آن به صورت گسترده‌تری در سال ۱۹۲۵ توسط فیشر [۵] در انتقاد از روش «برآورد گشتاوری [۶]» مورد استفاده قرار گرفت.

روش ML مبتنی بر یک تابع مهم آماری به نام «تابع درستنمایی» است. فرض کنید $\underline{X} = (X_۱, X_۲, ..., X_n)$، بردار n متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم (تابع جرم احتمال توأم) $f_\theta(\underline{x})$، $\theta \in \Theta \subseteq R^k$، باشد، آنگاه برای هر مقدار داده شده $\underline{X} = \underline{x}$، تابع درستنمایی $\underline{X}$ را که با نماد $L(\theta)$ نمایش داده می‌شود، تابع چگالی احتمال توأم $\underline{X}$، تعریف می‌کنیم با این تفاوت که تابع درستنمایی به صورت تابعی از θ در نظر گرفته می‌شود

$$L(\theta) = f_\theta(\underline{x}).$$

طبق تعریف تابع درستنمایی ماکسیمم واضح است که $L(\theta)$ لزوماً نسبت به θ مشتق پذیر نیست، همچنین تابع درستنمایی $L(\theta)$ یک تابع چگالی احتمال نیست.

تعریف ۱.۱ $\delta(\underline{X})$ را برآورد درستنمایی ماکسیمم برای θ گویند هر گاه

$$i) \quad P_\theta(\delta(\underline{X}) \in \Theta) = ۱,$$
$$(۱.۱)$$
$$ii) \quad L(\delta(\underline{x})) \geq L(\theta) \quad ; \quad \forall\theta \in \Theta.$$

معمولاً برآورد درستنمایی ماکسیمم θ را با $\hat{\theta}$ نشان می‌دهند. براساس تعریف $\hat{\theta}$، داریم

$$L(\hat{\theta}) = \sup_{\theta\in\Theta} L(\theta),$$

و یا اگر تعریف کنیم $l(\theta) = \ln L(\theta)$ آنگاه

$$l(\hat{\theta}) = \sup_{\theta\in\Theta} l(\theta).$$

---

[۳] Maximum likelihood

[۴] Gouse

[۵] Fisher

[۶] Moment estimate

۱—۴ فاصله اطمینان

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$، n متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f(.;\theta)$ باشد. آماره‌های $L = g_1(X_1, ..., X_n)$ و $U = g_2(X_1, ..., X_n)$ را با فرض $L < U$ در نظر می گیریم. هرگاه داشته باشیم

$$P_\theta(L < \theta < U) = \gamma, \quad \forall\theta \in \Theta$$

بطوری که γ به پارامتر θ بستگی نداشته و برابر $1 - \alpha$ باشد، می گوییم فاصله (L, U) یک فاصله اطمینان[۷] (CI) با ضریب γ برای θ می‌باشد. آماره‌های U و L را به ترتیب کران بالا و پایین این فاصله و $E(U - L) > 0$ را متوسط طول این فاصله می‌نامند.

توجه کنید که هر دو کران فاصله اطمینان متغیرهای تصادفی می‌باشند ولی ممکن است یکی از آنها برابر با مقدار ثابت c باشد که فاصله (L, c) را فاصله اطمینان یکسویی چپ و (c, U) را فاصله اطمینان یکسویی راست می‌نامند.

ضریب γ به صورت دلخواه توسط پژوهشگر انتخاب می‌شود که اغلب مقادیر ۹۵% و ۹۹% برای آن در نظر گرفته می‌شود.

یکی از رایج‌ترین روش‌ها برای بدست آوردن فاصله اطمینان، روش کمیت محوری می‌باشد که بطور مختصر به آن اشاره می کنیم.

تعریف ۲.۱ فرض کنید $Q = q(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)$ تابعی از نمونه تصادفی و پارامتر مجهول مورد علاقه یعنی θ باشد. اگر توزیع Q به θ بستگی نداشته باشد، گوییم Q یک کمیت محوری می‌باشد.

در به کارگیری این روش، ابتدا دنبال یافتن یک کمیت محوری مثلاً Q هستیم و با توجه به اینکه توزیع Q بستگی به θ ندارد، برای هر $\alpha \in (0, 1)$، مقادیر a و b را که بستگی به θ ندارند طوری اختیار می کنیم که داشته باشیم

$$P_\theta(a < Q < b) = 1 - \alpha. \qquad (۲.۱)$$

آنگاه با برگرداندن گزاره احتمالی (۲.۱) و حل آن بر حسب θ، داریم

$$P_\theta(W_1 < \theta < W_2) = 1 - \alpha,$$

[۷] Confidence interval

که در آن W_1 و W_2 توابعی از $X_1, X_2, ..., X_n$ و a و b خواهند بود. قابل ذکر است که تابع محوری لزومی ندارد منحصر به فرد باشد.

اکثر مواقع نیازمند جستجوی راهی برای دستیابی به فواصل اطمینان تقریبی با دقتی در سطح قابل قبول می‌باشیم به عنوان مثال فرض کنید برای بدست آوردن فاصله اطمینان از روش کمیت محوری، توزیع کمیت مورد نظر به شرط حجم نمونه بزرگ مشخص باشد، در اینصورت فاصله اطمینان بدست آمده را یک فاصله تقریبی گویند. فاصله اطمینان مجانبی یک فاصله اطمینان تقریبی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱ بازه (L,U) را فاصله اطمینان مجانبی گویند هر گاه گزاره

$$P_\theta(L < \theta < U) = \gamma,$$

به صورت حدی برقرار باشد به عبارت دیگر، وقتی n به سمت بینهایت میل کند، گزاره برقرار باشد.

۱—۵ احتمال پوشش

اگر $C(X)$ یک مجموعه تصادفی و فاصله $[L,U]$ یک فاصله اطمینان باشد، در این صورت $\theta \in C(X)$ و یا $\theta \in [L,U]$ یک پیشامد است. احتمال این پیشامد را که در آن θ مقدار واقعی پارامتر مجهول است، احتمال پوشش[۸] (PC) برای مجموعه مذکور گویند. به بیان دیگر

$$PC_\theta = P_\theta(\theta \in C(X)).$$

۱—۶ آمار بیز

در آمار کلاسیک، روش‌های ارائه شده برای برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامترها، بر این اصل پایه‌ریزی شده‌اند که پارامتر θ یک مقدار ثابت ولی ناشناخته است، اما مسایلی وجود دارند که در آن مقدار θ متغیر است مثلاً فرض

[۸] Probability Coverage(PC)

کنید θ نسبت تعداد لامپ‌های ناسالم باشد که یک کارخانه تولید می‌کند، طبیعی است که بر اثر فرسوده شدن ماشین‌های کارخانه، θ به تدریج تغییر می‌کند و نمی‌توان همواره آن را یک مقدار ثابت تلقی کرد، به عبارت دقیق‌تر در اینجا پارامتر θ یک متغیر تصادفی می‌باشد. آماری را که با این دید پایه‌گذاری شده است را آمار بیز می‌نامند. آمار بیز که در چند دهه اخیر مورد بحث و بررسی قرار گرفته، امروزه از رشته‌های مهم علم آمار به شمار می آید.

۱–۶–۱ تابع چگالی احتمال پیشین

با توجه به ماهیت اصل بیز، فرض کنید پارامتر مجهول θ یافته متغیر تصادفی Θ باشد که مقادیر آن متعلق به فضای پارامتر Ω است، بنابراین دارای تابع چگالی احتمال می‌باشد، که آن را چگالی احتمال پیشین[۹] Θ نامند که با $\pi(\theta)$ نشان می‌دهیم. تابع چگالی احتمال پیشین با کمک اطلاعات قبلی یا از راه تجربه و بر پایه سلیقه و عقیده شخصی تعیین می‌گردد. به بیان دیگر، قبل از جمع آوری هر گونه داده‌ای، اطلاعات و دانسته‌های قبلی آماردان، وی را متقاعد می‌کند بر این اساس که شانس قرار گرفتن مقادیر θ در فضای Ω چگونه باشد، بطوری که چنین باورهایی را می‌توان در قالب یک تابع توزیع بیان کرد.
اکنون متغیر تصادفی مورد بررسی X را در نظر می‌گیریم که تابع چگالی آن به θ بستگی دارد. در این صورت با دو متغیر تصادفی X و Θ سر و کار داریم که x یافته اولی و θ یافته دومی است، و $f(x,\theta)$ که $x \in \chi$ و $\theta \in \Omega$، چگالی مشترک X و Θ می‌باشد.

۱–۶–۲ تابع چگالی احتمال پسین

با توجه به اینکه Θ یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال پیشین $\pi(\theta)$ و متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f(x|\theta)$، که $\theta \in \Omega$ است. نمونه تصادفی $\underline{X} = (X_۱, X_۲, ..., X_n)$ را از توزیع $f(x|\theta)$ اختیار و فرض می‌کنیم $\underline{x} = (x_۱, x_۲, ..., x_n)$ یافته‌های آن باشد. چگالی احتمال شرطی Θ را به شرط داشتن $\underline{x}$ چگالی احتمال پسین[۱۰] Θ گویند که با $\pi(\theta|\underline{x})$ نمایش می‌دهیم.

[۹] Prior density
[۱۰] Posterior density

در صورتی که نمونه تصادفی در آماره $T(X) = g(X_1, ..., X_n)$ با یافته $t = g(\underline{x})$ خلاصه شده باشد معمولاً چگالی احتمال پسین را نسبت به این آماره به صورت $\pi(\theta|t)$ به کار می‌برند.

۱—۶—۳ تابع زیان

یکی از ویژگی‌های یک برآوردگر خوب، این است که به مقدار واقعی پارامتر نامعلوم نزدیک باشد به عبارت دیگر، میزان خطا در آن به صفر نزدیک شود.
فرض کنید Ω فضای پارامتر θ و $T(X)$ یک برآوردگر برای θ باشد بطوری که $T(X) \in D$ (D فضای یافته‌های $T(X)$). در این صورت تابع زیان[11] که آن را با L نشان می‌دهند، به صورت تابعی دو متغیره از $\Omega \times D$ به زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی نامنفی تعریف می‌شود، یعنی

$$L : \Omega \times D \to [0, +\infty],$$

که باید این ویژگی‌ها را دارا باشد

$$(1) L(\theta, t) \geq 0, \quad \forall t \in D, \quad \forall \theta \in \Omega,$$
$$(2) L(\theta, t) = 0, \quad \text{اگر} \quad t = \theta.$$

بنابراین تابع $L(\theta, T(X))$ یک متغیر تصادفی است که فاصله دو نقطه θ و t را اندازه می‌گیرد. می‌توان توابع زیان متعددی را معرفی کرد، یکی از این توابع زیان معروف، تابع زیان مربع خطاست که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L(\theta, T) = (T - \theta)^2.$$

علاوه‌براین، تابع زیان قدر مطلق خطاست که به صورت $L(\theta, T) = |T - \theta|$ تعریف می‌شود.

[11] Loss function

۱—۶—۴ تابع مخاطره

با توجه به این که تابع زیان یک متغیر تصادفی است، بنابراین متوسط مقدار L را تابع مخاطره[۱۲] برآوردگر $T(X)$ در برآورد پارامتر θ می‌نامند و آن را را با نماد $R(\theta,T)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R(\theta,T)=R_T(\theta)=E_\theta(L(\theta,T)).$$

واضح است که $R_T(\theta)$ فقط تابعی از θ است.

در بحث برآوردیابی، برای هر تابع زیان داده شده علاقمند به پیدا کردن برآوردگری هستیم که مخاطره کمتری داشته باشد.

۱—۶—۵ مخاطره بیز

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از $f(x|\theta)$، $\theta \in \Omega$ باشند. در این صورت مخاطره بیز برآوردگر $T(X)$ نسبت به تابع مخاطره $R_T(\theta)$ و تابع چگالی احتمال پیشین $\pi(\theta)$ به صورت

$$R_B(\pi,T)=E_\theta(R_T(\Theta)),$$

تعریف می‌شود، یعنی میانگین تابع مخاطره $R_T(\theta)$ نسبت به تابع چگالی احتمال پیشین متغیر تصادفی Θ را مخاطره بیز برآوردگر $T(X)$ گویند.

۱—۶—۶ برآوردگر بیز

برآوردی را که دارای کمترین مخاطره بیز باشد، برآوردگر بیز نامند. یعنی بر اساس تابع چگالی احتمال پیشین $\pi(\theta)$ و تابع زیان L، اگر کلیه مقادیر $\int_\Omega R_T(\theta)\pi(\theta)d\theta$ را برای هر $T(X) \in D$، از کوچک به بزرگ مرتب کنیم مقدار این انتگرال برای برآوردگر بیز از همه کمتر می‌باشد، به عبارت دیگر برای هر برآوردگر $T(X) \in D$

$$\int_\Omega R_{T_B}(\theta)\pi(\theta)d\theta \le \int_\Omega R_T(\theta)\pi(\theta)d\theta.$$

[۱۲] Risk function