دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

روش موجک برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

استاد راهنما :

دکتر علی داوری

پژوهشگر:

مینا قاسمی طالخونچه

آبان ماه ۱۳۹۱

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی خانم مینا قاسمی

تحت عنوان:

روش موجک برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

در تاریخ ۹۱/۸/۳۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی......... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی داوری	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر کیوان مهاجر	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر مهدی قاسمی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

مهر و امضای مدیر گروه ....

سپاس گذاری:

ساختار علمی این پژوهش مرهون رهنمودهای خردمندانه استاد گرامی جناب آقای دکترعلی داوری می باشد که دلسوزانه و با جدیت کامل هدایت این کار را برعهده داشتند.

بدین وسیله سپاس بیکرانم را تقدیم به این استاد بزرگوار کرده و پیشرفت ایشان را در تمام مراحل زندگی از خداوند متعال خواستارم.

تقدیم به :

پدر و مادرم

دو گوهر پاک و بی آلایش زندگی ام که وجودم همه برایشان رنج و محنت بود و وجودشان برایم مهر و محبت.

توانشان رفت تا به توانایی رسم، موهایشان سفیدی گرفت تا روی سپید بمانم.

وتقدیم به همسر مهربانم که چراغ علم ودانش را همواره برایم روشن نگاه داشت.

چکیده

در حال حاضر محاسبات کسری مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. همچنین معادلات دیفرانسیل کسری در رشته های مختلف علوم مانند مکانیک، فیزیک، زیست شناسی و مهندسی به کار برده می شوند. به علت افزایش کاربرد این دسته از معادلات توجه ویژه ای به روش های عددی و دقیق معادلات دیفرانسیل کسری شده است. اخیرا استفاده از ماتریس های عملیاتی از مرتبه کسری برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری توسعه پیدا کرده است. در این تحقیق با مبحث حساب کسری و موجک ها از جمله موجک هار و لژاندر آشنا می شویم. سپس به معرفی ماتریس های عملیاتی مرتبه کسری انتگرال برای موجک های لژاندر و هار می پردازیم و از آن برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری استفاده می کنیم. پس از انجام عملیات دستگاهی از معادلات جبری را به دست می آوریم و بعد از حل آن به نتیجه نهایی می رسیم. با چند مثال نتایج به دست آمده از این روش با روش های عددی دیگر مقایسه می شود.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری، ماتریس های عملیاتی، موجک های لژاندر، موجک های هار

فهرست مطالب

عنوان صفحه

عنوان **صفحه**

فهرست شکل ها

فهرست جدول ها

عنوان **صفحه**

فصل اول

تعاریف و مقدمات اولیه

در این فصل سعی کرده‌ایم به بیان تعاریف و قضایای اولیه، همچنین توابع و تبدیلاتی که در فصول بعد کارایی دارند بپردازیم.

۱-۱ تعاریف و قضایای اولیه

ابتدا به بیان تعاریف و قضایای اولیه با استفاده از منابع [۳۴] و [21] می‌پردازیم:

تعریف ۱-۱-۱: یک فضای برداری متشکل است از:

۱- یک میدان F از اسکالرها؛

۲- یک مجموعه V از بردارها؛

۳- یک عمل به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای α و β از V، بردار $\alpha+\beta$ از V را که مجموع α و β نامیده می‌شود، با شرایط زیر نسبت می‌دهد:

الف) جمع جابجایی است؛ یعنی $\alpha+\beta=\beta+\alpha$؛

ب) جمع شرکت پذیر است؛ یعنی $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$؛

پ) بردار یکتای 0 به نام بردار صفر در V موجود است به طوری که به ازای هر α در V، $\alpha+0=\alpha$؛

ت) به ازای هر بردار α در V، بردار یکتای $-\alpha$ در V موجود است به طوری که $\alpha+(-\alpha)=0$؛

۴- یک عمل به نام ضرب اسکالر که به هر اسکالر c از F و هر بردار α از V بردار $c\alpha$ در V را که حاصلضرب α و c نامیده می‌شود، با شرایط زیر نسبت می‌دهد:

الف) به ازای هر α در V، $1\alpha=\alpha$؛

ب) $(c_1 c_2)\alpha=c_1(c_2\alpha)$؛

پ) $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$؛

ت) $(c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$.

تعریف ۱-۱-۲: فضای نرمدار B را یک فضای باناخ گوییم هرگاه B نسبت به متریک تولید شده به وسیله نرم، فضایی تام باشد؛ به عبارت دیگر هر دنباله کوشی در B همگرا باشد.

تعریف ۱-۱-۳: اگر فضای خطی B دارای یک نرم باشد، آنگاه گوییم B یک فضای نرمدار است.

تعریف ۱-۱-۴: تعریف یک ضرب داخلی در $\mathbb{R}^3$ به طور طبیعی به $\mathbb{R}^n$، برای هر بعد n تعمیم داده می‌شود. برای بردارهای $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ در $\mathbb{R}^n$، ضرب داخلی اقلیدسی برابر است با:

$$\langle X, Y\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_j y_j .$$

باید فضاهای برداری مختلط را مانند فضاهای برداری حقیقی در نظر بگیریم. ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$ را می‌توان برای بردارهای $\mathbb{C}^n$ با مزدوج کردن عامل دوم تغییر داد.

اگر $Z=(z_1,z_2,...,z_n)$ و $W=(w_1,w_2,...,w_n)$ بردارهایی در $\mathbb{C}^n$ باشند، آنگاه:

$$\langle Z,W\rangle=\sum_{j=1}^{n} z_j\overline{w_j}.$$

تعریف ۱-۱-۵: یک "ضرب داخلی" روی یک فضای برداری مختلط V یک تابع $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to C$ است که در خواص زیر صدق می‌کند.

مثبت بودن: برای هر بردار نا صفر $v\in V$، $\langle v,v\rangle>0$.

تقارن مزدوج: $\langle w,v\rangle=\overline{\langle v,w\rangle}$ برای هر بردار v و w در V.

همگن بودن: $\langle cv,w\rangle=c\langle v,w\rangle$ برای هر بردار v و w در V و هر اسکالر $c\in C$.

جمع پذیری: $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$ برای هر u,v,w در V.

یک فضای برداری با یک ضرب داخلی، یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

برای تاکید بر فضای برداری زمینه V، گاهی اوقات ضرب داخلی روی V را با $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ نشان می‌دهیم.

همچنین تعریف قبلی برای ضرب داخلی حقیقی روی فضای برداری حقیقی به کار می‌رود، به جز این که اسکالر c در خاصیت همگن بودن حقیقی است و هیچ مزدوجی در عبارت تقارن مزدوج ندارد.

توجه کنید که خواص دوم و چهارم بر دو خطی بودن دلالت می‌کنند، به عبارتی داریم:

$$\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$$

خواص دوم و سوم باعث می‌شود که اسکالر از مؤلفه‌ی دوم با یک مزدوج خارج شود:

$$\langle v,cw\rangle=\overline{\langle cw,v\rangle}=\bar{c}\,\overline{\langle w,v\rangle}=\bar{c}\,\langle v,w\rangle.$$

شرط مثبت بودن، یعنی می‌توانیم عدد ناصفر $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ را به عنوان طول یا نرم بردار V تعیین کنیم. مفهوم طول، یعنی فاصله‌ی بین دو بردار در V، با این تصور فاصله بین $\{v, w\}$ برابر $\|v - w\|$ است.

تعریف ۱-۱-۶: برای یک بازه‌ی $a \le t \le b$، فضای $L^2([a,b])$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع مربعی انتگرال پذیر روی $[a,b]$ است، به عبارتی:

$$L^2([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to c; \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

توابع ناپیوسته نیز می‌توانند عضوی از این فضا باشند. فضای $L^2([a,b])$ دارای بعد نامتناهی است.

تعریف ۱-۱-۷: ضرب داخلی L^2 روی $L^2([a,b])$ بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt; \qquad f, g \in L^2([a,b])$$

خواص تقارن مزدوج، همگن بودن و دو خطی برای ضرب داخلی برقرار است.

تعریف ۱-۱-۸: فرض کنید $1 \le p < \infty$ و $[a,b]$ یک بازه حقیقی باشد، مجموعه همه‌ی توابع اندازه پذیر f که برای آن‌ها $|f|^p$ روی $[a,b]$ انتگرال پذیر است، فضای $L^p([a,b])$ نامیده می‌شود. به عبارت دیگر فضای $L^p([a,b])$ متشکل از همه‌ی توابع اندازه پذیر f است که

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty.$$

تعریف ۱-۱-۹: $f(x)$ را مطلقاً انتگرال پذیر گوییم هرگاه $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

تعریف ۱-۱-۱۰: فضای ℓ^2 مجموعه همه دنباله‌های $X = \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ است که

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

می‌باشد. ضرب داخلی روی این فضا برای $X = \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ و $Y = \ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle X ,Y \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

تعریف ۱-۱-۱۱: دنباله‌ی $\{ f_n \}$ در $L^2[a,b]$ به f همگرا است اگر وقتی که $n \to \infty$، $\| f_n - f \|_{\ell^2} \to 0$. به طور دقیق‌تر، برای هر ε مثبت دلخواه، عدد صحیح N وجود داشته باشد، به طوری که اگر $n \ge N$ باشد، آن گاه $\| f - f_n \|_{\ell^2} < \varepsilon$.

گاهی اوقات همگرایی در L^2، "همگرایی در میانگین " نامیده می‌شود. حال دو نوع همگرایی دیگر، که اغلب برای توابع استفاده می‌شوند، را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۱۲:

۱- دنباله‌ی $\{ f_n \}$ به طور نقطه‌ای روی بازه‌ی $[a,b]$ همگرا به f است، اگر برای هر $t \in [a,b]$ و هر $\varepsilon > 0$ کوچک دلخواه عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد؛ به طوری که اگر $n \ge N$ آن گاه $| f_n(t) - f(t) | < \varepsilon$.

۲- دنباله‌ی $\{ f_n \}$ به طور یکنواخت روی بازه‌ی $[a,b]$ همگرا به f است، اگر برای هر ε مثبت دلخواه، عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد؛ به طوری که اگر $n \ge N$ آن گاه برای هر $t \in [a,b]$ ، $| f_n(t) - f(t) | < \varepsilon$.

در همگرایی یکنواخت، N تنها به اندازه‌ی ε بستگی دارد و به نقطه t بستگی ندارد؛ در صورتی که در همگرایی نقطه‌ای، N می‌تواند به نقطه t نیز بستگی داشته باشد.

قضیه ۱-۱-۱۳: فرض کنید $\langle \cdot,\cdot \rangle$ و V یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه برای هر $x, y \in V$:

الف) نامساوی شوارتز به صورت $| \langle X ,Y \rangle | \le \| X \| \| Y \|$ است و فقط وقتی برقرار است که X و Y مستقل خطی باشند. علاوه بر این $\langle X ,Y \rangle = \| X \| \| Y \|$ اگر و تنها اگر X یا Y مضرب نامنفی از دیگری باشند.

ب) نامساوی مثلثی به صورت $\| X + Y \| \le \| X \| + \| Y \|$ است. علاوه بر این تساوی برقرار است اگر و تنها اگر X یا Y مضرب نامنفی از دیگری باشند.

تعریف ۱-۱-۱۴: فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد،

- بردارهای X و Y متعامد گفته می‌شوند؛ اگر $\langle X , Y \rangle = 0$.

- گردایه بردارهای e_i، $i = 1, 2, ..., N$، متعامد یکه گفته می‌شوند؛ اگر هر e_i طول واحد داشته باشد، $\| e_i \| = 1$ و برای $i \neq j$، e_i و e_j بر هم عمود باشند.

- دو زیر فضای V_1 و V_2 از V متعامد گفته می‌شوند؛ اگر هر بردار در V_1 بر هر یک از بردارهای V_2 عمود باشند.

- یک پایه متعامد یکه یا دستگاه متعامد یکه برای V، یک پایه از بردارهای V که متعامد یکه هستند، می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۱۵: فرض کنید V_0 یک زیر فضای ضرب داخلی V باشد. "متمم متعامد" V_0، که با $V_0{}^{\perp}$ نشان داده می‌شود مجموعه همه بردارهای V است که بر V_0 عمودند. یعنی

$$V_0{}^{\perp} = \{ v \in V \, ; \, \langle v , w \rangle = 0, \forall w \in V_0 \}.$$

تعریف ۱-۱-۱۶: یک نگاشت خطی بین فضای برداری V و فضای برداری W یک تابع $T : V \to W$ است که در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$T (\alpha v + \beta w) = \alpha T (v) + \beta T (w); \qquad v , w \in V , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

اگر V و W از بعد متناهی باشند، اغلب T با توجه به انتخاب پایه‌های داده شده مثلاً $\{ v_1, v_2, ..., v_n \}$ برای V و $\{ w_1, w_2, ..., w_m \}$ برای W با ماتریس نمایش آن مشخص می‌شود. برای هر $1 \le j \le n$، $T (v_j)$ متعلق به W است و بنابراین می‌توان آن را بر حسب $w_1, w_2, ..., w_m$ بسط داد:

$$T (v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

که a_{ij} ها اعداد مختلط هستند.

۱-۲ برخی توابع و تبدیلات

۱-۲-۱ تابع گاما

یکی از توابع اساسی در محاسبات کسری تابع گامای اویلر[۱]، $\Gamma(z)$ است. این تابع تعمیمی از تابع فاکتوریل است که هر مقدار مختلط یا غیر صحیحی را می‌تواند اختیار کند [17].

تعریف ۱-۲ -۱: تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt; \qquad x\in\mathbb{R}^+ \tag{۱-۱}$$

بعضی از ویژگی‌های تابع گاما به صورت زیر است:

$$۱)\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x); \qquad x\in\mathbb{R}^+ \tag{۱-۲}$$

$$۲)\ \Gamma(x)=(x-1)!; \qquad x\in\mathbb{N} \tag{۱-۳}$$

$$۳)\ \Gamma(1)=1 \tag{۱-۴}$$

$$۴)\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi} \tag{۱-۵}$$

$$۵)\ \Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)} \tag{۱-۶}$$

$$۶)\ \gamma^*(\alpha,x)=\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}dt \qquad \text{(تابع گامای ناتمام)} \tag{۱-۷}$$

---

۱ Euler

۷) $\gamma^*(\alpha,x)=e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha+k+1)}.$ (۸-۱)

۱-۲-۲ تابع دای گاما

تعریف ۱-۲-۲: برای هر $x>0$ تابع دای گاما به صورت زیر تعریف می‌شود [17]:

$$\Psi(x)=D\ln\Gamma(x)=\frac{D\Gamma(x)}{\Gamma(x)}$$

که D نماد مشتق است.

تعدادی از ویژگی‌های تابع دای گاما عبارتند از:

۱) $\Psi(1)=-\gamma$

که در آن γ ثابت اویلر است.

۲) $\Psi(x+1)=\Psi(x)+\frac{1}{x}$

۳) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x\quad dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left[\Psi(\alpha)-\Psi(\alpha+\beta)\right];\qquad \alpha,\beta>0.$ (۹-۱)

۱-۲-۳ تابع بتا

تعریف ۱-۲- ۳: تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود [10] :

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt;\qquad x,y\in\mathbb{R}^+$$ (۱۰-۱)

تابع بتا می‌تواند به صورت ترکیبی از توابع گاما نیز بیان شود:

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)};\qquad x,y\in\mathbb{R}^+$$ (۱۱-۱)

۱-۲-۴ تابع Mittag- Leffler

تابع Mittag- Leffler به وسیله ریاضیدان سوئدی، گستا. م. میتاق-لفلر [۱] در سال ۱۹۰۳ معرفی شد. این تابع تعمیمی از تابع نمایی e^x است و نقش مهمی در محاسبات کسری دارد.

تعریف ۱-۲-۴: این تابع با یک و دو پارامتر به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$E_{\alpha}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)}; \qquad \alpha>0, \tag{۱-۱۲}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}; \qquad \alpha,\beta>0.$$

برای به دست آوردن اطلاعات بیشتر به [14] مراجعه کنید.

۱-۲-۵ تبدیل لاپلاس

تعریف ۱-۲-۵: فرض کنید تابع $f(t)$ در فاصله $[0,\infty)$ تعریف شده باشد. اگر انتگرال مجازی $\int_0^{\infty}e^{-ts}f(t)dt$ موجود و $\lim_{b\to\infty}\int_0^{\infty}e^{-ts}f(t)dt<\infty$ باشد، مقدار این انتگرال که تابعی بر حسب s است، را تبدیل لاپلاس $f(t)$ گوییم و با $F(s)$ یا $L[f(t)]$ نشان می‌دهیم. بنابراین داریم [۳۳]:

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^{\infty}e^{-ts}f(t)dt. \tag{۱-۱۳}$$

تعریف ۱-۲-۶: فرض کنید تبدیل لاپلاس تابع f موجود و برابر F باشد، یعنی

$$L[f(t)]=F(s)$$

در این صورت f را تبدیل معکوس F می‌نامند و می‌نویسند:

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]$$

که در آن L^{-1} عملگر وارون تبدیل لاپلاس است [۳۳].

---

۱ Gosta M.Mittag-Leffler