



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز
عددی

روش موجک برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

استاد راهنما :

دکتر علی داوری

پژوهشگر:

مینا قاسمی طالخونچه

آبان ماه ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه اصفهان است.

بسمه تعالی



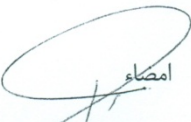

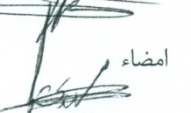
دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی خانم مینا قاسمی


تحت عنوان:

روش موجک برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

در تاریخ ۹۱/۸/۳۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

 امضاء	با مرتبه علمی استادیار	دکتر علی داوری	۱- استاد راهنمای پایان نامه
 امضاء	با مرتبه علمی استادیار	دکتر کیوان مهاجر	۲- استاد داور داخل گروه
 امضاء	با مرتبه علمی استادیار	دکتر مهدی قاسمی	۳- استاد داور خارج گروه

مهر و امضای مدیر گروه



سپاس گذاری:

ساختار علمی این پژوهش مرهون رهنمودهای خردمندانه استاد گرامی جناب آقای دکتر علی داوری می باشد که دلسوزانه و با جدیت کامل هدایت این کار را برعهده داشتند.

بدین وسیله سپاس بیکرانم را تقدیم به این استاد بزرگوار کرده و پیشرفت ایشان را در تمام مراحل زندگی از خداوند متعال خواستارم.

تقدیم به :

پدر و مادرم

دو گوهر پاک و بی آرایش زندگی ام که وجودم همه برایشان رنج و محنت بود و وجودشان برایم مهر و محبت.

توانشان رفت تا به توانایی رسم، موهایشان سفیدی گرفت تا روی سپید بمانم.

وتقدیم به همسر مهربانم که چراغ علم ودانش را همواره برایم روشن نگاه داشت.

چکیده

در حال حاضر محاسبات کسری مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. همچنین معادلات دیفرانسیل کسری در رشته های مختلف علوم مانند مکانیک، فیزیک، زیست شناسی و مهندسی به کار برده می شوند. به علت افزایش کاربرد این دسته از معادلات توجه ویژه ای به روش های عددی و دقیق معادلات دیفرانسیل کسری شده است. اخیراً استفاده از ماتریس های عملیاتی از مرتبه کسری برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری توسعه پیدا کرده است. در این تحقیق با مبحث حساب کسری و موجک ها از جمله موجک هار و لژاندر آشنا می شویم. سپس به معرفی ماتریس های عملیاتی مرتبه کسری انتگرال برای موجک های لژاندر و هار می پردازیم و از آن برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری استفاده می کنیم. پس از انجام عملیات دستگاهی از معادلات جبری را به دست می آوریم و بعد از حل آن به نتیجه نهایی می رسیم. با چند مثال نتایج به دست آمده از این روش با روش های عددی دیگر مقایسه می شود.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری، ماتریس های عملیاتی، موجک های لژاندر، موجک های هار

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
	فصل اول: تعاریف و مقدمات اولیه
۱	۱-۱ تعاریف و قضایای اولیه
۷	۲-۱ برخی توابع و تبدیلات
۷	۱-۲-۱ تابع گاما
۸	۲-۲-۱ تابع دای گاما
۸	۳-۲-۱ تابع بتا
۹	۴-۲-۱ Mittag- Leffler تابع
۹	۵-۲-۱ تبدیل لاپلاس
۱۰	۶-۲-۱ ضرب پیچشی
۱۰	۷-۲-۱ تابع پله ای واحد
۱۱	۸-۲-۱ توابع والش
۱۳	۹-۲-۱ توابع بلوک پالس
۱۳	۱-۹-۲-۱ ویژگی های توابع بلوک پالس
۱۵	۲-۹-۲-۱ بسط توابع بلوک پالس
۱۵	۳-۹-۲-۱ ضرب دو تابع بلوک پالس
۱۶	۳-۱ سری و تبدیل فوریه
۱۷	۱-۳-۱ سیگنال چیست؟
۱۹	۲-۳-۱ سری های مثلثاتی
۱۹	۳-۳-۱ سری فوریه
۲۰	۴-۳-۱ تبدیل فوریه

صفحه	عنوان
۲۲ ۵-۳-۱ روش تبدیل فوریه پنجره ای (STFT)
۲۲ ۶-۳-۱ اتحاد پارسوال
فصل دوم: حساب کسری	
۲۴ ۱-۲ مقدمه‌ای بر حساب کسری
۲۹ ۲-۲ مشتق و انتگرال کسری گرونوالد- لتیکوف
۳۳ ۱-۲-۲ انتگرال از مرتبه دلخواه
۳۴ ۲-۲-۲ مشتق از مرتبه دلخواه
۳۴ ۳-۲ انتگرال کسری با محملی در \mathbb{R}^+
۳۸ ۴-۲ مشتق کسری با محملی در \mathbb{R}^+
۴۲ ۵-۲ تبدیل لاپلاس انتگرال کسری
۴۳ ۶-۲ تبدیل لاپلاس مشتق کسری
۴۶ ۷-۲ معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری
فصل سوم: نظریه موجک	
۴۹ ۱-۳ مقدمه ای درباره موجک
۵۴ ۲-۳ موجک هار
۶۲ ۳-۳ آنالیز چندریزه ساز
۶۳ ۴-۳ رابطه مقیاس
۶۵ ۵-۳ چند جمله ای ها و موجک های لژاندر
۶۵ ۱-۵-۳ چند جمله ای های لژاندر
۶۶ ۵-۳-۱-۱ ویژگی های چند جمله ای لژاندر

۶۷	۲-۵-۳ چند جمله ای لژاندر روی $[-1,1] \times [-1,1]$
۶۷	۱-۲-۵-۳ ویژگی های چند جمله ای لژاندر دو بعدی
۶۷	۳-۵-۳ تقریب (بسط) یک تابع پیوسته روی $[0,1]$
۶۸	۴-۵-۳ تقریب یک تابع روی $[-1,1] \times [-1,1]$
۶۸	۵-۵-۳ موجک لژاندر
۶۹	۱-۵-۵-۳ موجک لژاندر یک بعدی
۷۱	۲-۵-۵-۳ موجک لژاندر دو بعدی
۷۲	۳-۵-۵-۳ موجک لژاندر خطی

فصل چهارم: ماتریس های عملیاتی

۷۹	۱-۴ مقدمه
۸۱	۲-۴ ماتریس های عملیاتی انتگرال متناظر با توابع بلوک پالس
۸۷	۳-۴ ماتریس عملیاتی انتگرال متناظر با موجک لژاندر
۹۴	۴-۴ ماتریس عملیاتی انتگرال متناظر با موجک هار

فصل پنجم: پیاده سازی الگوریتم ها

۱۰۰	۱-۵ وجود و یکتایی جواب
۱۰۹	۲-۵ مثال های عددی
۱۲۰	نتیجه گیری و چشم انداز آینده
۱۲۱	واژه نامه
۱۲۴	مراجع

فهرست شکل ها

صفحه	عنوان
۱۲	شکل ۱-۱: توابع والش برای $n = 0, 1, 2, 3$
۱۴	شکل ۲-۱: نمودار توابع بلوک پالس یک بعدی با $m = 4$ در فاصله $[0, T)$
۱۸	شکل ۳-۱: سیگنال گسسته
۱۸	شکل ۴-۱: سیگنال پیوسته
۵۰	شکل ۳-۱: یک نمونه از اثر زلزله
۵۳	شکل ۳-۲: ولتاژ یک ولت متر معیوب
۵۴	شکل ۳-۳: تقریب سیگنال ولتاژ با توابع هار
۵۵	شکل ۳-۴: نمودار تابع مقیاس هار
۵۶	شکل ۳-۵: موجک هار $\psi(x)$
۵۷	شکل ۳-۶: نمودار مثال ۳-۱-۱
۵۷	شکل ۳-۷: نمودار $\varphi(2x)$
۷۰	شکل ۳-۸: موجک لژاندر برای $m=0, 1, 2$
۷۳	شکل ۳-۹: نمودار تابع مقیاس لژاندر خطی $\varphi_0(t)$ و $\varphi_1(t)$ در بازه $[0, 1]$
۷۵	شکل ۳-۱۰: موجک لژاندر خطی $\psi^0(t)$
۷۵	شکل ۳-۱۱: موجک لژاندر خطی $\psi^1(t)$
۱۱۰	شکل ۵-۱: جواب های عددی موجک لژاندر برای $1 \leq \alpha \leq 2$
۱۱۰	شکل ۵-۲: جواب های عددی موجک هار برای $1 \leq \alpha \leq 2$
۱۱۳	شکل ۵-۳: جواب های عددی برای $\omega = 11$ و $y_0 = 0$ و $y_1 = 1$ و مقادیر مختلف α و $0 \leq \beta \leq 1$
۱۱۴	شکل ۵-۴: جواب های عددی برای $\omega = 11$ و $y_0 = 0$ و $y_1 = 1$ و مقادیر مختلف β و $1 \leq \alpha \leq 2$
۱۱۸	شکل ۵-۵: نتایج عددی مثال ۴-۵ برای $\beta = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$

فهرست جدول ها

صفحه	عنوان
۴۵	جدول ۲-۱: تبدیل لاپلاس
۱۱۱	جدول ۵-۱: خطای مطلق موجک لژاندر برای $M = 3$ و مقادیر مختلف k
۱۱۱	جدول ۵-۲: خطای مطلق موجک هار برای مقادیر مختلف J
۱۱۵	جدول ۵-۳: زمان عملیات انجام شده برای موجک هار و لژاندر برای $m = 64$
۱۱۶	جدول ۵-۴: نتایج عددی برای روش های مختلف در مثال ۳-۵
۱۱۷	جدول ۵-۵: خطای مطلق برای روش های مختلف در مثال ۳-۵
۱۱۸	جدول ۵-۶: خطای مطلق موجک هار برای $m = 32$ و مقادیر مختلف β
۱۱۹	جدول ۵-۷: خطای مطلق موجک لژاندر برای $m = 32$ و مقادیر مختلف β

فصل اول

تعاریف و مقدمات اولیه

در این فصل سعی کرده‌ایم به بیان تعاریف و قضایای اولیه، همچنین توابع و تبدیلاتی که در فصول بعد کارایی دارند بپردازیم.

۱-۱ تعاریف و قضایای اولیه

ابتدا به بیان تعاریف و قضایای اولیه با استفاده از منابع [۳۴] و [21] می‌پردازیم:

تعریف ۱-۱-۱: یک فضای برداری متشکل است از:

۱- یک میدان F از اسکالرها؛

۲- یک مجموعه V از بردارها؛

۳- یک عمل به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای α و β از V ، بردار $\alpha + \beta$ از V را که مجموع α و β نامیده می‌شود، با شرایط زیر نسبت می‌دهد:

الف) جمع جابجایی است؛ یعنی $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ؛

ب) جمع شرکت پذیر است؛ یعنی $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ؛

پ) بردار یکتای 0 به نام بردار صفر در V موجود است به طوری که به ازای هر α در V ، $\alpha + 0 = \alpha$ ؛

ت) به ازای هر بردار α در V ، بردار یکتای $-\alpha$ در V موجود است به طوری که $\alpha + (-\alpha) = 0$ ؛

۴- یک عمل به نام ضرب اسکالر که به هر اسکالر c از F و هر بردار α از V بردار $c\alpha$ در V را که حاصلضرب α و c نامیده می‌شود، با شرایط زیر نسبت می‌دهد:

الف) به ازای هر α در V ، $1\alpha = \alpha$ ؛

ب) $(c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$ ؛

پ) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$ ؛

ت) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.

تعریف ۱-۱-۲: فضای نرم‌دار B را یک فضای باناخ گوئیم هرگاه B نسبت به متریک تولید شده به وسیله نرم، فضایی تام باشد؛ به عبارت دیگر هر دنباله کوشی در B همگرا باشد.

تعریف ۱-۱-۳: اگر فضای خطی B دارای یک نرم باشد، آنگاه گوئیم B یک فضای نرم‌دار است.

تعریف ۱-۱-۴: تعریف یک ضرب داخلی در \mathbb{R}^3 به طور طبیعی به \mathbb{R}^n ، برای هر بعد n تعمیم داده می‌شود.

برای بردارهای $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ در \mathbb{R}^n ، ضرب داخلی اقلیدسی برابر است با:

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

باید فضاهای برداری مختلط را مانند فضاهای برداری حقیقی در نظر بگیریم. ضرب داخلی در \mathbb{R}^n را می توان برای بردارهای \mathbb{C}^n با مزدوج کردن عامل دوم تغییر داد.

اگر $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ و $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ بردارهایی در \mathbb{C}^n باشند، آنگاه:

$$\langle Z, W \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w_j}.$$

تعریف ۵-۱-۱: یک "ضرب داخلی" روی یک فضای برداری مختلط V یک تابع $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ است که در خواص زیر صدق می کند.

مثبت بودن: برای هر بردار $v \in V$ ، $\langle v, v \rangle > 0$.

تقارن مزدوج: $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ برای هر بردار v و w در V .

همگن بودن: $\langle cv, w \rangle = c \langle v, w \rangle$ برای هر بردار v و w در V و هر اسکالر $c \in \mathbb{C}$.

جمع پذیری: $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ برای هر u, v, w در V .

یک فضای برداری با یک ضرب داخلی، یک فضای ضرب داخلی نامیده می شود.

برای تاکید بر فضای برداری زمینه V ، گاهی اوقات ضرب داخلی روی V را با $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ نشان می دهیم.

همچنین تعریف قبلی برای ضرب داخلی حقیقی روی فضای برداری حقیقی به کار می رود، به جز این که اسکالر c در خاصیت همگن بودن حقیقی است و هیچ مزدوجی در عبارت تقارن مزدوج ندارد.

توجه کنید که خواص دوم و چهارم بر دو خطی بودن دلالت می کنند، به عبارتی داریم:

$$\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

خواص دوم و سوم باعث می شود که اسکالر از مؤلفه ی دوم با یک مزدوج خارج شود:

$$\langle v, cw \rangle = \overline{\langle cw, v \rangle} = \overline{c \langle w, v \rangle} = \overline{c} \overline{\langle w, v \rangle} = \overline{c} \langle v, w \rangle.$$

شرط مثبت بودن، یعنی می‌توانیم عدد ناصفر $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ را به عنوان طول یا نرم بردار V تعیین کنیم. مفهوم طول، یعنی فاصله‌ی بین دو بردار در V ، با این تصور فاصله بین $\{v, w\}$ برابر $\|v - w\|$ است.

تعریف ۶-۱-۱: برای یک بازه‌ی $a \leq t \leq b$ ، فضای $L^2([a, b])$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع مربعی انتگرال پذیر روی $[a, b]$ است، به عبارتی:

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

توابع ناپیوسته نیز می‌توانند عضوی از این فضا باشند. فضای $L^2([a, b])$ دارای بعد نامتناهی است.

تعریف ۷-۱-۱: ضرب داخلی L^2 روی $L^2([a, b])$ بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt; \quad f, g \in L^2([a, b])$$

خواص تقارن مزدوج، همگن بودن و دو خطی برای ضرب داخلی برقرار است.

تعریف ۸-۱-۱: فرض کنید $1 \leq p < \infty$ و $[a, b]$ یک بازه حقیقی باشد، مجموعه همه‌ی توابع اندازه پذیر f

که برای آن‌ها $|f|^p$ روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است، فضای $L^p([a, b])$ نامیده می‌شود. به عبارت دیگر فضای $L^p([a, b])$ متشکل از همه‌ی توابع اندازه پذیر f است که

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty.$$

تعریف ۹-۱-۱: $f(x)$ را مطلقاً انتگرال پذیر گوئیم هرگاه $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

تعریف ۱۰-۱-۱: فضای ℓ^2 مجموعه همه دنباله‌های $X = \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$ است که

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

می‌باشد. ضرب داخلی روی این فضا برای $X = \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$ و $Y = \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots$ به صورت

زیر تعریف می‌شود:

$$\langle X, Y \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

تعریف ۱-۱-۱: دنباله‌ی $\{f_n\}$ در $L^2[a, b]$ به همگراست اگر وقتی که $n \rightarrow \infty$

$\|f_n - f\|_{\ell^2} \rightarrow 0$ به طور دقیق‌تر، برای هر ε مثبت دلخواه، عدد صحیح N وجود داشته باشد، به طوری

که اگر $n \geq N$ باشد، آن گاه $\|f - f_n\|_{\ell^2} < \varepsilon$.

گاهی اوقات همگرایی در L^2 ، "همگرایی در میانگین" نامیده می‌شود. حال دو نوع همگرایی دیگر، که اغلب برای توابع استفاده می‌شوند، را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۲:

۱- دنباله‌ی $\{f_n\}$ به طور نقطه‌ای روی بازه‌ی $[a, b]$ همگرا به f است، اگر برای هر $t \in [a, b]$ و هر

$\varepsilon > 0$ کوچک دلخواه عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد؛ به طوری که اگر $n \geq N$ آن گاه

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

۲- دنباله‌ی $\{f_n\}$ به طور یکنواخت روی بازه‌ی $[a, b]$ همگرا به f است، اگر برای هر ε مثبت

دلخواه، عدد صحیح مثبت N وجود داشته باشد؛ به طوری که اگر $n \geq N$ آن گاه برای هر

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad t \in [a, b]$$

در همگرایی یکنواخت، N تنها به اندازه‌ی ε بستگی دارد و به نقطه t بستگی ندارد؛ در صورتی که در همگرایی نقطه‌ای، N می‌تواند به نقطه t نیز بستگی داشته باشد.

قضیه ۱-۱-۱۳: فرض کنید $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و V یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه برای هر $x, y \in V$:

الف) نامساوی شوارتز به صورت $\| \langle X, Y \rangle \| \leq \|X\| \|Y\|$ است و فقط وقتی برقرار است که X و Y مستقل خطی باشند. علاوه بر این $\| \langle X, Y \rangle \| = \|X\| \|Y\|$ اگر و تنها اگر X یا Y مضرب نامنفی از دیگری باشند.

ب) نامساوی مثلثی به صورت $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ است. علاوه بر این تساوی برقرار است اگر و تنها اگر X یا Y مضرب نامنفی از دیگری باشند.

تعریف ۱-۱-۱۴: فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد،

- بردارهای X و Y متعامد گفته می‌شوند؛ اگر $\langle X, Y \rangle = 0$.

- گردایه بردارهای e_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ ، متعامد یکه گفته می‌شوند؛ اگر هر e_i طول واحد داشته باشد، $\|e_i\| = 1$ و برای $i \neq j$ ، e_i و e_j بر هم عمود باشند.

- دو زیر فضای V_1 و V_2 از V متعامد گفته می‌شوند؛ اگر هر بردار در V_1 بر هر یک از بردارهای V_2 عمود باشند.

- یک پایه متعامد یکه یا دستگاه متعامد یکه برای V ، یک پایه از بردارهای V که متعامد یکه هستند، می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۱۵: فرض کنید V_0 یک زیر فضای ضرب داخلی V باشد. "متمم متعامد" V_0 ، که با V_0^\perp نشان داده می‌شود مجموعه همه بردارهای V است که بر V_0 عمودند. یعنی

$$V_0^\perp = \{v \in V; \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in V_0\}.$$

تعریف ۱-۱-۱۶: یک نگاشت خطی بین فضای برداری V و فضای برداری W یک تابع $T: V \rightarrow W$ است که در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w); \quad v, w \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

اگر V و W از بعد متناهی باشند، اغلب T با توجه به انتخاب پایه‌های داده شده مثلاً $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ برای V و $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ برای W با ماتریس نمایش آن مشخص می‌شود. برای هر $1 \leq j \leq n$ ، $T(v_j)$ متعلق به W است و بنابراین می‌توان آن را بر حسب w_1, w_2, \dots, w_m بسط داد:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

که a_{ij} ها اعداد مختلط هستند.

۲-۱ برخی توابع و تبدیلات

۱-۲-۱ تابع گاما

یکی از توابع اساسی در محاسبات کسری تابع گامای اوایلر^۱، $\Gamma(z)$ است. این تابع تعمیمی از تابع فاکتوریل است که هر مقدار مختلط یا غیر صحیحی را می‌تواند اختیار کند [17].

تعریف ۲-۱-۱: تابع گاما به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt; \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (1-1)$$

بعضی از ویژگی‌های تابع گاما به صورت زیر است:

$$۱) \Gamma(x+1) = x\Gamma(x); \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (۲-۱)$$

$$۲) \Gamma(x) = (x-1)!; \quad x \in \mathbb{N} \quad (۳-۱)$$

$$۳) \Gamma(1) = 1 \quad (۴-۱)$$

$$۴) \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (۵-۱)$$

$$۵) \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad (۶-۱)$$

$$۶) \gamma^*(\alpha, x) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\text{تابع گامای ناتمام}) \quad (۷-۱)$$

$$\gamma) \gamma^*(\alpha, x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha + k + 1)}. \quad (۸-۱)$$

۲-۲-۱ تابع دای گاما

تعریف ۲-۲-۱: برای هر $x > 0$ تابع دای گاما به صورت زیر تعریف می‌شود [17]:

$$\Psi(x) = D \ln \Gamma(x) = \frac{D\Gamma(x)}{\Gamma(x)}$$

که D نماد مشتق است.

تعدادی از ویژگی‌های تابع دای گاما عبارتند از:

$$۱) \Psi(1) = -\gamma$$

که در آن γ ثابت اوایلر است.

$$۲) \Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}$$

$$۳) \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \ln x \, dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} [\Psi(\alpha) - \Psi(\alpha+\beta)]; \quad \alpha, \beta > 0. \quad (۹-۱)$$

۳-۲-۱ تابع بتا

تعریف ۳-۲-۱: تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود [10]:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt; \quad x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (۱۰-۱)$$

تابع بتا می‌تواند به صورت ترکیبی از توابع گاما نیز بیان شود:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}; \quad x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (۱۱-۱)$$

۴-۲-۱ تابع Mittag-Leffler

تابع Mittag-Leffler به وسیله ریاضیدان سوئدی، گستا. م. میتاق-لفلر^۱ در سال ۱۹۰۳ معرفی شد. این تابع تعمیمی از تابع نمایی e^x است و نقش مهمی در محاسبات کسری دارد. تعریف ۴-۲-۱: این تابع با یک و دو پارامتر به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}; \quad \alpha > 0, \quad (۱۲-۱)$$

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}; \quad \alpha, \beta > 0.$$

برای به دست آوردن اطلاعات بیشتر به [14] مراجعه کنید.

۵-۲-۱ تبدیل لاپلاس

تعریف ۵-۲-۱: فرض کنید تابع $f(t)$ در فاصله $[0, \infty)$ تعریف شده باشد. اگر انتگرال مجازی $\int_0^{\infty} e^{-ts} f(t) dt$ موجود و $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-ts} f(t) dt < \infty$ باشد، مقدار این انتگرال که تابعی بر حسب s است، را تبدیل لاپلاس $f(t)$ گوئیم و با $F(s)$ یا $L[f(t)]$ نشان می‌دهیم. بنابراین داریم [۳۳]:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-ts} f(t) dt. \quad (۱۳-۱)$$

تعریف ۶-۲-۱: فرض کنید تبدیل لاپلاس تابع f موجود و برابر F باشد، یعنی

$$L[f(t)] = F(s)$$

در این صورت f را تبدیل معکوس F می‌نامند و می‌نویسند:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

که در آن L^{-1} عملگر وارون تبدیل لاپلاس است [۳۳].