بسم الله الرحمن الرحیم

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه فردوسی مشهد

علوم ریاضی

ریاضی و آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی گرایش جبر

عنوان

گراف مقسوم علیه صفر وابسته به نیمگروه جابه جایی

استاد راهنما

دکتر کاظم خشیارمنش

استاد مشاور

دکتر مژگان افخمی گلی

نگارنده

معصومه خسروی

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: گراف مقسوم علیه صفر وابسته به نیمگروه جابه جایی

نام نویسنده: معصومه خسروی

استاد راهنما: دکتر کاظم خشیارمنش

استاد مشاور: دکتر مژگان افخمی گلی

دانشکده: علوم ریاضی گروه: ریاضی و آمار رشته تحصیلی: ریاضی گرایش جبر

تاریخ تصویب: تاریخ دفاع:

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد تعداد صفحات: ۹۸

چکیده پایان‌نامه : در این پایان‌نامه، نشان خواهیم داد که $\tau-$ مرکزهای جردن و $\tau-$ مرکزسازهای موضعی تحت شرایط خاصی $\tau-$ مرکزساز هستند. همچنین نوع جدیدی از اشتقاق تعمیم یافته مرتبط با ۲− همدورهای هوخشیلد بیان می‌کنیم و به معرفی یک اشتقاق تعمیم یافته موضعی مرتبط با ۲− همدورهای هوخشیلد می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم چنانچه یک $CDCSL$ روی فضای هیلبرت مختلط جدایی‌پذیر H باشد و اگر (δ, α) یک اشتقاق تعمیم یافته موضعی از به یک − دو مدول باناخ یکانی نرمال.

دوگان $\mathcal{M}$ باشد، آن‌گاه (δ, α) یک اشتقاق تعمیم یافته است.

واژگان کلیدی:

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : گراف مقسوم علیه صفر وابسته به نیمگروه جابه جایی

اینجانب معصومه خسروی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر کاظم خشیارمنشمتعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه فردوسی مشهد" و یا "Ferdowsi University of Mashhad" به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- **کلیه حقوق این اثر و محصولات آن(مقالات مستخرج، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است. این مطلب بایستی به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.**
- **استفاده از اطلاعات و نتایج این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نیست.**

فهرست مطالب

چکیده

یکی از شاخه‌های جدید جبر، جبر ترکیباتی است که به ارتباط میان ساختارهای جبری و گراف‌های وابسته به آنها پرداخته و خواص میان آن ها را بررسی می‌کند. در این پایان نامه، به ارتباط میان عناصر مقسوم علیه صفر یک نیمگروه جابه‌جایی و گرافی که می‌توان به آن متناظر کرد می پردازیم و بیان می کنیم که تحت چه شرایطی یک گراف می‌تواند، متناظر با گراف مقسوم علیه صفر یک نیمگروه جابه‌جایی باشد. سپس نیمگروه‌هایی را که گراف متناظر آنها متناهیا رنگ پذیر است مطالعه کرده و عدد رنگی گراف را مشخص می کنیم. همچنین به بررسی خواص این گراف‌ها به کمک ایده‌آل‌های یک نیمگروه جابه‌جایی می پردازیم. سرانجام دسته خاصی از انواع گراف‌ها از جمله گراف‌های r-بخشی کامل و نیز گراف‌های r-بخشی کامل با یک شاخ را معرفی کرده و ارتباط میان این نوع گراف‌ها با نیمگروه‌های جابه‌جایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مقدمه

در این پایان نامه که بر پایه مراجع [۹]، [۱۰]، [۱۲] و [۱۷] است به ارتباط میان عناصر مقسوم علیه صفر یک نیمگروه جابه‌جایی و گراف متناظر با آن می‌پردازیم.

در سال ۱۹۹۸ بک [۱] در [۵]، مفهوم گراف مقسوم علیه صفر $G(R)$ از یک حلقه جابه‌جایی R را معرفی کرد. وی فرض کرد که همه عناصر حلقه R، راس‌های این گراف می‌باشند و در صورتی دو راس با هم مجاورند که ضرب آنها صفر باشد. بعدها اندرسون [۲]، نصیر [۳] و لیوینگستون [۴] در [۳] زیر گراف $\Gamma(R)$ از گراف $G(R)$ را که راس‌های آن، مقسوم علیه‌های صفر غیر صفر R می‌باشند، معرفی کردند. در سال ۲۰۰۲ نخستین بار دیمیر، [۵] مک کنزی [۶] و اشنایدر [۷] در [۱۲] به بررسی و مطالعه گراف مقسوم علیه صفر یک نیمگروه جابه‌جایی دارای صفر پرداختند. برای نیمگروه جابه‌جایی S، راس‌های گراف مقسوم علیه صفر متناظر با آن که با $\Gamma(S)$ نشان داده می‌شود، مقسوم علیه‌های صفر غیر صفر S می‌باشند و دو راس x و y از $\Gamma(S)$ مجاورند اگر $xy = 0$. در سال‌های اخیر تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است. به عنوان مثال به [۱]، [۴]، [۸]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۶]، [۱۸]، [۱۹] و [۲۰] رجوع شود.

در بخش اول از فصل اول، پیشنیازها و مقدمات نظریه گراف را که از منابع [۶] و [۱۳] برگرفته شده است، مطرح می‌نماییم. در بخش دوم، به مقدمات و پیشنیازهای جبر جابه‌جایی که از [۱۴] و [۱۵] جمع آوری شده است می‌پردازیم. در بخش سوم از این فصل به بیان تست شرکت پذیری لایت که ابزاری

[1] Beck
[2] Anderson
[3] Naseer
[4] Livingston
[5] DeMeyer
[6] Mc Kenzie
[7] Schneider

برای تشخیص شرکت پذیر بودن یا نبودن جدول کیلی یک ساختار جبری می‌باشد، می‌پردازیم. درصورتی که عمل دوتایی یک ساختار جبری شرکت پذیر باشد، یک نیمگروه خواهد بود.

در فصل دوم که شامل سه بخش است و از مقاله‌های [۱۰] و [۱۲] بر گرفته شده است، به معرفی گراف مقسوم علیه صفر یک نیمگروه جابه‌جایی می‌پردازیم. در بخش اول شرایط لازم و کافی برای این که یک گراف، گراف مقسوم علیه صفر متناظر با یک نیمگروه باشد بیان می‌شود. در این بخش مثال‌هایی از دو گراف که گراف مقسوم علیه صفر متناظر با هیچ نیمگروهی نمی‌باشند، آورده شده است. در ادامه به گراف‌های مقسوم علیه صفری از نیمگروه‌ها که دارای دور هستند، اشاره می‌کنیم. هسته گراف $\Gamma(S)$ که اجتماع دورها در $\Gamma(S)$ است را تعریف کرده و به بررسی ساختار آن به عنوان زیر گرافی از $\Gamma(S)$ می‌پردازیم. در بخش دوم این فصل، سکل نیمگروه جابه‌جایی S را معرفی کرده و در حالتی که نیمگروه با سکلش برابر باشد قضایا و لم‌هایی را بیان و اثبات می‌کنیم. سپس برای سکل نیمگروه S، گراف مقسوم علیه صفر معرفی کرده و ارتباط آن با $\Gamma(S)$ را بیان می‌کنیم.

فصل سوم که از مقاله [۱۷] جمع آوری شده است، شامل دو بخش می‌باشد. در بخش اول این فصل، برای نیمگروه جابه‌جایی S، ایده آل تعریف می‌شود و نشان می‌دهیم مجموعه راس‌های میانه و مرکز گراف $\Gamma(S)$ ایده‌آل‌های S می‌باشند. همچنین نشان می‌دهیم عناصر مجموعه‌های برش راسی و یالی، تحت چه شرایطی ایده‌آل‌های نیمگروه S می‌باشند. به علاوه در این بخش پوچسازهای نیمگروه S را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که ایده‌آل‌های S هستند. در بخش دوم، نیمگروه‌های جابه‌جایی با عدد رنگی متناهی را بررسی می‌کنیم و به رنگ آمیزی گراف مقسوم علیه صفر این نیمگروه‌ها می‌پردازیم. سپس عدد رنگی گراف $\Gamma(S)$ را تعریف کرده و شرایطی که عدد رنگی و عدد خوشه‌ای $\Gamma(S)$ یکسان باشند را بیان می‌کنیم.

فصل چهارم که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و از مقاله‌های [۹] و [۱۷] برگرفته شده است شامل چهار بخش می‌باشد و به معرفی گراف‌های r−بخشی و r−بخشی کامل می‌پردازد. در بخش اول، نشان می‌دهیم که اگر گراف $\Gamma(S)$ گراف r−بخشی کامل باشد، آنگاه S یک نیمگروه کاهش یافته است و هر بخش از $\Gamma(S)$ به همراه صفر ایده‌آلی از S است. سپس اجتماع ۰−متعامد را تعریف کرده و به بررسی آن می‌پردازیم. در بخش دوم، ساختار یک گراف مقسوم علیه صفر دوبخشی در رابطه با دورهایش را

بررسی کرده و ویژگی‌های گراف‌های مقسوم علیه صفر دوبخشی را در چند قضیه و لم بیان می‌کنیم. در بخش سوم، ابتدا نوع خاصی از گراف‌های دوبخشی کامل که گراف‌های دوبخشی کامل با یک شاخ می‌باشند، معرفی شده، سپس نشان می‌دهیم این گراف‌ها متناظر با گراف مقسوم علیه صفر یک نیمگروه می‌باشند. در بخش چهارم نیز، گراف‌های r-بخشی کامل با یک شاخ برای $r \geq ۳$ که متناظر با گراف مقسوم علیه صفر یک نیمگروه جابه‌جایی دارای صفر هستند را مشخص می‌کنیم.

فصل ۱
پیش نیازها

۱.۱ مقدماتی در نظریه گراف‌ها

در این بخش برخی تعاریف، قضایا و لم‌ها را در مورد گراف ها بیان می‌کنیم و برای اطلاعات بیشتر در نظریه گراف‌ها می‌توانید به [۶] و [۱۳] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنید V یک مجموعه ناتهی باشد. یک گراف غیر جهتدار یا به اختصار گراف، زوج مرتب $G=(V,E)$ از مجموعه هاست که $V(G)=\{x_۱,x_۲,...,x_n\}$ را مجموعه راس‌ها و مجموعه یال‌های گراف G که با $E(G)$ نمایش داده می‌شود زیر مجموعه‌ای از مجموعه $E(G)=\{\{x,y\}\mid x,y\in V(G)\}$ می‌باشد.*

نمادگذاری ۲.۱.۱. *ما نماد $x-y$ را برای نشان دادن این که بین دو راس x و y یالی موجود است استفاده می کنیم. راس‌هایی که در دو طرف یک یال وجود دارند راس‌های مجاور نامیده می شوند.*

تعریف ۳.۱.۱. *یک یال با دو سر یکسان طوقه نامیده می‌شود.*

تعریف ۴.۱.۱. *گراف ساده، گرافی است که هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن، بیش از یک یال نباشد.*

در سراسر این پایان نامه گراف‌ها ساده در نظر گرفته می شوند.

تعریف ۵.۱.۱. *گراف تهی، گرافی است که هیچ یالی ندارد و گراف پوچ گرافی است که هیچ راس و هیچ یالی ندارد.*

تعریف ۶.۱.۱. *تابع Ψ_G را به گونه‌ای تعریف می کنیم که به هر یال از گراف G یک جفت نامرتب از راس‌های G را نظیر می‌کند. اگر e یک یال و u و v راس‌های گراف G باشند، به قسمی که $\Psi_G(e) = uv$ ، گوییم e، u را به v وصل می‌کند.*

تعریف ۷.۱.۱. *دو گراف G و H را یکریخت گوییم، اگر دوسوییهای $\Theta : V(G) \to V(H)$ و $\Phi : E(G) \to E(H)$ موجود باشند به طوریکه $\Psi_G(e) = uv$ اگر و تنها اگر $\Psi_H(\Phi(e)) = \Theta(u)\Theta(v)$. چنین جفت (Θ, Φ) از نگاشتها را یک یکریختی بین G و H می‌نامند.*

تعریف ۸.۱.۱. *گراف ساده‌ای که در آن هر دو راس متمایز، با یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف کامل نامیده می‌شود. گراف کاملی که دارای n راس باشد را با K_n نمایش می‌دهیم.*

تعریف ۹.۱.۱. *گراف $G' = (V', E')$ را زیرگراف $G = (V, E)$ گوییم و با $G' \subseteq G$ نشان می‌دهیم هرگاه $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$.*

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید G یک گراف و G' زیرگرافی از G باشد. در این صورت G' را زیرگراف پدید آمده از G گوییم هرگاه $V(G') = V(G)$. به وضوح هر گراف پدید آمده از G با حذف تعدادی از یال‌های گراف G حاصل می‌شود. هم چنین زیرگراف G' از G را زیر گراف القا شده می‌نامیم هرگاه G' با حذف تعدادی از راس‌های G به دست آید.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید G' زیرگرافی از $\mathbf{G}$ باشد. اگر G' گراف کامل باشد، آنگاه آن را یک خوشه [۱] در G گوییم. به وضوح چنین زیر گرافی، زیرگراف القا شده می‌باشد. تعداد راس‌های بزرگترین خوشه در G را با $\omega(G)$ نشان می دهیم و به آن عدد خوشه‌ای G گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱. تعداد راس‌های گراف G را مرتبه گراف گوییم و با $|G|$ نمایش می‌دهیم. گراف G را نامتناهی گوییم هرگاه $|G| = \infty$.

تعریف ۱۳.۱.۱. درجه رأس دلخواه x در گراف G برابر با تعداد راس‌های مجاور با آن است و با نماد $deg(x)$ نشان داده می‌شود.

گزاره ۱۴.۱.۱. در هر گراف، تعداد راس‌های با درجه فرد، زوج است.

برهان. به گزاره ۱.۱ از [۶] رجوع کنید.

□

تعریف ۱۵.۱.۱. راس x از گراف G، راس انتهایی [۲] نامیده می‌شود هرگاه، حداکثر یک یال در G موجود باشد که شامل راس x است.

[1] Clique
[2] End vertex

تعریف ۱.۱.۱۶. *اگر x راسی از گراف G باشد، آنگاه مجموعه $N(x)$ عبارت است از راس‌هایی از گراف G که با راس x مجاورند و نیز تعریف می‌کنیم $\overline{N(x)} = N(x) \cup \{x\}$.*
راس x از گراف G دارای درجه m است هرگاه، $N(x)$ دارای m عضو باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. *یک مسیر از گراف G عبارت است از دنباله‌ی متناهی $v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots e_kv_k$ به طوری که جملات آن یک در میان راس‌ها و یال‌های متمایز G بوده و برای هر i، $1 \leq i \leq k$، v_{i-1} و v_i دو سر e_i باشند. دنباله‌ی فوق، مسیر بین v_0 و v_k است و k طول این مسیر نامیده می‌شود.*

نمادگذاری ۱.۱.۱۸. *هرگاه مسیری به طول r بین دو راس v_0 و v_r از گراف G موجود باشد، آنگاه این مسیر را با نماد $v_0 - v_1 - v_2 - \cdots - v_r$ نشان می‌دهیم به طوریکه برای هر $1 \leq i \leq r$، v_{i-1} و v_i دو سر یک یال می‌باشند.*

تعریف ۱.۱.۱۹. *یک دور عبارت از دنباله متناهی $C = v_0e_1v_1 \cdots e_nv_0$ است به طوریکه برای هر $1 \leq i \leq n-1$، v_i راس‌های متمایز و e_iها یال‌های متمایزند و v_{i-1} و v_i دو سر یال e_i می‌باشند. طول یک دور را تعداد یال‌های آن تعریف کرده و دور به طول n را با C_n نشان می‌دهیم.*

تعریف ۱.۱.۲۰. *گراف G همبند است هرگاه بین هر دو راس آن یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت G ناهمبند می‌باشد.*

تعریف ۱.۱.۲۱. *فرض کنید u و v راس‌های گراف G باشند. در این صورت فاصله‌ی بین u و v که آن را با $d(u,v)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از طول کوتاهترین مسیر بین u و v.*

نتیجه ۱.۱.۲۲. *برای سه راس دلخواه u، v و w از گراف G داریم*

$$d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w).$$

برهان. به تمرین ۱۱.۶.۱ از [۶] رجوع کنید.

□

تعریف ۲۳.۱.۱. *فرض کنید v راسی از گراف G باشد. خروج از مرکز* [1] *راس v که با $e(v)$ نشان داده می‌شود عبارت است از*

$$e(v)=max\{d(x,v)\mid x\in V(G)\}.$$

تعریف ۲۴.۱.۱. *شعاع گراف G را که با $rad(G)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$rad(G)=min\{e(v)\mid v\in V(G)\}.$$

تعریف ۲۵.۱.۱. *قطر گراف G را که با $diam(G)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$diam(G)=max\{e(v)\mid v\in V(G)\}.$$

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنید G یک گراف باشد، رابطه زیر بین شعاع و قطر G برقرار است.*

$$rad(G)\leq diam(G)\leq ۲rad(G).$$

برهان. به قضیه ۳.۴ از [۷] رجوع کنید.

□

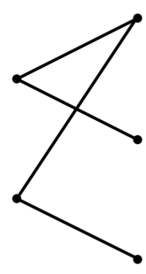
[1] Eccentricity

تعریف ۲۷.۱.۱. *طول کوتاهترین دور در گراف G را کمر گراف G گوییم و با $girth(G)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف G فاقد دور باشد آنگاه می‌نویسیم $girth(G) = \infty$.*

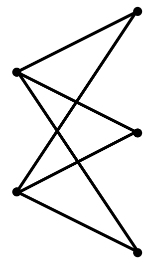
تعریف ۲۸.۱.۱. *یک زیرگراف القایی G مؤلفه‌ی همبند نامیده می‌شود هرگاه یک زیرگراف همبند ماکسیمال گراف G باشد.*

تعریف ۲۹.۱.۱. *گراف G را r-بخشی گوییم هرگاه بتوان مجموعه راس‌های آن را به r قسمت مجزا تقسیم کرد به طوری که هیچ یالی بین هر دو رأس واقع در یک قسمت موجود نباشد.*
از جمله گراف‌های r-بخشی، گراف r-بخشی کامل است که راس‌های هر بخش، با تمام راس‌های موجود در سایر بخش ها، مجاور می‌باشند.

نوع خاصی از این گراف‌ها گراف ۲-بخشی است که مجموعه راس‌های آن را می‌توان به دو بخش V_1 و V_2 تقسیم کرد به طوریکه یک سر هر یال از این گراف در V_1 و سر دیگر آن در V_2 باشد. گراف ۲-بخشی کامل، گراف ۲-بخشی‌ای است که هر راس از بخش V_1 با تمامی راس‌های بخش V_2 مجاور باشد. اگر بخش های V_1 و V_2 از اندازه‌های m و n باشند، آنگاه آن را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم. در شکل های زیر نمونه‌هایی از گراف‌های ۲-بخشی و ۲-بخشی کامل را مشاهده می‌کنید.



شکل ۱.۱: گراف ۲-بخشی



شکل ۲.۱: گراف ۲-بخشی کامل

قضیه ۳۰.۱.۱. *گراف G ۲-بخشی است اگر و تنها اگر شامل دور فرد نباشد.*

برهان. به قضیه ۲.۱ از [۶] رجوع کنید.

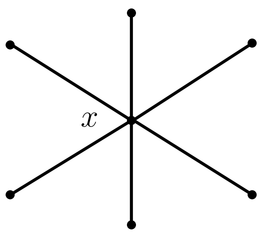
□

نمادگذاری ۳۱.۱.۱. *فرض کنیم U و V زیر مجموعه‌های مجزایی از مجموعه راس‌های یک گراف باشند. نماد $U \cdots V$ را برای نشان دادن یک زیرگراف دوبخشی با بخش‌های U و V و همچنین نماد $U - V$ را برای نشان دادن زیرگراف دوبخشی کامل با بخش‌های U و V استفاده می کنیم.*
در حالت خاص، اگر $s \notin U$، آنگاه نماد $s - U$ نشان دهنده این است که s با هر راس U، مجاور است و هر دو راس متمایز در U، غیر مجاورند.

تعریف ۳۲.۱.۱. *فرض کنید G گرافی دو بخشی با بخش‌های $V_۱$ و $V_۲$ باشد، راس x در $V(G)$ کامل نامیده می‌شود اگر $i \in \{۱, ۲\}$ وجود داشته باشد به طوریکه $N(x) = V_i$.*

تعریف ۳۳.۱.۱. *گرافی با $n + ۱$ راس که n راس از آن، راس‌های انتهایی هستند به طوریکه تمامی این راس‌های انتهایی با راس باقیمانده x مجاور هستند، با مرکز x نامیده می‌شود. به وضوح گراف ستاره‌ای، گراف ۲-بخشی کامل $K_{۱,n}$ می‌باشد. شکل زیر نمونه‌ای از گراف*

ستاره‌ای با مرکز x است.



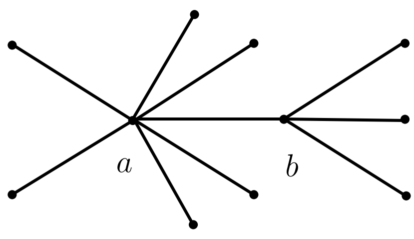
شکل ۳.۱: گراف ستاره‌ای

تعریف ۳۴.۱.۱. *گراف دو ستاره‌ای گرافی مانند G است که شامل دو گراف ستاره‌ای با مرکزهای s و t و یالی که این دو مرکز را به یکدیگر وصل می‌کند، می‌باشد و به صورت زیر نمایش داده می‌شود.*

$$U - s - t - V$$

به طوریکه، $|U| \geq ۱$ و $|V| \geq ۱$.

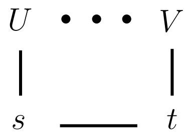
یالی که مرکزهای گراف دو ستاره‌ای را به هم وصل می‌کند، پل گراف دو ستاره‌ای نامیده می‌شود. شکل زیر نمونه‌ای از یک گراف دو ستاره‌ای با مرکزهای a و b می‌باشد.



شکل ۴.۱: گراف دوستاره‌ای

تعریف ۳۵.۱.۱. *گراف دو ستاره‌ای تعمیم یافته با اضافه کردن تعدادی یال به گراف دو ستاره‌ای $U - s - t - V$ که انتهای آنها در U و V قرار می‌گیرند به دست می‌آید و یک گراف دو بخشی با بخش‌های*

$V \cup \{s\}$ و $U \cup \{t\}$ است. گراف دو ستاره‌ای تعمیم یافته را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.



شکل ۵.۱

تعریف ۳۶.۱.۱. *فرض کنید $r \geq 2$ عدد صحیحی باشد. گراف r-بخشی کامل همراه با تعدادی راس انتهایی که با یک راس مشترک مجاورند، گراف r-بخشی کامل با یک شاخ نامیده می‌شود.*

تعریف ۳۷.۱.۱. *رنگ آمیزی گراف G را نسبت دادن رنگ‌ها (اعضای یک مجموعه) به راس‌های گراف G تعریف می‌کنیم، به طوریکه هر راس دارای یک رنگ باشد و به راس‌های مجاور رنگ‌های متمایز اختصاص داده می‌شود.*
در رنگ آمیزی یک گراف اگر از n رنگ استفاده شود، آنگاه به آن یک n-رنگ آمیزی گفته می‌شود. اگر یک n-رنگ آمیزی برای گراف G موجود باشد، آنگاه گراف G، n-رنگ پذیر نامیده می‌شود.
گراف ساده ۱-رنگ پذیر است اگر و تنها اگر گراف تهی باشد و ۲-رنگ پذیر است اگر و تنها اگر گراف ۲-بخشی باشد.

قضیه ۳۸.۱.۱. *برای هر عدد صحیح مثبت k، گراف k-رنگ پذیری وجود دارد که شامل مثلث نیست.*

برهان. به قضیه ۷.۸ از [۶] رجوع کنید.

□

تعریف ۳۹.۱.۱. *کمترین مقدار n برای گراف n-رنگ پذیر G، عدد رنگی G [1] نامیده می‌شود و با*

[1] Chromatic number

$\chi(G)$ *نمایش داده می‌شود.*

واضح است که برای گراف G*،* $\chi(G) \geq \omega(G)$.

لم ۴۰.۱.۱. *اگر هر دو تا دور فرد گراف* G*، دارای راس مشترک باشند، آنگاه* $\chi(G) \leq 5$.

برهان. به تمرین ۲.۱.۸ از [۶] رجوع کنید.

$\square$

قضیه ۴۱.۱.۱. *فرض کنید* G *گراف ساده همبندی باشد که دور فرد نباشد و کامل هم نباشد. اگر ماکسیمم درجه راس‌های گراف* G *را با* Δ *نمایش دهیم، آنگاه* $\chi(G) \leq \Delta$.

برهان. به قضیه ۴.۸ از [۶] رجوع کنید.

$\square$

تعریف ۴۲.۱.۱. *فرض کنید* T *یک زیر مجموعه غیر تهی از راس‌های گراف* G *باشد. زیرگراف القا شده توسط* T*، بزرگترین زیرگراف از* G*، با مجموعه راس‌های* T *است که با* $G[T]$ *نشان داده می‌شود.* $G[T]$ *دقیقا شامل آن یال‌هایی از* G *است که دو راس متمایز* T *را به هم وصل می‌کنند.*

تعریف ۴۳.۱.۱. *فاصله راس* v *در گراف* G *که با نماد* $d(v)$ *نشان داده می‌شود، عبارتست از مجموع فاصله‌های راس* v *از سایر راس‌های گراف* G*. به عبارت دیگر*

$$d(v) = \sum_{x \in V(G)} d(v, x).$$

تعریف ۴۴.۱.۱. *میانه گراف* G *که با نماد* $M(G)$ *نشان داده می‌شود، عبارت است از زیرگراف القا*