بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض

بررسی درجه توپولوژیکی براوئر
و بررسی توابع یکنوای ماکسیمال در فضای باناخ بازتابی

استاد راهنما:
دکتر جعفر زعفرانی

استاد مشاور:
دکتر مجید فخار

پژوهشگر:
حسنعلی لطفی فروشانی

شهریور ماه ۱۳۸۷

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکـارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضـوع ایـن پایـان نامـه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض آقای حسنعلی لطفی فروشانی

تحت عنوان:

بررسی درجه توپولوژیکی و نابرابریهای تغییراتی

در تاریخ ... ۸۷/۶/۳۰ ..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...**بسیار خوب**... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر جعفر زعفرانی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر محمود لشکری زاده	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر طوبی جبروتیان	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

دانشگاه اصفهان

سپاسگذاری

شکر وسپاس یزدان که توانم داد تا این پایان نامه را به پایان برسانم. وظیفه خود می دانم سپاس صمیمانه ام را تقدیم جناب آقای دکتر جعفر زعفرانی و جناب آقای دکتر مجید فخار نمایم که همواره و بی دریغ مرا مرهون راهنمایی ها و الطافشان قرار دادند. از خداوند متعال توفیق روز افزون این دو بزرگوار را خواهانم.

از جناب آقای دکتر محمود لشکریزاده بمی و سرکار خانم دکتر جبروتیان تشکر می نمایم که قبول زحمت نموده و پایان نامه اینجانب را به دقت مطالعه فرمودند.

همچنین از زحمات اساتید گروه ریاضی دانشگاه اصفهان، که هیچ کمکی را از حقیر دریغ ننمودند و نیز سرکار خانم فرهمند در طی تدوین این پایان نامه تشکر می نمایم.

سپاس فراوان از پدر عزیزم و مادر مهربانم که همواره راهنمایم بوده اند و هر آنچه دارم از برکت وجودشان دارم.

تقدیم به همه کسانی که دوستشان

دارم.

چکیده

نظریه درجه یکی از قویترین ابزارهای آنالیز غیر خطی برای مطالعه صفرهای عملگرهای پیوسته می باشد. ما در این پایان نامه با استفاده از درجه توپولوژیکی براوئر وجود جواب برای نابرابری های تغیراتی متناهی را ثابت می کنیم. همچنین این رویکرد برای اثبات وجود جواب تناوبی برای یک کلاس از نابرابری های تغیراتی نیز به کار برده شده است.

در ابتدا بعضی نتایج تجربی روی درجه توپولوژیکی براوئر و عملگر حلال را یادآوری می کنیم سپس برخی نتایج وجودی برای نابرابری های تغیراتی متناهی را ارائه می دهیم و در ادامه کاربرد این رویکرد را در مدل بندی مسائل سیستم های دینامیکی را بیان می کنیم.

در قسمت دوم مفهوم جمع گسترشی را بیان می کنیم و نشان می دهیم می توان مفهوم جمع گسترشی را بطور طبیعی به فضای باناخ بازتابی گسترش داد در حالی که ویژگی های خود را از فضای هیلبرت حفظ می کند. همچنین نشان می دهیم که اگر جمع تغیراتی دو عملگر یکنوای ماکسیمال، ماکسیمال باشد آنگاه جمع تغیراتی شامل جمع گسترش یافته می باشد و اگر جمع نقطه ای عملگرها، ماکسیمال باشد آنگاه این سه مفهوم بر هم منطبق می شوند. و در انتها نشان می دهیم که همانند فضای هیلبرت زیردیفرانسیل مجموع دو تابع نیم پیوسته پایینی، محدب و سره برابر با جمع تغیراتی مجموع آنها می باشد و بنابراین بدست می آوریم که دو مفهوم جمع تغیراتی و جمع گسترش یافته برای زیردیفرانسیل توابع محدب یکسان می باشد.

کلیدواژه: درجه توپولوژیکی براوئر، عملگر حلال، نابرابری های تغیراتی، مجموع عملگرها، زیردیفرانسیل ها، عملگرهای یکنوای ماکسیمال.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف، قضایا و مفاهیم مقدماتی

در این فصل برخی از تعاریف و قضایایی که در ادامه مورد نیاز خواهند بود را بیان می کنیم

تعریف ۱.۱ اگر A یک زیرمجموعه از فضای باناخ بازتابی X یا X^* باشد , در اینصورت $|A^{\min}x|$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\|A^{\min}x\| = \begin{cases} \inf\{\|z\| : z \in A\} & A \neq \emptyset \\ +\infty & A = \emptyset \end{cases}$$

تعریف ۲.۱ تابع $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را در نقطه $x_\circ$ نیم پیوسته پایینی گوییم هر گاه برای هر $\lambda < f(x_\circ)$, $\eta > \circ$ چنان موجود باشد که

$$\forall x \in B(x_\circ, \eta) \qquad \lambda < f(x)$$

یا بطور معادل f در نقطه $x_\circ$ نیم پیوستهٔ پایینی است اگر و فقط اگر

$$f(x_\circ) \leq \liminf_{x \to x_\circ} f(x)$$

همچنین تابع f در نقطه $x_\circ$ نیم پیوسته بالایی است اگر $-f$ در $x_\circ$ نیم پیوسته پایینی باشد .

تعریف ۳.۱ فرض کنید f یک تابع محدب , نیم پیوسته پایینی و سره باشد در اینصورت مزدوج f بصورت زیر تعریف می شود :

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\{< x^*, x > -f(x)\}$$

و همچنین پیچش اینفیمال [1] تابع f و g بصورت زیر تعریف می شود :

$$(f\Box g)(x) = \inf_{y\in X}\{f(y) + g(x-y)\} = \inf_{u+\nu=x}\{f(u) + g(\nu)\}$$

با استفاده از تعریف واضح است که مزدوج پیچش اینفیمال f و g بصورت $(f\Box g)^* = f^* + g^*$ می باشد. از طرفی چون برای تابع محدب, نیم پیوسته پایینی و سره f داریم $f = f^{**}$ ، لذا اگر ϕ یک تابع محدب و سره باشد در اینصورت خواهیم داشت $\phi^{**} = \overline{\phi}$.

تعریف ۴.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و M یک زیرمجموعه از X باشد . در اینصورت نگاشت $r : X \to M$ یک درون بری نامیده می شود اگر برای هر $x \in M$ داشته باشیم $r(x) = x$. و در این حالت M یک درون بر X نامیده می شود.

تعریف ۵.۱ مشتق راست f در $x_\circ$ در جهت ν با $Df(x_\circ)(\nu)$ نشان داده می شود و بصورت زیر تعریف می شود:

$$Df(x_\circ)\nu := f'(x;\nu) = \inf_{h>\circ}\frac{f(x_\circ + h\nu) - f(x_\circ)}{h}$$

[1] Infimal Convolution

اگر $Df(x_\circ)(\nu)$ $\nu \to$ یک تابع خطی پیوسته باشد در اینصورت گوییم f گتو دیفرانسیل پذیر [۲] در $x_\circ$ است و عملگر خطی پیوسته $\nabla f(x_\circ)$ بصورت زیر تعریف می شود :

$$< \nabla f(x_\circ), \nu >= Df(x_\circ)\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^n$$

که $\nabla f(x_\circ)$, گرادیان f در $x_\circ$ گفته می شود .

لم ۶.۱ فرض کنید C یک زیرمجموعه محدب از یک فضای X Tvs باشد. در اینصورت اگر $x \in C$, $y \in C^\circ$ و $\circ < t < ۱$, لذا خواهیم داشت

$$tx + (۱ - t)y \in C^\circ$$

قضیه ۷.۱ (قضیه جادهی ویتنی [۳]) هر منیفلد دیفرانسیل پذیر M از بعد n را می توان بطور دیفرانسیل پذیر در $\mathbb{R}^{۲n+۱}$ به عنوان یک زیرمنیفلد بسته نشاند.

قضیه ۸.۱ (قضیه استوکس) فرض کنید M یک منیفلد فشرده سودار از بعد n باشد و فرض کنید ω یک $n - ۱$ فرم روی M و ∂M دارای جهت یکسان با $\tilde{\partial} M$ باشد. در اینصورت خواهیم داشت

$$\int_M d\omega = \int_{\tilde{\partial} M} i^*\omega$$

---

[۲] Gateaux differentiable

[۳] Whitney imbedding theorem

قضیه ۹.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و $E \subseteq X$ باشد. در اینصورت برای توپولوژی ضعیف گزاره های زیر هم ارزند:

(i) $E \subseteq X$ فشرده نسبی است.

(ii) هر دنباله در E یک نقطه انباشتگی دارد .

(iii) هر دنباله در E یک زیردنباله همگرا دارد.

نتیجه ۱۰.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار تفکیک پذیر باشد. در اینصورت اگر $\{x'_k\}$ یک دنباله نرم کراندار در X^* باشد, آنگاه $\{x'_k\}$ یک زیردنبالهw^*– همگرا دارد.

نتیجه ۱۱.۱ اگر (X,τ) یک فضای موضعاً محدب باشد در اینصورت هر زیرمجموعه محدب از X τ– بسته می باشد اگر و فقط اگر w– بسته باشد.

قضیه ۱۲.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و بازتابی باشد. در اینصورت هر مجموعه محدب و بسته در X دارای عنصر مینیمال نرم می باشد.

لم ۱۳.۱ فرض کنید $\varepsilon > ۰$ و f و g تابعک های خطی با $\|f\| = \|g\| = ۱$ و صادق در شرط زیر باشند

$$\|x\| \leq ۱\,,\quad f(x) = ۰ \quad \Rightarrow \quad |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{۲}$$

در اینصورت یا $\|f - g\| \leq \varepsilon$ یا $\|f + g\| \leq \varepsilon$.

اثبات. فرض کنید h به گونه ای انتخاب شود که روی هسته f با g برابر باشد و $\|h\| \leq \frac{\varepsilon}{۲}$, در اینصورت روی هسته f , $g - h = ۰$ و بنابراین برای برخی α داریم $g - h = \alpha f$ و لذا

$$|۱ - |\alpha|| = |\|g\| - \|g - h\|| \leq \|h\| \leq \frac{\varepsilon}{۲}$$

بنابراین اگر $\alpha \geq 0$, لذا خواهیم داشت

$$\|f-g\| = \|(1-\alpha)f - h\| \leq |1-\alpha| + \|h\| \leq \varepsilon$$

و اگر $\alpha < 0$, در اینصورت خواهیم داشت

$$\|f+g\| = \|(1+\alpha)f + h\| \leq |1+\alpha| + \|h\| \leq \varepsilon$$

و بنابراین برهان کامل می شود. ■

فصل ۲

درجه توپولوژیکی براوئر و نابرابری های تغیراتی

۲—۱ تعریف و بسط درجه توپولوژیکی

عدد گشت میدان برداری داده شده $f = (F, G)$ و خم بسته C (یابطور معادل مرز دامنه محصورشده D) را با $deg(f, D)$ و عدد گشت $f - p_\circ$ را با $deg(f, D, p_\circ)$ نمایش می دهیم و بصورت زیر تعریف می شود:

$$deg(f, D, p_\circ) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} d \quad \arg(f(z) - p_\circ)\, dz$$

عموماً به جای صفرهای f , به مطالعه جوابهای

$$f(x, y) = p_\circ$$

برای $p_\circ \in \mathbb{R}^2$ می پردازیم .

در ابتدا فرض می کنیم که f یک تابع تحلیلی است و برای اعداد مختلط $z = x + iy$ و $w_\circ = p_\circ + iq_\circ$, $f(z) = F(z) + iG(z)$ می باشد وهمچنین Ω یک دامنه باز و کراندار در $\mathbb{C}$ با مرز $\partial\Omega$ است .
فرض کنید $\forall z \in \partial\Omega \qquad f(z) \neq w_\circ$ در اینصورت خواهیم داشت که

$$deg(f,\Omega,w_\circ) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} d\ \arg(f(z)-w_\circ)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} d\ \log(f(z)-w_\circ)\, dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)-w_\circ}\, dz = \sum_{z_i\in f^{-1}(w_\circ)\cap\Omega}\alpha_i \qquad (1.2)$$

زیرا در توابع مختلط داریم که هر گاه $f(z)$ درون وبر مرز ساده بسته C تحلیلی باشد و f یک تابع غیر ثابت و بر C مخالف صفر باشد, در اینصورت f نمی تواند تعداد بی پایانی صفر درون C داشته باشد زیرا در غیر اینصورت آن تعداد بی پایان صفر دارای نقطه حدی است و بنابر یک قضیه داریم که f درون C باید صفر باشد که در تناقض با غیر ثابت بودن f روی C است .لذا صفر های f درون C متناهی است . فرض کنید این صفرها $z_1,...,z_m$ باشند و مرتبه آنها به ترتیب $\alpha_1,...,\alpha_m$ باشند در اینصورت

$$f(z) = (z-z_1)^{\alpha_1}.(z-z_2)^{\alpha_2}...(z-z_m)^{\alpha_m}.K(z)$$

که $K(z)$ صفری درون C ندارد اکنون

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{(z-z_i)} + \frac{K'(z)}{K(z)}$$

و پس از گرفتن انتگرال خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{(z-z_i)}\, dz+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{K'(z)}{K(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i$$

حال فرض کنید f تحلیلی نباشد ولی دیفرانسیل پذیر باشد, بطوریکه $z=(x,y)$, $f=(F,G)$, $w_\circ=(p_\circ,q_\circ)$ و فرض کنید

$$f(z)\neq w_\circ \qquad \forall z\in\partial\Omega$$
$$\det f'(z) = \det\partial\frac{(F,G)}{\partial(x,y)}(z)\neq 0, \qquad \forall z\in f^{-1}(w_\circ)$$

در اینصورت مجموعه نقاط $\Omega\cap f^{-1}(w_\circ)$ متناهی است , زیرا اگر $\Omega\cap f^{-1}(w_\circ)$ متناهی نباشد چون Ω کراندار است و نامتناهی نقطه داریم که در خاصیت بالا صدق می کند , لذا یک نقطه تجمع $x_\circ$ داریم و چون f پیوسته است لذا $f(x_\circ)=w_\circ$ یعنی $x_\circ\in f^{-1}(w_\circ)$. از طرفی چون $x_\circ\notin f^{-1}(\partial\Omega)$ پس $x_\circ$ یک نقطه درونی Ω است , حال ثابت می کنیم که $\det f'(x_\circ)=0$.

چون $x_\circ$ یک نقطه درونی Ω است, اگر داشته باشیم $J_f(x_\circ)\neq 0$, لذا در یک همسایگی $x_\circ$, f باید وارون پذیر و بنابراین یک به یک باشد. از طرفی چون $x_\circ$ نقطه تجمع است, لذا در هر همسایگی $x_\circ$ نقطه ای مانند $x_1\neq x_\circ$ چنان موجود است که $f(x_1)=w_\circ$.از طرفی داشتیم که $f(x_\circ)=w_\circ$. یعنی f در هیچ همسایگی $x_\circ$ یک به یک نیست و لذا $\det f'(x_\circ)=0$ که با فرض در تناقض است. پس مجموعه $\Omega\cap f^{-1}(w_\circ)$ متناهی است .

بنابر این داریم :

$$\begin{aligned}deg(f,\Omega,w_\circ) &= \tfrac{1}{۲\pi}\int_{\partial\Omega} d\ \arg(f(z)-w_\circ)\\ &= \tfrac{1}{۲\pi}\int_{\partial\Omega} d\ arc\ \log\tfrac{G-q_\circ}{F-p_\circ}\\ &= \tfrac{1}{۲\pi}\int_{\partial\Omega}\tfrac{(F-p_\circ)dG-(G-q_\circ)dF}{(F-p_\circ)^{۲}+(G-q_\circ)^{۲}}\end{aligned}$$

و با استفاده از قضیه گرین عبارت بالا برابر است با

$$\begin{aligned}&= \textstyle\sum_{z_j\in f^{-۱}(w_\circ)\cap\Omega}\int_{\partial B_\varepsilon(z_j)}\tfrac{(F-p_\circ)dG-(G-q_\circ)dF}{(F-p_\circ)^{۲}+(G-q_\circ)^{۲}}\\ &= \textstyle\sum_{z_j\in f^{-۱}(w_\circ)\cap\Omega} sgn(\det f'(z_j)). \qquad (۲.۲)\end{aligned}$$

بطوریکه $\varepsilon > \circ$ به اندازه کافی کوچک است و

$$B_\varepsilon(z_i)\cap B_\varepsilon(z_j)=\emptyset, \qquad \forall z_i\neq z_j, \quad z_i,z_j\in f^{-۱}(w_\circ)\cap\Omega$$

و همچنین

$$\det\ f'(z)\neq\circ, \quad \forall z\in\textstyle\bigcup_{z_j\in f^{-۱}(w_\circ)\cap\Omega}B_\varepsilon(z_j)$$

فورمول اخیر یک راهنمایی برای تعریف درجه توپولوژیکی برای نگاشت های با بعد بالاتر رابیان می کند. بدین صورت که برای هر ریشه $f(z)=\omega_\circ$ یک عدد علامت دار (علامت دترمینان مشتق تابع در این نقطه) را وابسته می کنیم و سپس درجه توپولوژیکی را بصورت مجموع این اعداد علامت دار تعریف می کنیم .
قبل از تعریف به یک مورد بخصوص از قضیه سارد نیاز داریم ,

قضیه ۱.۲ فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز و $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ یک نگاشت $C^{۱}$ باشد و $Z=\{x\in\mathbb{R}^n \mid det f'(x)=\circ\}$ در اینصورت $f(Z)$ یک مجموعه با اندازه صفر است .

اثبات. مکعب $C\subseteq\Omega$ را با اندازه هر ضلع a در نظر می گیریم و C را به N^n مکعب $C_i^{(۱)}$, $i=۱,...,N^n$, تقسیم می کنیم بطوریکه هر گاه $i\neq j$ $int(C_i^{(۱)})\cap int(C_j^{(۱)})=\emptyset$ و اندازه هر ضلع این مکعب ها $\frac{a}{N}$ باشد. بنابراین

$$\|f(x)-f(x_\circ)\|\leq K_C\|x-x_\circ\|\leq K_C\frac{a\sqrt{n}}{N}$$

برای هر $x,x_\circ\in C_i^{(۱)}$ و $K_C=\max\{\|f'(x)\| \mid x\in C\},$

از طرف دیگر

$$\forall \varepsilon > \circ \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ s.t. \ \ \|f(x)-f(x_\circ)-f'(x_\circ)(x-x_\circ)\| < \varepsilon\|x-x_\circ\| \leq \varepsilon\frac{a\sqrt{n}}{N}$$

حال در نظر بگیرید $x_\circ \in Z$ در اینصورت $f'(x_\circ)$ وارون پذیر نیست.
بنابراین $f'(x_\circ)\mathbb{R}^n$ نمی تواند تمام فضای $\mathbb{R}^n$ را بپوشاند ولی در یک فضای خطی $(n-۱)$ بعدی H واقع شده است .
در اینصورت در $C_i^{(۱)}$ بطوریکه شامل $x_\circ$ است داریم

$$dist(f(x), f(x_\circ)+H) \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}a}{N} \qquad \forall x \in C_i^{(۱)}$$

بنابراین خواهیم داشت که $f(C_i^{(۱)})$ در یک مکعب واقع شده است بطوریکه اندازه هر ضلع آن $\frac{۲a\sqrt{n}\varepsilon}{N}, \frac{۲a\sqrt{n}K_C}{N}, \ldots, \frac{۲a\sqrt{n}K_C}{N}$ می باشد.
بنابراین

$$\begin{aligned} m^*(f(C\cap Z)) &\leq \textstyle\sum_{C_i^{(۱)}\cap Z\neq\emptyset} m^*(f(C_i^{(۱)}\cap Z)) \\ &\leq \textstyle\sum_{C_i^{(۱)}\cap Z\neq\emptyset} m^*(f(C_i^{(۱)})) \\ &\leq ۲^n K_C^{n-۱} n^{\frac{n}{۲}} a^n \varepsilon \end{aligned}$$

که در آن m^* , اندازه لبگ است. چون $\varepsilon > \circ$ و مکعب C دلخواه هستند , بدست خواهیم آورد که $m^*(f(Z)) = \circ$. $\blacksquare$

فرض کنید X یک n − منیفلد باشد , به زیرمجموعه $W \subseteq Y$ یک مجموعه پوچ گفته می شود اگر برای هر دستگاه مختصی (φ, U) از Y مجموعه $\varphi(U \cap W) \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه پوچ باشد .
قضیه سارد نشان می دهد که اگر X, Y n − منیفلد باشند در اینصورت برای هر $f \in C^۱(X,Y)$ مجموعه مقادیر بحرانی f یک مجموعه پوچ می باشد .
فرض کنید $X_\circ, Y$ دو منیفلد هموار و سودار n − بعدی باشند و $X \subseteq X_\circ$ یک مجموعه باز باشد بطوریکه $\overline{X} = X \cup \partial X$ فشرده باشد. اگر $f \in C(\overline{X}, Y) \cap C^۱(X,Y)$ و اگر $y_\circ$ یک مقدار منظم f باشد در اینصورت

$$f^{-۱}(y_\circ) = \{x \in X \mid f(x) = y_\circ\}$$

یک مجموعه متناهی است .
برای اثبات مطلب بالا نشان می دهیم که هر عضو $f^{-۱}(y_\circ)$ یک نقطه منفرد است .

اگر چنین نباشد پس

$$\exists x_\circ \in f^{-1}(y_\circ) \quad s.t. \quad \forall \varepsilon > \circ \quad B_\varepsilon(x_\circ) \cap \{f^{-1}(y_\circ) - x_\circ\} \neq \emptyset$$

حال چون $y_\circ$ یک مقدار منظم است و $f(x_\circ) = y_\circ$ پس $\det f'(x_\circ) \neq \circ$. لذا f در یک همسایگی $x_\circ$ مانند $B_\delta(x_\circ)$ وارون پذیر و لذا یک به یک است اما با توجه به رابطه قبلی داریم که

$$x_\backslash \in B_\delta(x_\circ) \cap \{f^{-1}(y_\circ) - x_\circ\} \neq \emptyset$$

لذا $f(x_\circ) = f(x_1) = y_\circ$,$x_1 \neq x_\circ$. پس f در این همسایگی یک به یک نیست که یک تناقض می باشد پس تمام نقاط $f^{-1}(y_\circ)$ منفرد می باشند و چون $\overline{X}$ فشرده است پس $f^{-1}(y_\circ)$ یک مجموعه متناهی است .

پس فرض می کنیم

$$f^{-1}(y_\circ) = \{x_1, ..., x_k\}$$

و همچنین $y_\circ \notin f(\partial X)$ یک مقدار منظم باشد در اینصورت تعریف می کنیم:

$$deg(f, X, y_\circ) := \sum_{j=1}^{k} sgn(\det f'(x_j)) \qquad (۳.۲)$$

باز هم فرض می کنیم که Z نشاندهنده نقاط بحرانی f باشد.

در سه مرحله تعریف درجه توپولوژیکی را به نگاشت های پیوسته گسترش می دهیم .

$$f \in C(\overline{X}, Y) \cap C^2(X, Y), y_\circ \notin f(Z) \cup f(\partial X).I$$

برای حذف کردن شرایط منظم بودن و $f \in C^1(X, Y)$, فورمول (۳.۲) را به صورت یک انتگرال بیان خواهیم کرد.

فرض کنید U_j یک همسایگی از x_j باشد بطوریکه $f : U_j \to f(U_j)$ یک دیفئومورفیسم باشد و برای هر $i \neq j$, $i, j = 1, ...k,$ $U_i \cap U_j = \emptyset$. همسایگی V از $y_\circ$ را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$V = \bigcap_{j=1}^{k} f(U_j)$$

حال n− فرم C^∞, μ را روی Y انتخاب می کنیم

$$\mu = \psi(y).dy_1 \wedge ... \wedge dy_n$$

(در ادامه برای سادگی قرار می دهیم $dy = dy_1 \wedge ... \wedge dy_n$) بطوریکه

$$supp\psi \subseteq V \cap (Y - f(\partial X)), \qquad \int_Y \mu = 1$$

حال چون $\det f'(x)$ دارای علامت یکسانی روی هر U_j می باشد , خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\int_X \mu o f = \sum_{j=1}^k \int_{U_j} \mu o f = \sum_{j=1}^k \int_{U_j} \psi(f(x)) \det f'(x)\, dx \\
= \sum_{j=1}^k sgn(\det f'(x_j)) \int_{U_j} \psi o f(x).|\det f'(x)|\, dx \\
= \sum_{j=1}^k sgn(\det f'(x_j)) \int_{f(U_j)} \psi(y)\, dy \\
= \sum_{j=1}^k sgn(\det f'(x_j)) \\
= deg(f, X, y_0) \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

در انتگرال بالا , μ بطور دلخواه انتخاب شده بود و در ادامه ثابت می کنیم که انتگرال $\int_X \mu o f$ به انتخاب n − فرم μ بستگی ندارد.

تعریف ۲.۲ گوئیم دستگاه مختصی (g, Ω) , یک دستگاه مختصی مناسب [1] در $y_0 \in Y$ است اگر

(۱) $g(y_0) = 0$

(۲) $g(\Omega) = I_n = (-1, 1)^n \subseteq \mathbb{R}^n$

و همچنین یک n − فرم C^∞ روی Y , مجاز [2] گفته می شود اگر $\mu = \psi(y)dy$ در شرایط زیر صدق کند

(۱) برای یک دستگاه مختصی مناسب (g, Ω) در y_0, $supp\ \psi \subseteq \Omega \cap (Y - f(\partial X))$

(۲) $\int_Y \mu = 1$

---

[1] good chart

[2] admissible