بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرّس

دانشکده فنی و مهندسی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد مهندسی برق–کنترل

بررسی پایداری و طراحی کنترل‌کننده برای سیستمهای دارای تاخیر زمانی بر اساس ناتساوی‌های ماتریسی خطی

فاطمه اقبال سرابی

استاد راهنما:

دکتر حمیدرضا مؤمنی

استاد مشاور:

دکتر حمید خطیبی

بهار ۱۳۸۹

تقدیم

با تقدیم بهترین‌ها برای آن پادشاهان ملک مهر و ستایش نیکی‌ها برای آن خوشه چینان خرمن عشق که خاک درگاه غنایشان سرمه چشم و باران آسمان دلشان شوق پویاییم است.

با تمام وجود تقدیمتان می‌دارم

پدر عزیز، مادر مهربان و خواهر نازنینم

که عطر مهربانیتان همیشه در وجودم جاریست.

تشکر و قدردانی

«منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربتست و به شکر اندرش مزید نعمت»

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

اکنون در آستانه راهی نو به پاس نعمات بی‌حد پروردگار بر خود لازم می‌دانم سپاس گذار تمام عزیزانی باشم که در این راه یاریم نمودند.

«من ستایشگر آن استادی هستم که اندیشیدن را به من آموخت، نه اندیشه‌ها را»

در مقام سپاس از استاد، بر خود واجب می‌دانم از زحمات و راهنمایی‌های بی‌دریغ استاد عزیزم آقای دکتر حمیدرضا مومنی تشکر و قدردانی نمایم. هم‌چنین مراتب سپاس و قدردانی خویش را از سر صدق و اخلاص به محضر استاد عزیزم جناب آقای دکتر حمید خطیبی، که در نهایت سعه صدر و خالصانه با رهنمودهای ارزشمند و سازنده اینجانب را در انجام این پروژه مورد محبت خویش قرار داده‌اند، ابراز می‌دارم.

از اساتید گرامی جناب آقایان دکتر محمدتقی حمیدی بهشتی و دکتر مهرزاد نامور که زحمت داوری این پروژه را متقبل شده و مرا از راهنمایی‌های ارزنده خود بهره مند ساختند، نهایت سپاس و قدردانی را دارم.

از دوستان خوبم در آزمایشگاه کنترل سیستم‌های پیشرفته و آزمایشگاه اتوماسیون و ابزار دقیق و هم‌چنین خانم‌ها سارا افاضاتی، سمیه رضوانی و نرگس آرمان‌فرد بسیار سپاسگزارم.

و در پایان از خانواده عزیزم به خاطر عشق و حمایت مدامشان تشکر می‌کنم.

چکیده

در این گزارش، مسئله بررسی پایداری و پایدارسازی سیستم‌های تاخیردار مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این سیستم‌ها به صورت خطی و با عدم اطمینان به فرم چندوجهی در پارامترها در نظر گرفته می‌شوند. آنالیز پایداری اینگونه سیستم‌ها در حوزه زمان و با استفاده از قضیه لیاپانوف-کراسوفسکی انجام می‌گیرد که نسبت به سایر روش‌ها محافظه کاری کمتری وارد مسئله می‌کند. برای این منظور، تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی جدیدی پیشنهاد می‌شود. با استفاده از تابعی پیشنهاد شده و بکار گیری ناتساوی جنسن برای جملات پیوندی ظاهر شده در مشتق تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی، شرایط پایداری سیستم‌های تاخیردار به صورت وابسته به مقدار تاخیر و در قالب ناتساوی‌های ماتریسی خطی بیان می‌شود. حد بالای تاخیر به دست آمده از این شروط نسبت به نتایج موجود در مقالات بیشتر می‌باشد. سپس با گسترش نتایج حاصل از آنالیز پایداری، به مسئله طراحی کنترل کننده پایدارساز برای سیستم‌های مذکور پرداخته می‌شود. در این تحقیق، کنترل کننده از نوع فیدبک حالت در نظر گرفته می‌شود. در واقع هدف از طراحی چنین کنترل کننده‌ای، تعیین بردار کنترل به گونه‌ایست که پایداری سیستم حلقه بسته برای بیشترین مقدار تاخیر تضمین شود. در این گزارش برای بیان شرایط پایدارسازی سیستم‌های دارای تاخیر در قالب ناتساوی‌های ماتریسی خطی، الگوریتمی پیشنهاد می‌شود که نسبت به سایر روش‌های موجود در این زمینه، نتیجه بسیار بهتر با محافظه کاری کمتری دارد. در پایان به منظور نشان دادن اثر بهبود بخشی روش‌های ارائه شده، نتایج بر روی مثال‌های عددی مختلف با هم مقایسه می‌شوند.

کلید واژه: سیستم‌های تاخیر دار، تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی، پایداری وابسته به تاخیر، ناتساوی ماتریسی خطی، پایداری و پایدارسازی مقاوم، عدم اطمینان چندوجهی، کنترل کننده فیدبک حالت.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فهرست علایم و نشانه‌ها

عنوان	علامت اختصاری
تاخیر	τ
حد بالای تاخیر	h
ترانهاده ماتریس A	A^T
ماتریس مثبت نیمه معین	$M \geq 0$
ماتریس مثبت معین	$M > 0$
ماتریس منفی معین	$M < 0$
ماتریس صفر با ابعاد $m\times n$	$0_{m\times n}$
ماتریس واحد $n\times n$	I_n
ترم متقارن	$*$
مجموعه ماتریس‌های حقیقی $m\times n$	$R^{m\times n}$
مجموعه اعداد حقیقی	R
نرم بردار	$\|\cdot\|$
پوشش محدب	co

فهرست جدول‌ها

عنوان	صفحه

فصل ۱- مقدمه

۱-۱- پیشگفتار

در عمل بسیاری از سیستم‌های دینامیک را نمی‌توان با یک معادله دیفرانسیلی معمولی $\dot{x}(t)=f\left(t,x(t)\right)$، که در آن مسیر آینده سیستم با مقدار کنونی متغیر حالت $x(t)$ کاملا مشخص می‌شود، مدل کرد. در اینگونه سیستم‌ها سرعت تغییرات حالت سیستم علاوه بر مقدار کنونی حالت $x(t_0)$ به مقادیر قبلی آن یعنی $x(\zeta),t_0-r\le\zeta\le t_0$ نیز وابسته است. اینگونه سیستمی را سیستم تاخیر دار[۱] می‌گویند [۱۹]. بسته به سیستم مورد نظر، تاخیر می‌تواند ثابت یا متغیر با زمان[۲]، شناخته شده یا نامعلوم، معین یا تصادفی[۳] باشد.

سیستم‌های تاخیر دار تحت عناوین مختلفی مانند سیستم‌های حافظه دار[۴]، سیستم‌های با تاخیر فاز[۵] و یا سیستم‌های ارثی[۶] نیز شناخته می‌شوند و دسته‌ای از سیستم‌ها با بعد بینهایت را نمایش می‌دهند [۴ و ۳۴]. تاخیر زمانی در اغلب سیستم‌های مهندسی از جمله شبکه‌های ارتباطی[۷]، پروسه‌های شیمیایی، سیستم‌های عمل از دور[۸]، شبکه‌های عصبی[۹]، سیستم‌های اقتصادی، زیردریایی‌ها[۱۰]، سیستم‌های مکانیکی، سیستم‌های انتقال[۱۱] و غیره دیده می‌شود [۵۲].

---

1 Time-delay system
2 Constant or Time-Varying
3 Deterministic or Stochastic
4 Systems with Memory
5 Time-Lag Systems
6 Heredditary
7 Communication Systems
8 Teleoperation Systems
9 Neural Networks
10 Underwater Vehicles
11 Transportation Systems

در شبکه‌های عصبی انتشار یک پیام از طریق شبکه به یک مقدار زمان نیاز دارد، که با تاخیر مدل می‌شود. در دهه ۱۹۵۰ به استفاده از مدل‌های تاخیر برای توصیف سیستم مرکزی عصبی[1] در فرآیند یادگیری توجه خاصی شد.

در سیستم‌های مکانیکی که انتقال مواد از یک زیر سیستم به زیر سیستم دیگر به صورت آنی نیست، مدلسازی تاخیر زمانی در توصیف سیستم بسیار مهم است.

ویژگی این سیستم‌ها اینست که دینامیک آن‌ها با معادلات دیفرانسیلی مشخص می‌شود که حاوی اطلاعاتی در رابطه با پیشینه سیستم است. بنابراین سیستم‌های تاخیردار به عنوان معادلات دیفرانسیلی تابعی مورد بررسی قرار می‌گیرند [۳، ۱۹ و ۴۱].

سیستم خطی با تاخیر زمانی با معادلات دیفرانسیلی به فرم زیر توصیف می‌شود:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^{K} A_k x(t-\tau_k) \qquad (1\text{-}1)$$

که A_k ها ماتریس‌های حقیقی ومعلوم و تاخیرهای زمانی τ_k ,$k=1,\ldots,K$ ثابت ولی نامعلومند. اگر $K\geq 2$ باشد سیستم با تاخیر چندگانه[2] و در غیر اینصورت سیستم با تاخیر یگانه[3] گفته می‌شود [۳۷].

در این تحقیق رفتار سیستم با تاخیر یگانه مورد بررسی می‌باشد که با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau) \qquad (2\text{-}1)$$

در این سیستم برای محاسبه حالت در لحظات گوناگون داشتن مقدار متغیر حالت در زمان $-\tau \leq t \leq 0$ الزامی است. از اینرو در سیستم‌های تاخیر دار شرط اولیه به صورت $x(t)=\phi(t), t\in[-\tau,0]$ بیان می‌گردد [۱۹].

---

[1] Central Nervous System

[2] Multiple Delays

[3] Single Delay

اغلب سیستم‌های تاخیردار را می‌توان با کلاس خاصی از FDE تحت عنوان معادله دیفرانسیلی-تفاضلی[1] مدل کرد:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_k)\right) \qquad (۳-۱)$$

که در آن $x \in R^n$ متغیر حالت و $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k$ تاخیرها هستند. فرم عمومی‌تر FDE به صورت زیر است:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x_t\right) \qquad (۴-۱)$$

که x_t همان متغیرهای حالت x در بازه $[t-\tau, t]$ می‌باشد و $x_t(\theta) = x(t+\theta), -\tau \le \theta \le 0$. معادله بالا فرم کلی معادلات دیفرانسیلی تابعی تاخیردار[2] است [۲۲].

در نوع RFDE بالاترین درجه مشتق شامل هیچ متغیر تاخیرداری نمی‌شود. وقتی چنین جمله‌ای مشاهده شود، معادله دیفرانسیلی از نوع خنثی[3] داریم. در واقع NFDE فرم کلی‌تر FDE است که در آن $\dot{x}(t)$ نه تنها به $x(t+\theta), -\tau \le \theta \le 0$ بلکه به مشتقات آن $\dot{x}(t+\theta), -\tau \le \theta < 0$ نیز وابسته است [۱۹]:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x_t, \dot{x}_t\right) \qquad (۵-۱)$$

[1] Differential-Difference Equation
[2] Retarded Functional Differential Equations (RFDE)
[3] Neutral Functional Differential Equations (NFDE)

۱-۲- تاریخچه

طی سالین گذشته سیستم‌های تاخیر دار به صورت گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۱، ۲، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۴، ۲۱، ۲۴، ۴۳، ۵۵ و ...].

معادلات تاخیر اولین بار در قرن هجدهم در مقالات برنولی، اویلر، کاندورست، لاگرانژ و پویسن[1] در نظر گرفته شدند. بررسی سیستماتیک اینگونه معادلات از اوایل قرن بیستم توسط ولترا[2] [۷۱] آغاز شد و چندین مسئله کاربردی با معادلات دیفرانسیلی مدل شدند [۱۹ و ۲۱].

در آنالیز پایداری سیستم‌های دارای تاخیر تا مدت‌ها از روش تخمین پده[3] استفاده می‌شد و نتایج خوبی در کاربرد داشته است [۴۲]. پونتریگن[4] در سال ۱۹۴۲ [۶۳] نتایج خوبی در باب صفرهای شبه چندجمله‌ای‌ها[5] بدست آورد و چبوتارو[6] چندین مقاله در مورد معیار راوث-هورویتز[7] برای شبه چند جمله‌ای‌ها ارائه کرد.در سال ۱۹۴۹ میشکیس[8] برای اولین بار مسئله مقدار اولیه را فرمول بندی کرد [۱۰].

تلاش‌هایی که در زمینه گسترش تئوری لیاپانوف[9] برای سیستم‌های با تاخیر زمانی صورت می‌گرفت در ابتدا با مشکلاتی مواجه بودند که تا قبل از کار کراسوفسکی[10] حل نشده بودند. از سال ۱۹۵۰ به بعد موضوع سیستم‌های تاخیر دار یا معادلات دیفرانسیل تابعی[11] در زمینه‌های مختلف ریاضی و مهندسی کنترل مورد توجه واقع شدند.

---

1 Bernoulli, Euler, Condorcet, Lagrange and Poisson
2 V. Volterra
3 Pade` Approximation
4 Pontryagin
5 Quasipolynomials
6 Chebotarev
7 Routh-Hurwitz
8 Myshkis
9 Lyapunov Krasovskii Second Method
10 N. Krasovskii
11 Functional Differential Equations (FDE)

کراسوفسکی در سال ۱۹۵۶ [۴۱] با استفاده از حالت $x(t+\phi)$ به جای $x(t)$ در تابع لیاپانوف و تبدیل آن به تابعی لیاپانوف قضیه لیاپانوف را برای سیستم‌های تاخیر دار بسط داد. در حالتی که تاخیر زمانی به صورت متغیر با زمان با مشتق محدود باشد، نیز می‌توان روش لیاپانوف-کراسوفسکی را به کار برد.

سپس رازومیخین[1] [۶۴ و ۶۵] به منظور پرهیز از استفاده تابعی در آنالیز پایداری لیاپانوف روشی ارائه کرد که به قضیه پایداری رازومیخین منجر شد. ارائه سیستماتیک این روش‌ها با بسط بیشتر توسط لونل [۲۳] انجام گرفت.

بلمن و کوکه[2] در سال ۱۹۶۳ [۳] بسیار دقیق به توزیع ریشه‌های معادله مشخصه برای سیستم‌های تاخیر دار پرداخته‌اند. کولمنوسکی و نوسو[3] ۱۹۸۶ [۴۰] بررسی وسیعی از روش‌های مختلف آنالیز پایداری در هر دو حوزه فرکانس و زمان داشته‌اند.

بررسی پایداری مقاوم سیستم‌های تاخیر دار با قضیه رازومیخین، برای حالت مستقل از تاخیر اولین بار توسط سو و هانگ[4] ۱۹۹۲ [۶۹] و در شرایط وابسته به مقدار تاخیر توسط وو و میزوکامی[5] ۱۹۹۶ [۷۵] صورت گرفت و کیم[6] ۱۹۹۶ [۳۹] و سو، هسیه و ینگ[7] ۱۹۹۷ [۷۰] شرایط مستقل از میزان تاخیر برای پایداری مقاوم سیستم‌های تاخیر دار بدست آوردند.

با توجه به پیشرفت‌هایی که در زمینه حل ناتساوی‌های ماتریسی خطی[8] حاصل شد، توجه بیشتری به فرمول بندی مسئله پایداری مقاوم در قالب LMI شد. برای مثال کوکامه، کوبایاشی و موری[9] ۱۹۹۸ [۴۰]

---

[1] B. Razumikhin
[2] Bellman and Cooke
[3] Kolmanovskii and Nosov
[4] Su and Huang
[5] Wu and Mizukami
[6] Kim
[7] Su, Hsieh, and Yang
[8] Linear Matrix Inequalities (LMIs)
[9] Kokame, Kobayashi, and Mori

مسئله پایداری مستقل از مقدار تاخیر به روش لیاپانوف-کراسوفسکی و لی و سوازا[1] ۱۹۹۷ [۴۵ و ۴۶] را بر اساس ناتساوی‌های ماتریسی خطی بیان کردند.

در طول سال‌های گذشته توجه زیادی به کنترل سیستم‌های تاخیر دار شده و نتایج زیادی برای روش‌های کنترل مستقل از مقدار تاخیر [۱۶، ۵۰ و ۵۷] و وابسته به تاخیر [۴۶، ۴۸، ۴۹ و ۵۸] بدست آمده است. بیشتر این روش‌های ارائه شده روی کنترل فیدبک حالت[2] و کنترل فیدبک خروجی[3] متمرکز شده اند.

راس[4] در سال ۱۹۷۰[۶۷] برای یک پروسه شیمیایی با تاخیر، کنترل کننده فیدبک مربعی بهینه طراحی کرد. ونگ، لی و بولی[5] در سال ۱۹۹۳ [۷۳] الگوریتمی برای محاسبه یک کنترل کننده زمان گسسته به منظور پایدار سازی سیستم تاخیر دار پیشنهاد دادند.

در سال ۱۹۹۷، لی و سوزا[6] [۴۷] پروسه‌ای برای طراحی کنترل کننده فیدبک خروجی برای سیستم-های زمان پیوسته تاخیر دار پیشنهاد کردند.

طراحی کنترل کننده‌های PID نیز برای سیستم‌های تاخیر دار بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است، ولی اکثر این روش‌ها سیستم تاخیر دار از مرتبه یک را در نظر می‌گیرند [۲۸]. برای مثال پارک، سونگ و لی[7] [۶۱] یک کنترل کننده PID پیشرفته با تنظیم خودکار برای پایدار سازی سیستمی مرتبه اول با تاخیر زمانی ارائه کردند.

---

[1] Li and Suaza
[2] State Feedback Control
[3] Output Feedback Control
[4] Ross
[5] Wang, Lee, and Boley
[6] Li and de Souza
[7] Park, Sung, and Lee

پایدارسازی سیستم خطی تاخیردار با عدم اطمینان در پارامترهای آن توسط فیدبک حالت بدون حافظه، اولین بار توسط چرس[۱] ۱۹۸۹ و پس از آن در کارهای شن[۲] ۱۹۹۱، فوجارونچاناچای و فوروتا[۳] ۱۹۹۲، زی و سوزا[۴] ۱۹۹۳ و محمود و الموتیری[۵] ۱۹۹۴ مورد توجه قرار گرفت که البته این موارد همگی حالت غیر وابسته به مقدار تاخیر را بررسی کرده‌اند. علاوه بر این‌ها، سو و هانگ[۶] ۱۹۹۲، سو ۱۹۹۴، نیکولسکو[۷] ۱۹۹۴، لی و سوزا[۸] ۱۹۹۷، مون و همکارانش[۹] ۲۰۰۱ و فریدمن و شیکد[۱۰] ۲۰۰۳ در کارهای خود مسئله را برای حالت وابسته به تاخیر در نظر گرفتند [۱۳، ۴۴، ۴۵ و ۵۶].

۱-۳- ضرورت انجام کار

با توجه به آنچه گفته شد و اثراتی که تاخیر زمانی بر رفتار سیستم‌ها دارد که از جمله موجب ناپایداری و کاهش کارآیی می‌شود و از آنجا که سیستم‌های تاخیر دار با بعد بی نهایت می‌باشند، مسئله آنالیز پایداری و سنتز سیستم‌های خطی با تاخیر زمانی موضوعات جالب و در عین حال مشکلی در زمینه کنترل بوده که در طول چهار دهه گذشته توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است.

در سال‌های اخیر بسیاری از آنالیزها و سنتزها برای سیستم‌های تاخیر دار بر پایه ناتساوی‌های ماتریسی خطی انجام گرفته‌اند و تلاش برای پیدا کردن شروط پایداری و پایدار سازی با محافظه کاری[۱۱] کمتر بر اساس LMI هم چنان به عنوان موضوع داغی در تئوری سیستم با تاخیر زمانی باقی مانده است.

---

1 Cheres
2 Shen
3 Phoojaruenchanchai and Furuta
4 Xie and de Souza
5 Mahmoud and Al-Muthairi
6 Su and Haung
7 Niculescu
8 Li and de Souza
9 Moon et.
10 Fridman and Shaked
11 Conservatism

در این پروژه مسئله آنالیز پایداری سیستم‌های خطی دارای تاخیر زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد و سعی می‌شود روشی جدید و سیستماتیک برای بررسی پایداری اینگونه سیستم‌ها ارائه شده و شرایط پایداری وابسته به مقدار تاخیر با محافظه کاری کمتر به صورت روابطی بر اساس ناتساوی‌های ماتریسی خطی که از لحاظ محاسباتی نیز کارآمد باشد، بدست آورده شود. سپس این شرایط برای طراحی کنترل کننده فیدبک حالت پایدار ساز بسط داده می‌شود.

۱-۴- نوآوری تحقیق

در این گزارش به آنالیز پایداری سیستم‌های خطی دارای تاخیر زمانی و طراحی کنترل کننده پایدارساز در حوزه زمان و بر اساس روش لیاپانوف-کراسوفسکی پرداخته می‌شود. کم شدن محافظه کاری در نتیجه حاصل شده و بدست آوردن شرایط بر اساس ناتساوی‌های ماتریسی خطی مهم ترین جنبه نوآوری این تحقیق می‌باشد.

۱-۵- ساختار گزارش

در فصل دوم اثراتی که تاخیر زمانی بر رفتار سیستم دارد بررسی می‌شود. فصل سوم به بیان روش‌های مختلف آنالیز پایداری و طراحی کنترل کننده برای پایدارسازی سیستم‌های دارای تاخیر زمانی پرداخته و در فصل چهارم، چگونگی مدل سازی عدم اطمینان‌ها به منظور بررسی مسئله پایداری مقاوم بیان می‌شود. سپس در فصل پنجم کارهای انجام شده در این زمینه ذکر شده و پس از آن در فصل ششم، روش پیشنهاد شده برای بررسی پایداری و سنتز سیستم‌های دارای تاخیر ارائه خواهد شد. در فصل هفتم، به منظور نشان دادن کم شدن محافظه کاری در نتایج ارائه شده، این روش‌ها بر روی مثال‌های مختلف شبیه سازی می‌شوند.

در فصل آخر نیز نتیجه‌گیری این تحقیق و کارهای پیشنهادی برای آینده در رابطه با موضوع پایداری و پایدارسازی سیستم‌های تاخیر دار بیان می‌شود.

فصل ۲- اثرات تاخیر زمانی بر رفتار سیستم

۲-۱- مقدمه

حضور تاخیر زمانی در سیستم‌ها اثرات مختلفی روی رفتار سیستم دارد، از جمله می‌تواند باعث ناپایداری[1]، نوسانات[2]، کاهش کارآیی[3] و ابعاد نامحدود[4] سیستم شود [۵۶].

۲-۲- تاثیر تاخیر بر پایداری سیستم

بر خلاف عقیده عمومی که تاخیر در همه موارد منجر به ناپایداری سیستم می‌شود، تاخیر می‌تواند هم اثر ناپایدار کننده و هم اثر پایدار کننده داشته باشد. اگر یک سیستم کنترل با فیدبک واحد، پلنت $G_p(s)=1/s\,e^{-s\tau}$ و کنترل‌کننده تناسبی $G_c(s)=K>0$ را در نظر بگیریم، با استفاده از معیار پایداری نایکوئیست و یا دیگر روش‌های حوزه فرکانس می‌توان نشان داد که سیستم حلقه بسته پایدار است اگرو فقط اگر $\tau<\dfrac{\pi}{2K}$. یعنی سیستم در حالتی که $\tau=0$ (بدون تاخیر) باشد پایدار باقی می‌ماند. در واقع در این حالت، تاخیر اثر ناپایدار کنندگی دارد [۱۹].

حال با در نظر گرفتن همان کنترل‌کننده و فیدبک، سیستم $G_p(s)=1/s^2+\omega_0^{\,2}e^{-s\tau}$ فقط در صورتی می‌تواند پایدار شود که $\tau>0$ باشد. به عبارت دیگر این سیستم با کنترل‌کننده تناسبی در حالتی

---

1 Instability
2 Oscilations
3 Performance Limitation
4 Infinite Dimensionality

که $\tau = 0$ باشد،پایدار شدنی نیست. بنابراین در این حالت، تاخیر به عنوان عامل پایدار ساز عمل می‌کند. در این مورد شرط پایداری به صورت $\frac{2n\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - |k|}} < \tau < \frac{(2n+1)\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + |k|}} \;, n = 0,1,2,...$ است [۱۹].

علیرغم نکته ذکر شده فوق، معمولا تاخیر زمانی در یک سیستم به عنوان یک منبع ناپایداری و عامل نوسان‌ساز به شمار می‌رود، بنابراین معمولا سیستم‌های تاخیردار در رسیدن به پایداری مطلوب با چالش-هایی مواجه می‌شوند [۳۲].

۲-۳- ابعاد نامحدود

تابع انتقال تاخیر زمانی τ به صورت $e^{-\tau s}$ می‌باشد که نسبت به s تابعی غیر جبری[1] است. بنابراین معادله مشخصه سیستم به صورت

$$\det\left(sI_n - A - \sum_{k=1}^{K} A_k e^{-\tau_k s} \right) = 0 \qquad (۱-۲)$$

نیز غیر جبری بوده و دارای بی‌نهایت ریشه مختلط می‌باشد. در نتیجه ابعاد فضای حل بی‌نهایت می‌شود [۴۰]. این روند اثر مهمی روی آنالیز سیستم دارد، زیرا روش‌های کاربردی کنترل (از جمله کنترل مدرن) عمدتا برای سیستم‌های با بعد محدود بسط داده شده‌اند.

یک روش معمول برای سیستم با بعد بی‌نهایت، تخمین زدن آن با سیستمی با بعد محدود و به کار گیری روش‌های موجود روی آن است. این روش تخمین، المان تاخیر را از سیستم حذف می‌کند و در بسیاری از سیستم‌های کاربردی به خوبی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ولی از نظر تئوری، در حالت کلی نمی‌توان خواص سیستم اصلی از جمله پایداری را تضمین کرد.

1 Transcendental Function