بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان

کوهمولوژی موضعی نسبت به یک زوج ایده آل

از

الهام فرقانیان

استاد راهنما

دکتر احمد عباسی

استاد مشاور

دکتر فرهاد درستکار

شهریور ۱۳۸۸

تقدیم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی .
به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.
به پاس قلب بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس درپناهشان به شجاعت می گراید و به پاس محبت بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند
این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می کنم ، که همه عشقند ، همه شورند ، همه مهر .

تقدیر و تشکر

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و در طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت . اکنون در آستانه راهی نو به پاس نعمات بی حد پروردگار بر خود لازم می دانم سپاس گذار تمام عزیزانی باشم در دوران تحصیل همواره مشوق و پشتیبان اینجانب بوده و در برابر سختی ها و نا ملایمات یاری ام نموده اند.
هم چنین از زحمات اساتید محترم و به خصوص استاد ارجمندم جناب آقای دکتر احمد عباسی و استاد گرامی جتاب آقای دکتر فرهاد درستکار به عنوان استاد مشاور که همواره و تا آخرین لحظه با راهنمایی های خود راهگشای اینجانب بوده اند و دانشجویان صمیمی ومهربان دانشکده علوم پایه دانشگاه گیلان بویژه خانم هاجر روشن، دانشجوی دوره دکتری ریاضی . از همه و همه کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم .
در پایان خوشحالی خود را از حضور اساتیدی چون دکتر حبیب اله انصاری و دکتر منصور هاشمی جهت داوری پایان نامه ابراز می دارم و امیدوارم در آینده بتوانم شاگردی این عزیزان را بنمایم .

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده فارسی

کوهمولوژی موضعی نسبت به یک زوج ایده آل [۱۸]

الهام فرقانیان

اهمیت کوهمولو ژ ی موضعی $H_I^i(M)$، باعث شده است که تعمیم های متفاوتی با انگیزه های متنوع پیدا کند .در این پایان نامه ما یکی از تعمیم های مدول کوهمولو ژ ی موضعی را بر حسب دو ایده آل دلخواه I و J از حلقـه تعویضـپذیر و نـوتری R را مـورد مطالعه قرار می دهیم .

در این پایان نامه ایده ای را برای تعمیم کوهمولوژی موضعی معرفی خواهیم کرد که به آن مدول کوهمولوژی موضعی با تحدید به زوج ایده آل های (I,J) گوییم . همچنین قضایای مربوط به صفرشدن کوهمولوژی موضعی را به روی زوج ایده آل ها تعمـیم داده و ارتباط این کوهمولوژی موضعی را با کوهمولوژی موضعی معمولی بررسی خواهیم کرد .

کلیدواژه : کوهمولوژی موضعی،کوهمولوژی موضعی نسبت به زوج ایده آل،قضیه صفرشدن و قضیه ناصفرشدن

Abstract

Local Cohomology based on a pair of Ideals [18]

Elham Forghanian

The importance of local cohomology modules has caused to some applications in algebra geometry in commutative algebra.
In this thesis , we study one of the generalization of local cohomology module according to a pair of ideals I , J from commutative , Noetherian Ring R.
We pose an idea to generalize local cohomology , which is called local cohomology module to a pair of ideals I , J . we also will extend The Vanishing Theorem relating to ordinary local cohomology modules to generalized case an a pair of ideals .

Keywords :Local Cohomology, Local Cohomology based a pair of ideals,Vanishing and Non-Vanishing Theorem.

مقدمه

در سال‌های اخیر، هندسه جبری مورد توجه بسیاری قرار گرفته و بالطبع مدول های کوهمولوژی کـه یکـی از سـاختارهای جبـری است که در حوزه هندسه جبری کاربرد های فراوانی دارد رشد چشمگیری داشته و توجه بسـیاری از ریاضـیدانان بنـام حـوزه جبـر جابجایی را به خود معطوف کرده است. به ویژه وقتی صـحبت از متنـاهی مولـد بـودن ایـده آل هـای اول وابسـته بـه مـدول هـای کوهمولوژی به میان آمد ریاضیدانانی همچون گروتندیک، برادمن، شارپ، هرزوگ، شنزل، برونز و ... بـه نتـایج ارزشـمندی در ایـن زمینه دست یافتند. در این رساله ، ایده ای بـرای تعمـیم مـدول کوهمولـوژی موضـعی معرفـی مـی‌کنـیم کـه آن را یـک مـدول کوهمولوژی موضعی نسبت به زوج ایده‌آل (I,J) می‌نامیم و خواص گوناگون آن را مطالعه خواهیم کرد. در نظر می گیریم کـه R یک حلقه نوتری تعویضپذیر و I و J ایده‌آلهای حلقه R باشند. در این پایان نامه مجموعه

$$W(I,J)=\{P\in Spec\ (R) \mid I^{n}\subseteq P+J \quad for \quad n\geq 1\}$$

از Spec(R) توجه ما را به خود جلب می کند .(تعریف ۲-۹ و نتیجه ۲-۱۲ را ببینید.) درواقعً W(I, J) تحت حالت خاص بسـته است اما لزوماً زیر مجموعه‌ی بسته از Spec(R) نمی‌باشد. برای هر R– مدول M، $\Gamma_{I,J}$ ، زیر مدول (I,J)- تاب از مدول M است که شامل همه ی عناصر x از M بـا شـرط $Supp(Rx)\subseteq W(I,J)$ مـی باشـد. بنـابراین بـرای هـر عـدد صـحیح i، تـابعگون کوهمولوژی موضعی $H^{i}_{I,J}$ رانسبت به(I,J) را به عنوان i-امین تابعگون مشتق شده راست از $\Gamma_{I,J}$ تعریف می کنیم. $H^{i}_{I,J}(M)$ را i– امین مدول کوهمولوژی موضعی نسبت به (I,J) می‌نامیم.(تعاریف ۲-۱ و ۲-۷ را ببینید.) . توجه کنید که اگر J=0 می‌باشـد در اینصورت $H^{i}_{I,J}$ با تابعگون کوهمولوژی موضعی H^{i}_{I} با زیرمجموعه بسته V(I) منطبق خواهدبود. از طرف دیگر، اگر J شامل I باشد. در اینصورت به سادگی می‌توان نشان داد که $\Gamma_{I,J}$، تابعگون همانی است و برای هر $i\rangle 0$ ، $H^{\ i}_{I,J} = 0$. بنـابر ایـن می‌توانیم تابعگون کوهمولوژی موضـعی $H^{i}_{I,J}$ را بـه عنـوان خـانواده‌ای از تـابعگون هـا بـا پـارامتر J در نظربگیـریم، کـه تـابعگون کوهمولوژی معمولی H^{i}_{I} را به صورت بدیهی ارتباط می‌دهد.

در این پای‌ان نامه تلاش خواهیم کرد که هرمبحث مرتبط با کوهمولوژی موضعی معمولی را به کوهمولوژی موضعی $H^{i}_{I,J}$ تعمیم دهیم. یکی از موضوعات اصلی، صفرشدن و صفرنشدن از $H^{i}_{I,J}(M)$ می‌باشد که در فصل پنجم به آن اشاره می‌کنیم و در واقع هسته اصلی پایان نامه در این فصل قرار گرفته شده است .

فصل‌بندی این رساله بدین گونه است:

پس از یادآوری مطالب و مقدمات در فصل صفر و فصل اول ، به بررسی ویژگی‌های اساسی تابعگون کوهمولوژی موضعی $H^i_{I,J}$ و زیرمجموعه W(I,J) از Spec(R) در فصل دوم پرداخته و پس از بررسی فصل دوم ، در فصل سوم ، تعمیمی از هم بافت‌های چک را معرفی می‌کنیم. در حقیقت نشان می‌دهیم که مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به (I,J)، از مدولهای کوهمولوژی هم بافت‌های تعمیم یافته چک ، بدست آمده‌اند. در فصل چهارم ، برخی از روابط بین تابعگون کوهمولوژی $H^i_{I,J}$ را با تابعگون کوهمولوژی موضعی معمولی را نشان خواهیم داد.

فصل پنجم که در حقیقت قسمت اصلی پایان نامه می‌باشد، قضایای صفر شدن و صفر ناشدن برای $H^i_{I,J}$ بحث خواهد شد و علاقمند هستیم که قضیه صفر نشدن گروتندیک[1] (قضیه ۵-۵) را تعمیم دهیم. در واقع یکی از قضایای اصلی، از این تساوی زیر به دست آمده است.

$$\inf\left\{i \;\middle|\; H^i_{I,J}(M)\neq 0\right\}=\inf\left\{depthM_P \;\middle|\; P\in W(I,J)\right\}$$

که برای یک مدول با تولید متناهی M برقرار است (قضیه ۵-۱) .

در پایان متذکر میشویم که در سراسر پایان نامه R حلقه تعویضپذیر،یکدارو نوتری فرض شده است .

1 - Grothendieck

فصل اول

مقدمات و مطالب پیش نیاز

در این فصل برخی از مطالب مورد نیاز برای موضوعات مطرح شده در پایان‌نامه به صورت تعاریف و قضایا آورده می‌شوند.

در این فصل از پایان نامه ، R- نمایش یک حلقه تعویض‌پذیر و یکدار بوده و از ابتدای فصل دوم تا انتهای پایان نامه شرط نوتری بودن R را به شرط حلقه ی تعویض پذیر و یکدار اضافه می نماییم .

۱-۱ : مطالبی از جبرجابجایی

تعریف ۱-۱-۱ : فرض کنیم R یک حلقه باشد و $S \subseteq R$، S را زیر مجموعه ضربی بسته می‌نامیم هرگاه،

آ) $1_R \in S$؛

ب) به ازای هر $r, s \in S$ داشته باشیم $rs \in S$ ؛

مثال ۱-۱-۲ : به ازای هر $P \in Spec(R)$ مجموعه $R - P = \{x \in R : x \notin P\}$ ضربی بسته است.

نمادگذاری و لم ۱-۱-۳ : فرض کنید I یک ایده‌آل حلقه تعویض‌پذیر R باشد. واریته I که با نماد Var(I) نشان داده می‌شود برابر با مجموعه $\{P \in Spec(R) : P \supseteq I\}$ تعریف می‌شود. در این صورت:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in Var(I)} P$$

برهان : ر.ک. [۱۶، گزاره۳-۴۸] .

نتیجه ۱-۱-۴ : رادیکال پوچ حلقه تعویض‌پذیر R که آن را با نماد $\sqrt{0}$ نیز نشان می‌دهند، برابر است با

$$\sqrt{0} = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$$

برهان : این مطلب بلاواسطه از (۱-۱-۳) نتیجه می‌شود زیرا هر ایده‌آل اول R شامل ایده‌آل صفر است.

قضیه و تعریف ۱-۱-۵ : فرض کنید I ایده‌آل سره حلقه تعویضپذیر R باشد. در این صورت Var(I) دست‌کم یک عضو مینیمال نسبت به رابطه مشمولیت دارد. عضوهای مینیمال Var(I) را ایده‌آل‌های اول مینیمال I یا ایده‌آل‌های اول مینیمال شامل I می‌نامیم. اگر R ناصفر باشد ایده‌آل‌های اول مینیمال ایده‌آل صفر R را گاه ایده‌آل‌های اول مینیمال R می‌نامیم. مجموعه تمام ایده آل های اول مینیمال I را با Min (I) نشان می دهیم .

برهان : ر.ک [۱۶، ۳-۵۲. صفحه] .

نتیجه ۱-۱-۶ : فرض کنید I ایده‌آل سره حلقه تعویض‌پذیر R باشد . در این صورت

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in Min(I)} P$$

برهان : ر.ک. [۱۶، نتیجه ۳-۵۴] .

تعریف ۱-۱-۷ : فرض کنید M یک R- مدول باشد در این صورت $r \in R$ را یک مقسوم علیه صفر M در R می‌نامیم هرگاه $0 \neq m \in M$ وجود داشته باشد که $rm = 0$. مجموعه مقسوم علیه‌های صفر M را با $Z_R(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۸ : فرض کنید Q ایده‌آلی از حلقه تعویض‌پذیر R باشد. می‌گوییم Q ایده‌آل ابتدایی R است اگر:

یک) $Q \subset R$، یعنی Q ایده‌آل سره‌ی R باشد،

دو) هرگاه $a,b \in R$ و $ab \in Q$ ولی $a \notin Q$، آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $b^n \in Q$.

شرط (دو) را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد: از $a,b \in R$ و $ab \in Q$ نتیجه می‌شود که $a \in Q$ یا $b \in \sqrt{Q}$.

لم و تعریف ۱-۱-۹ : فرض کنید Q یک ایده‌آل ابتدایی حلقه تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت $P := \sqrt{Q}$ ایده‌آل اول R است .در این حالت می گوییم Q، P- ابتدایی است.

با نمادهای تعریف (۱-۱-۹) ، P کوچکترین ایده‌آل اول R است که Q را شامل می‌شود، زیرا هر ایده‌آل اول R که شامل Q باشد باید P را نیز شامل شود. لذا (۱-۱-۴ را ببینید) P ایده‌آل اول مینیمال منحصر به فرد Q است.

تعریف ۱-۱-۱۰ : فرض کنیم که $f : M \to N$ یک همریختی مدول ها باشد و $S \subset R$ ضربی بسته باشد تعریف می کنیم،

$$S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N .$$

در این صورت $S^{-1}f$ یک $S^{-1}R$ همریختی است.

قضیه ۱-۱-۱۱ : فرض کنیم L ، M و N مدول هایی روی حلقه R و S زیر مجموعه ضربی بسته باشد. فرض کنید $f, f' : L \to M$ و $g : M \to N$ ، R- همریختی باشند در این صورت،

۱) $S^{-1}(f + f') = S^{-1}f + S^{-1}f'$،

۲) $S^{-1}(gof) = S^{-1}g \ o \ S^{-1}f$،

۳) $S^{-1}(Id_M) = Id_{S^{-1}M}$، که در آن Id_M، R- همریختی همانی M است،

۴) $S^{-1}\left(\dfrac{M}{N}\right) = \dfrac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$،

۵) اگر f یکریختی باشد آنگاه $S^{-1}f$ نیز یکریختی است.

برهان: ر.ک .[۱۶ ، قضیه ۸-۹] .

قضــیه ۱-۱-۱۲ : فـرض مـی کـنـیم دنبالـه $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ دنبالـه ای دقیـق باشـد. در ایـن صـورت دنبالـه، $S^{-1}L \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N$ نیز دقیق است.

برهان: ر.ک .[۱۶ ، قضیه ۹-۹] .

تعریف ۱-۱-۱۳ : فرض کنیم M یک R- مدول باشد در این صورت، تکیه گاه M روی R را بـا $Supp\left(M\right)$ نشـان داده و آن را بصورت

$$Supp(M)=\{P \in Spec(R): M_P \neq 0\}$$

تعریـف مـی کنـیم . بـدیهی اسـت $P \in Supp(M)$ اگـر و تنهـا اگـر $0 \neq m \in M$ موجـود باشـد کـه داشـته باشـیم $\left(0 \underset{R}{:} m\right) \subset P$.

تعریف ۱-۱-۱۴ : فرض می کنیم R حلقه ای نوتری و M یک R- مدول باشد. در این صـورت، مجموعـه ایـده‌آل هـای اول وابسته به M را با $Ass(M)$ نشان داده و آن را به صورت

$$Ass(M)=\{ P \in Spec(R): \quad P=\left(0 \underset{R}{:} m\right) \text{ به ازای } m \text{ ای}\}$$

تعریف می کنیم .

قضیه ۱-۱-۱۵ : اگر M یک R- مدول باشد آنگاه،

$$Z(M)=\bigcup_{P \in Ass(M)} P$$

برهان: ر.ک .[۱۶ ، قضیه ۹-۳۶] .

قضیه ۱-۱-۱۶ : اگر M یک R- مدول نوتری باشد آنگاه $Ass(M)$ یک مجموعه متناهی است.

لم ۱-۱-۱۷ : فرض کنید M مدولی روی حلقه تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت گزاره های زیر معادل‌اند:

یک) $M=0$؛

دو) به ازاء هر $P \in Spec(R)$، $M_p=0$، یعنی $Supp(M)=\phi$؛

سه) به ازاء هر ایده‌آل ماکسیمال $\underline{m}$ از R، $M_{\underline{m}}=0$.

برهان: ر.ک .[۱۶، لم ۹-۱۵] .

تذکر ۱-۱-۱۸ : فرض کنید R حلقه تعویض‌پذیر و دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

دنباله‌ای دقیق از R- مدول‌ها و R- همریختی‌ها باشد. در این صورت

$$Supp(M) = Supp(L) \cup Supp(N)$$

برهان: ر.ک . [۱۶، تمرین ۹-۱۹] .

لم ۱-۱-۱۹ : فرض کنید M مدولی با تولید متناهی روی حلقه تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت

$$Supp(M) = \left\{ P \in Spec(R) : P \supseteq (0 \underset{R}{:} M) \right\} = Var\left(Ann(M) \right)$$

برهان: ر.ک. [۱۶، لم ۹-۲۰] .

تذکر ۱-۱-۲۰ : فرض کنید M مدولی روی حلقه تعویضپذیر نوتری R باشد در این صورت $Ass(M) \neq \phi$ اگر و تنها اگر $M \neq 0$.

برهان : ر. ک [۱۶، نتیجه ۹-۳۵] .

قضیه ۱-۱-۲۱ : فرض کنید M مدولی روی حلقه تعویض‌پذیر نوتری R باشد در این صورت $Ass(M) \subseteq Supp(M)$ و هر عضومینیمال $Supp(M)$ (نسبت به رابطه مشمولیت) متعلق به $Ass(M)$ است.

برهان: ر. ک [۱۶، قضیه ۹. ۳۹] .

تذکر ۱-۱-۲۲ : فرض کنید M مدولی با تولید متناهی و ناصفر روی حلقه تعویض‌پذیر نوتری R باشد. در اینصورت زنجیری صعودی مانند

$$M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n$$

از زیر مدول‌های M وجود دارد که $M_0 = 0$ و $M_n = M$ و بـه ازای هـر $i = 1,\ldots,n$ ایـده‌آلـی چـون $P_i \in Spec(R)$ وجود دارد که $\frac{M_i}{M_{i-1}} \cong \frac{R}{P_i}$.

برهان : ر. ک [۱۶، تمرین ۹-۴۰] .

نکته ۱-۱-۲۳ : فرض کنید R حلقه تعویض‌پذیر نوتری و دنباله

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

دنباله‌ای دقیق کوتاه از R- مدول‌ها و R- همریختی‌ها باشد. در اینصورت

$$Ass(L) \subseteq Ass(M) \subseteq Ass(L) \cup Ass(N)$$

ر. ک [۱۶، تمرین ۹. ۴۲] .

لم ۱-۱-۲۴ : فرض کنید M یک R- مدول از حلقه تعویض‌پذیر R باشد و I ایده‌آل از R باشد. در این صورت

$$Supp\left(\frac{M}{IM}\right)=Supp(M)\cap Var(I)$$

برهان : فرض کنیم که $P\in Supp\left(\frac{M}{IM}\right)$ باشد در این صورت $\left(\frac{M}{IM}\right)_P\neq 0$ و بنـابراین $\frac{M_P}{IR_PM_P}\neq 0$. در نتیجـه $\frac{S^{-1}M}{(S^{-1}I)(S^{-1}M)}\neq 0$ و بنــابراین $M_P\neq 0$ و $IR_P\neq R_P$ ، در نتیجــه $P\in Supp(M)$ و $P\supseteq I$ ، در نتیجــه $P\in Var(I)$. بنابراین $P\in Supp(M)\cap Var(I)$. درنتیجه

$$Supp\left(\frac{M}{IM}\right)\subseteq Supp(M)\cap Var(I)$$

فرض کنیم که $P\in Supp(M)\cap Var(I)$ باشد بنابراین $P\in Supp(M)$ و $P\supseteq I$. بنابراین $M_P\neq 0$ و چـون $P\supseteq I$ است بنابراین $I\cap P\neq\phi$ و در نتیجه $I\cap S=\phi$ ، لذا $IR_P\neq R_P$ و بنـابراین $\frac{S^{-1}M}{(S^{-1}I)(S^{-1}M)}\neq 0$ و در نتیجه $S^{-1}\left(\frac{M}{IM}\right)\neq 0$ و بنابراین $\left(\frac{M}{IM}\right)_P\neq 0$.لذا $P\in Supp\left(\frac{M}{IM}\right)$. لذا

$$.\ Supp\left(\frac{M}{IM}\right)\supseteq Supp(M)\cap Var(I)$$

لم ۱-۱-۲۵ : لم آرتین ــ ریس[1]

فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R- مدول با تولید متناهی باشد. فرض کنید N زیر مدولی از M و I ایـده‌آلـی از R باشد . در این صورت $c\in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که برای هر $n>c$،

$$I^nM\cap N=I^{n-c}\left(I^cM\cap N\right)$$

برهان : ر.ک[۱۱] .

لم ۱-۱-۲۶ : فرض کنید R یک حلقه تعویض‌پذیر نوتری باشد و M یک R- مدول با تولید متناهی باشـد. در اینصـورت بـه ازای هر ایده آل J از R ،

$$Supp\left(\frac{M}{J^nM}\right)=Supp\left(\frac{M}{JM}\right)$$

1- Artin – Rees Lemma

برهان: فرض کنید که $P \in Supp\left(\frac{M}{J^n M}\right)$ باشد. بنابراین $\left(\frac{M}{J^n M}\right)_P \neq 0$ در نتیجه $\left(M \otimes \frac{R}{J^n}\right)_P \neq 0$

(زیرا $\frac{M}{J^n M} \cong M \otimes \frac{R}{J^n}$) و بنابراین $M_P \neq 0$. فرض کنید که $P \notin Supp \frac{M}{JM}$. در این صورت $\left(\frac{M}{JM}\right)_P = 0$

و در نتیجه $M_P = (JM)_P$. در نتیجه چون M با تولید متناهی است لذا بنا به لم ناکایاما $M_P = 0$ که این تناقض است.

لذا $Supp\left(\frac{M}{JM}\right) \subseteq Supp\left(\frac{M}{J^n M}\right)$.

فرض کنید که $p \in Supp\left(\frac{M}{JM}\right)$ باشد بنابراین $\left(\frac{M}{JM}\right)_p \neq 0$، لذا $\left(M \otimes \frac{R}{J}\right)_p \neq 0$ و $M_p \neq 0$. اگر فرض

کنید که $p \notin Supp \frac{M}{J^2 M}$ باشد در این صورت $\left(\frac{M}{J^n M}\right)_p = 0$ و در نتیجه $M_p = (J^n M)_p$ و بنابراین بنا به لم

ناکایاما $M_p = 0$ که این تناقض است.

قضیه ۱-۱-۲۷ : فرض کنید $P, Q \in Spec(R)$ باشد. در این صورت:

۱) اگر $r \in R - P$ باشد، در این صورت نگاشت ضرب در r یک خودریختی روی $E\left(\frac{R}{P}\right)$ است؛

۲) $P = Q \Leftrightarrow E\left(\frac{R}{P}\right) \cong E\left(\frac{R}{Q}\right)$؛

۳) $Ass\left(E\left(\frac{R}{P}\right)\right) = \{P\}$؛

برهان: ر.ک [۴، گزاره ۸-۳-۳].

تعریف ۱-۱-۲۸ : فرض کنید R یک حلقه و M یک R– مدول باشد، عضو $a \in R$ را M– منظم گویند هر گاه برای هر $0 \neq x \in M$، $ax \neq 0$.

تعریف ۱-۱-۲۹ : فرض کنید $(R, \underline{m})$ حلقه‌ای موضعی با بعد r باشد. منظور از یک دستگاه از پارامترهای R، مجموعه‌ای از r عضو R است که یک ایده‌آل $\underline{m}$ – اولیه تولید می‌کند. یعنی اگر $a_1, a_2, \ldots, a_r \in R$ باشند در این صورت اگر $I = < a_1, \ldots, a_r >$ یک ایده آل $\underline{m}$ – اولیه باشد، آنگاه $\{a_1, \ldots, a_r\}$ یک دستگاه از پارامترها از R نامیده می شود ، که در آن $\dim R = r$ می باشد .

تعریف ۱-۱-۳۰ : اگر $(R,\underline{m})$ حلقه‌ای موضعی و M یک R– مدول متناهی با $\dim M = s$ باشد در این صورت $y_1, y_2, \dots, y_s \in \underline{m}$ وجود دارند که $l\left(\frac{M}{<y_1,\dots,y_s>M}\right) < \infty$. در این صورت $\{y_1,\dots,y_s\}$ را یک دستگاه پارامتر از M گویند.

نکته ۱-۱-۳۱ : هر گاه $Var(A) \subseteq Var(B)$ باشد، آنگاه $\sqrt{B} \subseteq \sqrt{A}$.

برهان: فرض کنیم که $P \in Var(A)$ باشد پس $P \in Var(B)$، لذا هر ایده‌آل اولی که A را دربر دارد، B را نیز دربر دارد. از طرفی $\sqrt{A} = \bigcap_{P \supseteq A} P$ و با توجه به اینکه $P \supseteq A$، $\bigcap_{P \supseteq A} P \subseteq \bigcap_{P \supseteq B} P$ و در نتیجه $\sqrt{B} \subseteq \sqrt{A}$.

۱-۲ : تابعگون و معرفی دستگاه مستقیم و حدمستقیم

تعریف ۱-۲-۳۲ : فرض کنیم $\mathcal{C}$، $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. منظور از یک تابعگون هموردا $F:\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ عبارت است از،

۱)تابعی از $obj(\mathcal{C})$ به $obj(\mathcal{D})$،

۲)تابعی از مورفیسم های $\mathcal{C}$ به مورفیسم های $\mathcal{D}$ به طوری که به ازای هر $A, B \in obj(\mathcal{C})$ و $f: A \to B$ آنگاه، $F(f): F(A) \to F(B)$ یک مورفیسم در $\mathcal{D}$ باشد.

همچنین به ازای هر $A, B, C \in obj(\mathcal{C})$ و هر $f \in Hom(A,B)$, $g \in Hom(B,C)$ داشته باشیم،

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

و همچنین، $F(id_A) = id_{F(A)}$.

تعریف ۱-۲-۳۳ : مجموعه مرتب جزیی $(D,\leq)$ را یک مجموعه جهت دار گوییم هرگاه به ازای هر $\alpha, \beta \in D$ یک $\gamma \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

تعریف ۱-۲-۳۴ : فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک کتگوری و D یک مجموعه جهت دار باشد. منظور از یک دستگاه مستقیم، تابعگونی است چون F، $F: D \longrightarrow \mathcal{C}$ به طوری که به ازای هر $i \in D$، $F(i) = F_i$.

به عبارت دیگر هرگاه ،

۱) به ازای هر $i, j \in D$, $i \leq j$ مورفیسم روبرو را داشته باشیم: $\pi_{ji}: F_i \longrightarrow F_j$

۲) اگر $i = j$، آنگاه $\pi_{ii}: F_i \to F_i$ همانی باشد.

۳) اگر $i \leq j \leq k$ ، آنگاه دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r, "\pi_{ji}"] \arrow[d, "\pi_{ki}"'] & F_j \arrow[dl, "\pi_{kj}"] \\ F_k & \end{tikzcd}$$

مثال ۱-۲-۳۵ : فرض کنیم M یک R- مدول باشد و $\mathcal{C}$ گردایه تمام زیر مدول های با تولید متناهی M باشد در این صورت $\mathcal{C}$ یک دستگاه مستقیم است.

تعریف ۱-۲-۳۶ : فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته باشد و $\{A_i, \pi_{ji}\}_{i \leq j}$ یک دستگاه مستقیم از اشیا $\mathcal{C}$ باشد . شیء $A_\infty \in \mathcal{C}$ با مورفیسم‌هایی که از $A_i \xrightarrow{\pi_i} A_\infty$ تعریف می شوند یک حد مستقیم برای دستگاه مستقیم نامیده می شود ، اگر به ازای هر $i \leq j$ نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} A_\infty & \\ A_i \arrow[u, "\pi_i"] \arrow[r, "\pi_{ji}"'] & A_j \arrow[ul, "\pi_j"'] \end{tikzcd}$$

و به ازای $X \in \mathcal{C}$ و مورفیسم‌های $\theta_i : A_i \to X$ که نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} & X \\ A_i \arrow[ur, "\theta_i"] \arrow[r, "\pi_{ji}"'] & A_j \arrow[u, "\theta_j"'] \end{tikzcd}$$

مورفیسم یکتایی چون $\varphi : A_\infty \to X$ وجود دارد که نمودار زیر جابجایی می شود.

$$\begin{tikzcd} A_\infty \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & X \\ A_i \arrow[u, "\pi_i"] \arrow[urr, "\theta_i"'] \arrow[rr, "\pi_{ji}"'] & & A_j \arrow[ull, "\pi_j"] \arrow[u, "\theta_j"'] \end{tikzcd}$$

مثال ۱-۲-۳۷ : فرض کنیم M یک R- مدول و D، مجموعه جهت دار باشد و به ازای هر $\alpha,\beta \in D$ ، $\alpha \leq \beta$، $M_\alpha \subseteq M_\beta$ و $\pi_{\beta\alpha} : M_\alpha \xrightarrow{\subseteq} M_\beta$ نگاشت شمول باشد. در این صورت $\{M_\alpha, \pi_{\beta\alpha}\}_{\alpha \leq \beta}$ یک دستگاه مستقیم روی D است و $\varinjlim_{\alpha\in D} M_\alpha = \bigcup_{\alpha\in D} M_\alpha$.

قضیه ۱-۲-۳۸ : حد مستقیم از یک دستگاه مستقیم در رسته R- مدول ها موجود و یکتاست.

برهان: ر.ک. [۲،۱۴-۱۶] .

قضیه ۱-۲-۳۹ : آ) فرض کنیم D یک مجموعه جهت دار باشد برای هر $m_\infty \in M_\infty$ ، یک $\alpha \in D$ و $m_\alpha \in M_\alpha$ وجود دارد به طوری که $\pi_\alpha(m_\alpha) = m_\infty$.

ب) فرض کنیم $m_\infty \in M_\infty$ بنا بر (آ) می‌دانیم که یک $\alpha \in D$ و $m_\alpha \in M_\alpha$ وجود دارند که $m_\infty = \pi_\alpha(m_\alpha)$. حال اگر فرض کنیم $m_\infty = ۰$ آنگاه وجود دارد $\beta \in D$ به طوری که $\beta \geq \alpha, \pi_{\beta\alpha}(m_\alpha) = ۰$

ر.ک. [۲،۱۴-۱۷] .

تعریف ۱-۲-۴۰ : فرض کنیم $\{M_\alpha, \pi_{\beta\alpha}\}, \{N_\alpha, \gamma_{\beta\alpha}\}$ دو دستگاه مستقیم روی مجموعه جهت دار D باشند و فرض کنیم به ازای هر $\alpha \in D$، $\varphi_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N_\alpha$ یک مورفیسم باشد، در این صورت یک نگاشت $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha\in D} : \{M_\alpha, \pi_{\beta\alpha}\} \longrightarrow \{N_\alpha, \gamma_{\beta\alpha}\}$ را یک مورفیسم بین دستگاه‌های مستقیم گویند هرگاه برای هر α و β در Dکه $\alpha \leq \beta$ نمودار زیر جابجا شود.

$$\begin{tikzcd}
M_\alpha \arrow[r, "\pi_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] & M_\beta \arrow[d, "\varphi_\beta"] \\
N_\alpha \arrow[r, "\gamma_{\beta\alpha}"'] & N_\beta
\end{tikzcd}$$

قضیه ۱-۲-۴۱ : فرض کنیم که $\{M_\alpha, \pi_{\beta\alpha}\}_{\alpha\leq\beta}, \{N_\alpha, \gamma_{\beta\alpha}\}_{\alpha\leq\beta}$ دو دستگاه مستقیم روی مجموعه جهت دار D بوده و $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha\in D} : \{M_\alpha, \pi_{\beta\alpha}\} \to \{N_\alpha, \gamma_{\beta\alpha}\}$، یک مورفیسم بین دو دستگاه مستقیم باشد. در این صورت مورفیسم یکتایی به صورت زیر وجود دارد:

$$\varphi_\infty : \varinjlim_{\alpha\in D} M_\alpha \longrightarrow \varinjlim_{\alpha\in D} N_\alpha$$

به طوری که به ازای هر α, βدر D که $\alpha \leq \beta$،نمودار زیر جابجایی می باشد.

$$\begin{tikzcd} M_\infty \arrow[r, "\varphi_\infty"] & N_\infty \\ M_\alpha \arrow[u] \arrow[r, "\varphi_\alpha"'] & N_\alpha \arrow[u] \end{tikzcd}$$

برهان: ر.ک. [۱۹، ۴-۲۴].

تعریف۱-۲-۴۲ : فرض کنیم $\{M_\alpha, \pi_{\beta\alpha}\}$، $\{N_\alpha, \gamma_{\beta\alpha}\}$، $\{P_\alpha, \theta_{\beta\alpha}\}$ دستگاه های مستقیم روی مجموعه جهت دار D باشند گوییم $\{M_\alpha, \pi_{\beta\alpha}\} \xrightarrow{\varphi} \{N_\alpha, \gamma_{\beta\alpha}\} \xrightarrow{\psi} \{P_\alpha, \theta_{\beta\alpha}\}$ دقیق است اگر به ازای هر $\alpha \in D$، $M_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} N_\alpha \xrightarrow{\psi_\alpha} P_\alpha$ دقیق باشد.

قضیه ۱-۲-۴۳ : تابعگون حد مستقیم از رسته دستگاه های مستقیم R- مدول ها به رسته R- مدول ها یک تابعگون دقیق است.

برهان: ر.ک. [۱۴، ۲-۱۸].

تعریف ۱-۲-۴۴ : فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته و D یک مجموعه جهت دار باشد. منظور از یک دستگاه معکوس در $\mathcal{C}$ با مجموعه اندیس D، یک تابعگون پادورد $F: D \to \mathcal{C}$ است. به عبارت دیگر برای هر $i \in D$ ، یک شیء F_i در $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد و برای هر $i, j \in D$ ، $i \leq j$ یک مورفیسم $\pi_{ij}: F_j \to F_i$ داشته باشیم به طوری که :

۱) برای هر $i \in D$، $\pi_{ii}: F_i \to F_i$ همانی باشد.

۲) اگر $i \leq j \leq k$، آنگاه نمودار جابجایی زیر وجود داشته باشد.

$$\begin{tikzcd} F_j \arrow[d, "\pi_{ij}"'] & \\ F_i & F_k \arrow[l, "\pi_{ik}"] \arrow[ul, "\pi_{jk}"'] \end{tikzcd}$$

نکته ۱-۲-۴۵ : فرض کنیم S یک حلقه باشد و $T: \mathcal{C}(R) \longrightarrow \mathcal{C}(S)$ (که در آن $\mathcal{C}(R)$ رسته R- مدول ها و $\mathcal{C}(S)$ رسته S- مدول هاست) یک تابعگون هموردا باشد و $\{M_\alpha, \pi_{\beta\alpha}\}_{\alpha \leq \beta}$ یک دستگاه مستقیم روی مجموعه جهت دار D باشد.