

کاربرد معادله فوکر-پلانک تعمیم یافته برای تعدادی
از سیستم های کوانتومی غیر خطی

چکیده

برای بررسی معادله فوکر-پلانک لازم است که معادلات دیفرانسیل حاکم بر متغیرهای سیستم را حل کنیم. روش‌های معمول برای بدست آوردن معادلات دیفرانسیل مربوط به معادلات فوکر-پلانک با دو جمله است. بررسی معادله فوکر-پلانک تعمیم یافته با جملات از مرتبه بالاتر توسط پلیماک و همکارانش انجام شده است. در این پایان نامه ما ضمن بررسی این روش آن را برای حل هامیلتونی بوز هابارد دو ترازه که برای اولین بار معرفی کرده ایم به کار می‌بریم.

فهرست

فصل اول	مقدمه	۴
فصل دوم	فرآیندهای تصادفی	۶
۱-۲	حرکت براونی	۶
۱-۱-۲	رهیافت اینشتین	۷
۲-۱-۲	رهیافت لانژوین	۱۰
۳-۱-۲	رهیافت وینر	۱۲
۲-۲	فرمول ایتو و معادلات دیفرانسیل تصادفی	۱۴
۱-۲-۲	معادلات دیفرانسیل تصادفی	۱۴
۲-۲-۲	اثبات رابطه $dW \approx (dt)^2$	۱۵
۳-۲-۲	فرمول ایتو	۱۷
۳-۲	معادله فوکر-پلانک	۱۸
۱-۳-۲	معادله فوکر-پلانک تعمیم یافته	۱۹
۲-۳-۲	نظریه ی پاؤلا	۲۱
۴-۲	ارتباط بین معادلات دیفرانسیل تصادفی و معادله فوکر-پلانک	۲۲
۱-۴-۲	معادله فوکر-پلانک مرتبه ی سوم	۲۳
فصل سوم	رهیافت نظریه میدان های کوانتومی به روش های فضای فاز	۲۵
۱-۳	توابع توزیع کوانتومی	۲۵
۱-۱-۳	تابع توزیع P - مثبت	۲۸
۲-۳	محاسبه ی معادلات دیفرانسیل تصادفی با رهیافت نظریه میدان های کوانتومی	۲۹

۲۹ نظریه ی میدان های کوانتومی نوسانگر " کر "
۳۰ عملگرهای نظم زمانی
۳۱ تابع مشخصه
۳۶ نظریه واکنش
۳۸ تابع مشخصه برای میدان غیر عملگری
۴۳ فرمول بندی کلی
۴۴ چند مثال
۴۷ فصل چهارم مدل بوز-هابارد دو ترازی
۴۷ ۱-۴ هامیلتونی بوز-هابارد دو ترازه
۵۱ ۲-۴ روش تقریب میدان متوسط
۵۸ ۳-۴ معادلات فضای فاز کوانتومی برای هامیلتونی بوز-هابارد دو ترازه
۶۱ نتیجه گیری
۶۲ منابع

فصل اول

مقدمه

بیشتر سیستم های کوانتومی غیرخطی بدون برخی تقریبهای خاص دارای جوابهای تحلیلی نیستند. این امر باعث از دست دادن مقداری از اطلاعات فیزیکی مسئله میشود. در چنین شرایطی بررسیهای عددی میتواند گزینه ای راه گشا باشد. برای سیستمهای تعادلی روشهایی تحت عنوان مونت کارلو کوانتوم^۱ شناخته شده و مورد استفاده قرار میگیرند. روش فضای فاز نیز، به خصوص در اپتیک کوانتومی^۲، از روش های پر کاربرد و مفید است. شبیه سازیهای تصادفی با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی در فضای فاز، ابزار محاسباتی مفیدی در پدیده های تصادفی کوانتومی^۳ میباشد.

روش معمول برای بدست آوردن معادلات دیفرانسیل تصادفی سیستم بر پایه دوگانگی شناخته شده بین معادلات فوکر-پلانک^۴ و معادلات لانژوین^۵ است [۲]. ریشه این دوگانگی نیز به حرکت براوونی مربوط بوده است که توسط اینیشتین و لانژوین از دو منظر متفاوت بررسی شده است [۲، ۱]. نکته ای که در این روش مورد تأکید است وجود معادله فوکر-پلانک از مرتبه دوم است. همانطور که خواهیم دید معادلات دیفرانسیل تصادفی برای معادله فوکر-پلانک تعمیم یافته وجود ندارند [۳]. از طرفی مسائلی در کوانتوم مکانیک وجود دارند که دارای معادله فوکر پلانک از مرتبه ی سوم هستند، برای مثال سیستم های سه فوتونی از این دست هستند [۴].

بررسی چنین سیستمهایی مستلزم وجود روشی متفاوت برای بدست آوردن معادلات دیفرانسیل تصادفی است. این روش توسط پلیماک^۶ و همکارانش در سال ۲۰۰۳ ابداع شد [۱]. این روش که بر

¹ Quantum Monte Carlo

² Quantum Optics

³ Quantum Stochastics

⁴ Fokker-Planck

⁵ Langevin Equations

⁶ L. I. Plimak

اصول نظریه میدان های کوانتومی استوار است مستقل از معادله فوکر-پلانک به طور مستقیم معادلات دیفرانسیل تصادفی^۱، را نتیجه می دهد. ویژگی این روش این است که معادلات دیفرانسیل تصادفی برای نوفه های مرتبه های بالاتر نیز بدست می آید. تنها مسئله ای که در اینجا وجود دارد این است که برای مرتبه های سوم و بالاتر بجای SDE ، $S\Delta E$ ^۲ بدست می آید. یعنی در معادلات دیفرانسیل بجای dt ، Δt بوده و بازه های زمانی محدود می شوند. با توجه به اینکه در نهایت معادلات باید بصورت عددی حل شوند و در حل عددی به ناچار بازه های زمانی محدود در نظر گرفته می شوند این محدودیت عملاً مشکلی ایجاد نمی کند. از دیگر ویژگیهای روش فوق سادگی آن است. البته در مقاله ی پلیماک این روش فقط برای توابع توزیع P- نرمال بررسی شده است [۱]. بررسی اولیه تابع توزیع ویگنر نیز توسط این گروه انجام شده اما هنوز به چاپ نرسیده است [۵].

در فصل دوم این پایان نامه به بررسی فرآیندهای تصادفی و معادله لانژوین و فوکر-پلانک می پردازیم. در فصل سوم روشی جدید برای محاسبه معادلات دیفرانسیل تصادفی توضیح داده شده و مثالهایی مطرح میشوند. در فصل چهارم به بررسی هامیلتونی بوز-هابارد^۳ برای حالت دو ترازه اختصاص دارد. در ابتدا با روش تقریب میدان متوسط این هامیلتونی را بررسی و سپس با استفاده از روش معرفی شده در فصل سوم معادلات دیفرانسیل آن بدست می آیند. در آخرین فصل نیز نتیجه گیری آورده شده است.

¹ Stochastic Differential Equation(SDE)

² Stochastic Difference Equation

³ Bose-Hubbard

فصل دوم

فرآیندهای تصادفی

تا اواخر قرن نوزدهم مطالعه‌ی علوم نظری بر پایه‌ی جوابهای معادلات دیفرانسیل و ساخت مدلهایی بر اساس این جوابها بود. در آن زمان نظر بر این بود که با شناختن شرایط اولیه سیستم می توان آینده‌ی سیستم را به طور دقیق پیشگویی کرد [۲]. اما اکنون ما می دانیم که این دیدگاه حداقل از دو منظر کاملاً غیر قابل پذیرش می باشد. اول، گسترش مکانیک کوانتومی در ربع اول قرن بیستم بود که نتایج احتمالاتی داشت. دوم، مفهوم آشوب بود که کمی متأخرتر گسترش یافت. در واقع حتی ساده ترین سیستمها نیز دارای ویژگیهای آشوبناکی هستند که پیشگویی دقیق را عملاً غیر ممکن می سازند [۲].

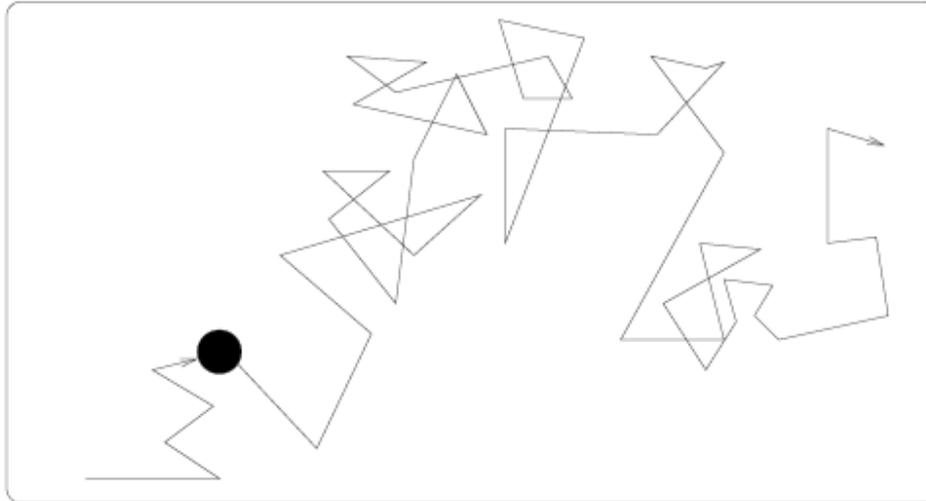
در ادامه به بررسی نظریه هاس پدیده شناختی در مورد فرآیندهای تصادفی با محوریت حرکت براونی می پردازیم.

۱-۲ حرکت براونی^۱

مشاهده‌ی حرکت کاتوره ای ذرات کوچک درون آب در زیر میکروسکوپ پدیده ای بود که از دیر باز مورد توجه قرار گرفته بود. تصور اولیه در مورد این حرکت این بود که ذرات ریز معلق در آب موجودات زنده‌ی کوچکی هستند که به اطراف حرکت می کنند [۶]. در سال ۱۸۲۷، رابرت براون^۲ زیست شناس معروف انگلیسی در پی تحقیقات خود روی این ذرات و نوع حرکت کاتوره ای آنها متوجه شد که ذرات بی جان و غیر ارگانیک نیز شامل این نوع حرکت می شوند. براون همچنین مشاهده کرد که نه تنها حرکت هر ذره بصورت کاتوره ای است بلکه هر دو ذره کاملاً مستقل از یکدیگر حرکت می کنند. اما علت چنین حرکتی سال ها بدون جواب باقی ماند تا در سال ۱۹۰۵ آلبرت اینشتین طی مقاله ای به تشریح علل فیزیکی این حرکت پرداخت [۶].

^۱ Brownian Motion

^۲ Robert Brown



۱-۲ تصویر میکروسکوپی که براون مشاهده کرد

۱-۱-۲ رهیافت اینشتین

برای فهم رهیافت اینشتین در مورد حرکت براونی یک لوله ی باریک و بلند را در نظر می گیریم که با آب پر شده باشد. مقداری جوهر به وزن واحد در زمان صفر و در مبدأ مختصات در آب رها می کنیم. اگر $f(x,t)$ چگالی ذرات جوهر در آب را در لحظه t نشان دهد، در لحظه اول $t=0$ داریم،

$$f(x,0) = \delta(x) \quad (1)$$

اکنون می خواهیم چگالی ذرات را در نقطه ی x و در لحظه ی τ که فاصله زمانی کوچکی است را بدست آوریم. برای این منظور $\rho(\tau, y)$ را چگالی احتمال انتقال ذرات جوهر در مدت τ از x به $x+y$ در نظر می گیریم. در این صورت،

$$f(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y, t) \rho(\tau, y) dy. \quad (2)$$

سپس $f(x-y, t)$ را حول $y=0$ بسط تیلور می دهیم،

$$f(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x, t) - f'(x, t)y + \frac{1}{2} f''(x, t)y^2 - \dots) \rho(\tau, y) dy. \quad (3)$$

$\int \rho dy = 1$ است و به علت ایزوتروپیک بودن فضا، $\rho(y,t) = \rho(-y,t)$ ، در نتیجه $\int y \rho dy = 0$ می باشد. همانطور که بعداً نشان داده می شود،

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \rho(\tau, y) dy = D\tau \quad D \geq 0 \quad (4)$$

می باشد. با جایگذاری روابط فوق در رابطه ی (۳) بدست می آوریم،

$$f(x, t + \tau) - f(x, t) = \frac{1}{2} f''(x) D\tau \quad T \rightarrow \quad D\tau \frac{f(x, t + \tau) - f(x, t)}{\tau} = \frac{1}{2} f''(x) D \quad (5)$$

که در حد $\tau \rightarrow 0$ به،

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \quad (6)$$

تبدیل می شود. این همان معادله ی پخش^۱ است که با شرط اولیه ی ذکر شده دارای جوابی به صورت،

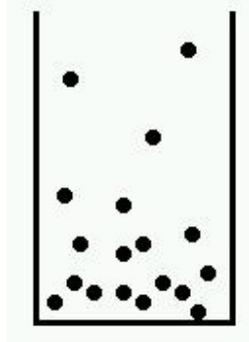
$$f(x, t) = \frac{1}{(2D\pi t)^2} e^{-\frac{x^2}{2Dt}} \quad (7)$$

می باشد [۷]. ثابت D شامل خصوصیات فیزیکی مسئله می باشد.

در مرحله ی بعد باید به بررسی و محاسبه ی D پردازیم. تعداد زیادی ذره ی براونی معلق در مایعی را در نظر می گیریم که نیروی خارجی K ، به آن وارد می شود (این نیرو می تواند برای مثال نیروی گرانشی باشد). در حالت تعادل نیروی K ، نیروی اسمزی به تعادل می رسد. به طوریکه،

$$K = kT \frac{\nabla v}{v} \quad (8)$$

¹ Diffusion Equation



۲-۲ ذرات براونی

که طرف راست رابطه ی (۸) با فرض اینکه ذرات براونی مانند ذرات گاز در نظریه ی جنبشی گازها رفتار می کنند نوشته شده است. V ، تعداد ذرات در واحد حجم است. K ، ثابت بولتزمان، و T ، دمای مطلق سیستم است. نیروی K ، سرعت V ، را به ذرات می دهد که به مرور زمان و به علت وجود نیروی اصطکاک این سرعت به مقدار ثابتی می رسد که برابر است با،

$$V = \frac{K}{m\beta}, \quad (9)$$

که β ، ثابتی است با بعد عکس زمان و m جرم ذرات است. بنابراین تعداد ذراتی که از واحد سطح در واحد زمان می گذرند، n عبارت است از:

$$n = \frac{vK}{m\beta}. \quad (10)$$

از طرفی v ، چگالی چنین سیستمی، باید در معادله ی پخش صدق کند

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\nabla^2 v = \nabla \cdot (D\nabla v) \quad (11)$$

در نتیجه با انتگرال گیری معادله (۱۱) روی کل حجمی که توسط سطح بسته ی S محاط شده است، تعداد ذراتی که از واحد سطح S در واحد زمان می گذرند بصورت $-D\nabla v$ بدست می آیند.

با مساوی قرار دادن این عبارت با رابطه ی (۱۰)، و استفاده از رابطه ی (۸)، و حذف K از روابط نتیجه می گیریم که:

$$D = \frac{kT}{m\beta} \quad (12)$$

این فرمول به فرمول اینشتین معروف است و همانطور که واضح است رابطه ی نهایی مستقل از نیروی خارجی و چگالی ذرات می باشد. این رابطه را می توان به شکل زیر نیز نوشت

$$D = \frac{RT}{N_A f} \quad (13)$$

که R ثابت گازها، f ضریب اصطکاک و N_A ، عدد آووگادرو می باشد. پیرین^۱ و همکارش بلافاصله با استفاده از این رابطه و آزمایش های تجربی که انجام دادند مقدار عدد آووگادرو را با دقت قابل قبولی محاسبه کردند. و این خود مهر تأییدی بود بر نظریه ی ذره ای ماده [۶].

۲-۱-۲ رهیافت لانژوین

در سال ۱۹۰۸ پاؤل لانژوین، دانشمند فرانسوی با رهیافتی متفاوت و آشکارا ساده تر به بررسی حرکت براونی پرداخت و همان نتایجی که اینشتین بدست آورده بود را بدست آورد. لانژوین با معادله ی نیوتون شروع کرد. وی فرض کرد در غیاب نیروی خارجی دو نیروی مقاومت مایع و نیروی میکروسکوپی ذرات مایع به ذره ی براونی وارد می شود. فرض می شود ذرات براونی نسبت به فاصله ی مولکولی بزرگ و با سرعت V در مایع حرکت می کنند. این حرکت معادل است با نیروی بازدارنده ی $-6\pi\eta aV$ ، که نتیجه ای است از فرمول استوک. m جرم ذرات سیال و a شعاع اتمها با فرض کروی بودن آنها می باشد. نیروی F ، نیرویی کاملاً کتره ای است که در تمام جهات به ذره وارد می شود. ریشه ی این نیرو برهمکنش ذرات مایع با ذره ی براونی می باشد. اگر معادله ی حرکت برای ذره ی براونی نوشته شود آنگاه،

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\eta aV + F \quad (14)$$

این معادله ی ساده همان معادله ی معروف لانژوین است. طرفین معادله ی (۱۴) را در x ضرب کرده

$$\frac{m}{2} \frac{d^2x^2}{dt^2} - mV^2 = -3\pi\eta a \frac{dx^2}{dt} + Fx \quad (15)$$

¹ Perrin

و با فرض تعداد ذره زیاد و مشابه، با میانگین گیری آنسامبلی روی جملات مختلف معادله ی (۱۵) جمله ی آخر صفر می شود. دلیل این امر بی نظمی کامل نیروی F می باشد.

$$\frac{m}{2} \frac{dz}{dt} + 3\pi m a z = \frac{RT}{N_A} \quad (۱۶)$$

در رابطه ی فوق $z = \left\langle \frac{dx^2}{dt} \right\rangle$ می باشد. همچنین در طرف راست رابطه ی (۱۶) از اصل هم بخشی ،

$$\left\langle \frac{1}{2} m V^2 \right\rangle = \frac{RT}{2N_A} \quad (۱۷)$$

استفاده شده است. جواب عمومی معادله ی (۱۶) به صورت زیر می باشد،

$$z = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{3\pi m a} + C e^{\frac{-6\pi m a}{m} t} \quad (۱۸)$$

پس از گذشت چند زمان $\frac{m}{6\pi m a}$ ، که از مرتبه ی 10^{-8} می باشد، جمله ی دوم رابطه ی (۱۸) عملاً صفر می شود. لذا در محاسباتمان این جمله را از اول صفر می گذاریم،

$$\left\langle \frac{dx^2}{dt} \right\rangle = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{3\pi m a} \quad (۱۹)$$

لذا برای یک بازه ی زمانی τ داریم،

$$\langle x^2 \rangle - \langle x_0^2 \rangle = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{3\pi m a} \tau \quad (۲۰)$$

اگر Δ_x بصورت زیر تعریف شود،

$$x = x_0 + \Delta_x$$

داریم،

$$\langle \Delta_x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x_0^2 \rangle = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{3\pi m a} \tau \quad (۲۱)$$

با تعریف D از رابطه (۴) و استفاده از رابطه (۲۱) داریم،

$$D = \frac{\langle \Delta_x^2 \rangle}{\tau} = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{3\pi ma}, \quad (22)$$

که با کمی تبدیلات به همان رابطه ی (۱۳) که اینشتین معرفی کرده بود می رسیم. همانطور که از رابطه ی (۲۲) مشخص است D ، یک کمیت مثبت است که لازمه ی معادله ی پخش (۶) می باشد [۸].

۳-۱-۲ رهیافت وینر^۱

در سال ۱۹۲۰، وینر بر پایه ی ریاضیاتی مس تحکم پدیده براونی را مورد بررسی قرار داد. بر اساس فرض وینر حرکت ذرات در فرآیند براونی به صورت رندوم والک^۲ می باشد. در یک شبکه ی مربعی دو بعدی که با عناصر $\{(m\Delta x, n\Delta t) \mid m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots\}$ مشخص می شود، فرض کنید ذره از $x=0$ در $t=0$ شروع به حرکت کند. حرکت ذره به صورتی است که در $n\Delta t$ ، $\frac{1}{2}$ احتمال دارد که ذره به اندازه ی Δx به راست برود و $\frac{1}{2}$ احتمال دارد که به سمت چپ برود. $P(m, n)$ را احتمال اینکه ذره در زمان $n\Delta t$ در مکان $m\Delta x$ باشد تعریف می کنیم. در این صورت،

$$P(m, 0) = \delta_{m0} \quad (23)$$

به این معنا که ذره در زمان صفر در مبدأ است. همچنین،

$$P(m, n+1) = \frac{1}{2}P(m-1, n) + \frac{1}{2}P(m+1, n), \quad (24)$$

و از این رو،

$$P(m, n+1) - P(m, n) = \frac{1}{2}P(m+1, n) - 2P(m, n) + P(m-1, n). \quad (25)$$

اگر D را به صورت زیر تعریف شود،

¹ Wiener

² Random Walk

$$D = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}, \quad (26)$$

آنگاه،

$$\frac{P(m, n+1) - P(m, n)}{\Delta t} = \frac{D}{2} \frac{P(m+1, n) - 2P(m, n) + P(m-1, n)}{(\Delta x)^2} \quad (27)$$

حال در حد $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ داریم $t \rightarrow n\Delta t \rightarrow x, m\Delta x \rightarrow x$ و همچنین $P(m, n) \rightarrow f(x, t)$

به این ترتیب رابطه ی (27) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (28)$$

که همان معادله پخش می باشد. فرآیند براونی با $D=1$ را فرآیند وینر می نامند. تابع توزیع حاکم بر این متغیر تصادفی به صورت،

$$P(a \leq W(t) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2t}} dx, \quad (29)$$

می باشد. به این ترتیب داریم،

$$\begin{aligned} \langle W(t) \rangle &= 0, \\ \langle (W(t) - W(t_0))^2 \rangle &= t. \end{aligned} \quad (30)$$

خط آخر عبارت (30) با توجه به خواص $W(t)$ به سادگی اثبات می شود [7].

در این بخش ضمن معرفی حرکت براونی به بررسی این پدیده ی تصادفی با چند رهیافت متفاوت پرداختیم. در واقع در رهیافت اینشتین به بررسی این سیستم تصادفی با استفاده از حالت خاصی از معادله ی فوکر-پلانک اختصاص دارد و در رهیافت لانژوین نیز این سیستم با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی بررسی شد. در ادامه ی این فصل این دو روش به طور عمومی تر بررسی می شوند.

۲-۲ فرمول ایتو^۱ و معادلات دیفرانسیل تصادفی

در بررسی سیستم های فیزیکی، شامل مجموعه ای از ذرات، مانند حرکت براونی، بررسی دقیق سیستم مستلزم حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر تک ذرات سیستم می باشد. با توجه به اینکه نیروهای میکروسکوپی وارد بر ذرات از قاعده ی منظمی تبعیت نمی کنند(برخوردها در عمل کتره ای می باشند)، لذا نوشتن معادلات دیفرانسیل برای تک ذرات سیستم کاری بسیار پیچیده و عملاً غیر ممکن می باشد. در واقع ایده ی لانژوین در بررسی حرکت براونی این بود که نیروهای وارد بر ذره ی براونی را در جمله ای به شکل یک نوفه وارد معادلات کرد. شناخت ماکروسکوپی ما از رفتار این نیرو که به نیروی لانژوین معروف است نیز رفتاری تصادفی می باشد. معادله ی لانژوین حالت خاصی از معادلات دیفرانسیل تصادفی می باشد. لذا در ادامه ی این بخش به معرفی مقدماتی این معادلات می پردازیم.

۲-۲-۱ معادلات دیفرانسیل تصادفی

برای معادله ی دیفرانسیل معمولی

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (t > 0) \quad (31)$$

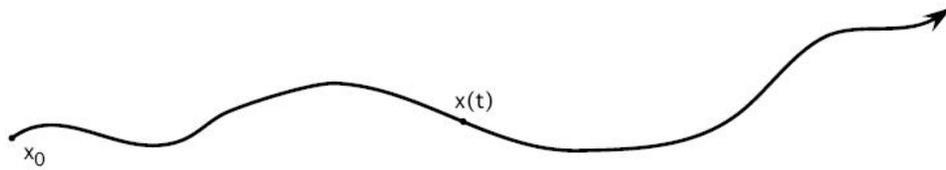
که b یک میدان برداری هموار می باشد، جواب به صورت مسیری هموار مانند شکل ۲-۳ می باشد. اما این معادلات در مورد سیستم های واقعی جوابگو نیستند و ما احتیاج به بهبود این معادلات داریم. در واقع باید امکان تأثیرات کتره ای که باعث اختلال در سیستم می شود را در نظر بگیریم. یک راه معمول برای این کار نوشتن معادلات به صورت ،

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = b(X(t)) + B(X(t))\xi(t) \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (t > 0) \quad (32)$$

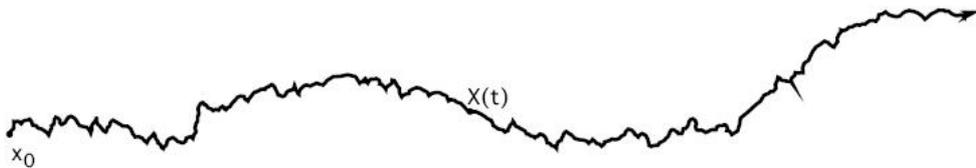
می باشد که $\xi(t)$ جمله ی نوفه^۲ می باشد.

¹ Ito formula

² Noise



۳-۲ منحنی مربوط به معادله ی دیفرانسیل



۴-۲ منحنی مربوط به معادله ی دیفرانسیل تصادفی

شکل ۴-۲ منحنی مربوط به این معادله را نشان می دهد. در شرایط $b=0$ ، $B=1$ و $x_0 = 0$ همانطور که بعداً نشان خواهیم داد به شرایطی می رسیم که فرآیند وینر را توصیف خواهد کرد. لذا

$$\dot{W}(t) = \xi(t) \quad (33)$$

می باشد. به این ترتیب می توان رابطه ی (۳۲) را به صورت،

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(X(t))dt + B(X(t))dW(t) \\ X(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (t > 0) \quad (34)$$

نوشت. این معادله را معادله ی دیفرانسیل تصادفی می نامند. با حل این معادله،

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t B(X(s))dW \quad (35)$$

بدست می آید [۷].

$$dW \approx (dt)^2 \quad \text{۲-۲-۲ اثبات رابطه ی}$$

در این بخش رابطه ی مهمی را اثبات می کنیم که اساس تفاوت بین معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل تصادفی است، یعنی $dW \approx (dt)^2$ [۴].

ابتدا بازه ی زمانی $[a,b]$ را به m بازه زمانی کوچک تر تقسیم می کنیم،

$$P^n := \{a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{m_n}^n = b\}. \quad (36)$$

$|P^n|$ را بزرگترین بازه ی ممکن تعریف می کنیم. با افزایش n بازه ها کوچکتر و تعدادشان زیادتر می شود. فقط این پارامتر طوری تعریف شده است که اگر $n \rightarrow \infty$ ، $|P^n| \rightarrow 0$ و لذا خیالمان از بابت صفر شدن بقیه ی بازه ها راحت است (بازه ها لزوماً برابر نیستند). در ادامه به این صورت عمل می کنیم که،

$$Q_n := \sum_{n=0}^{m_n-1} [W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)]^2, \quad (37)$$

$$\langle (Q_n - (a-b))^2 \rangle = \sum_{k=0}^{m_n-1} \sum_{j=0}^{m_n-1} \langle [(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)] [(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)] \rangle. \quad (38)$$

اگر $k \neq j$ در این صورت می توان میانگین گیری را جدا انجام داد،

$$\langle [(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)] [(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)] \rangle$$

که با توجه به روابط (30) عبارت فوق صفر می باشد. حال اگر $k = j$ باشد خواهیم داشت،

$$\langle (Q_n - (a-b))^2 \rangle = \sum_{k=0}^{m_n-1} \langle ((Y_k^2 - 1)^2 (t_{k+1}^n - t_k^n)^2) \rangle, \quad (39)$$

که

$$Y_k := \frac{W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)}{\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}}. \quad (40)$$

میانگین گیری فضایی است و میانگین یک عدد مثبت، مثبت است.

$$n \rightarrow \infty \quad \langle (Q_n - (a-b))^2 \rangle \leq C \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \leq C |P^n| (b-a) \rightarrow 0, \quad (41)$$

که C یک ثابت مثبت می باشد. در این حالت از (37) داریم،

$$Q_n \rightarrow \int (dW)^2, \quad (42)$$

و از طرفی،

$$a - b = \int dt. \quad (43)$$

با توجه به سه رابطه ی (41)، (42) و (43) نتیجه می گیریم،

$$dW \approx (dt)^2. \quad (44)$$

۲-۲-۳ فرمول ایتو

معادله ی زیر را در نظر بگیرید،

$$dX = b(X)dt + dW. \quad (45)$$

حال می خواهیم معادله ی دیفرانسیل تصادفی حاکم بر متغیر $Y(X(t))$ را به دست آوریم. اصولاً با توجه به رابطه ی (45) باید داشته باشیم،

$$dY = Y'dX = Y'bdt + Y'dW, \quad (46)$$

که Y' معادل $\frac{\partial Y}{\partial X}$ می باشد. اما این رابطه ی به ظاهر بدیهی کاملاً صحیح نمی باشد و با توجه به اینکه $dW \approx (dt)^2$ است بسط dY را به صورت زیر می توان انجام داد.

$$dY = Y'dX + \frac{1}{2}Y''(dX)^2 + \dots$$

$$= Y'(bdt + dW) + \frac{1}{2}Y''(bdt + dW)^2 + \dots$$

$$= (Y'b + \frac{1}{2}Y'')dt + Y'dW + O((dt)^{\frac{3}{2}}) + higher. \quad (47)$$

در این مرحله بسط تا مرتبه $(dX)^2$ را نگه داشته ایم، سپس با نگه داشتن جملاتی از مرتبه ی dt خواهیم داشت،

$$dY = (Y'b + \frac{1}{2}Y'')dt + Y'dW. \quad (48)$$

که نسبت به معادله ی (46) دارای یک جمله ی اضافی می باشد. رابطه (48) حالت خاصی از فرمول ایتو می باشد [7].

مثال: جواب معادله ی دیفرانسیل،

$$\begin{cases} dY = YdW, \\ Y(0) = 1 \end{cases} \quad (49)$$

به صورت،

$$Y(t) := e^{W(t) - \frac{t}{2}}, \quad (50)$$

می باشد که آشکارا با رابطه ی حدس زده شده ی $Y(t) := e^{W(t)}$ ، متفاوت می باشد. جواب (50) یک جواب حدسی می باشد که باید در رابطه (48) صدق کند.

رابطه ی عمومی برای فرمول ایتو بصورت،

$$\begin{aligned} df[X(t)] &= \{b[X(t),t]f'[X(t)] + \frac{1}{2}B^2[X(t),t]f''[X(t)]\}dt \\ &+ B[X(t),t]f'[X(t)]dW(t). \end{aligned} \quad (51)$$

می باشد که با توجه به رابطه ی (34) نوشته شده است [7].

۲-۳ معادله ی فوکر-پلانک

معادله ی معروف به معادله ی گرمایی یا معادله ی پخش که اینشتین برای بررسی حرکت براونی از آن بهره برد، در واقع حالت خاصی از معادله ی عمومی تری به نام معادله ی فوکر-پلانک می باشد. نام فوکر-پلانک بر آمده از اسم دو دانشمند به نام های پلانک و فوکر است که در بررسی حرکت براونی در میدان تابشی و در ادامه در بنا نهادن یک نظریه عمومی در مورد فرآیندهای تصادفی به این معادله رسیدند. حل معادله ی فوکر-پلانک و یافتن تابعیت تابع توزیع احتمال به زمان معادل شناخت کامل ما از سیستم خواهد بود. چرا که با یک انتگرال گیری می توان مقدار متوسط تمام کمیات فیزیکی سیستم را بدست آورد.

۲-۳-۱ معادله ی فوکر-پلانک تعمیم یافته^۱

در این بخش معادله ی فوکر-پلانک تعمیم یافته را بدست می آوریم و از روی آن معادله ی فوکر-پلانک استاندارد را معرفی می کنیم. رابطه ی چاپمن-کولموگروف^۲ را در نظر می گیریم،

$$P(X_1, t_1 | X_3, t_3) = \int P(X_1, t_1 | X_2, t_2) P(X_2, t_2 | X_3, t_3) dX_2. \quad (52)$$

که $P(X_1, t_1 | X_2, t_2)$ احتمال گذار بین دو نقطه را مشخص می کند. در واقع احتمال اینکه در لحظه ی t_1 در مکان X_1 باشیم در صورتی که در لحظه ی قبلی t_2 در مکان X_2 بوده ایم. حال عبارت زیر را در نظر می گیریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(Y) \frac{\partial P(Y, t | X)}{\partial t} dY. \quad (53)$$

که $h(Y)$ تابعی هموار است. با توجه به،

$$\frac{\partial P(Y, t | X)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(Y, t + \Delta t | X) - P(Y, t | X)}{\Delta t}, \quad (54)$$

رابطه ی (۵۳) تبدیل می شود به،

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(Y) \frac{\partial P(Y, t | X)}{\partial t} dY = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} h(Y) \left[\frac{P(Y, t + \Delta t | X) - P(Y, t | X)}{\Delta t} \right] dY. \quad (55)$$

با استفاده از رابطه ی چاپمن-کولموگروف، (۵۲)، سمت راست رابطه ی (۵۵) به صورت،

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(Y) \int_{-\infty}^{\infty} P(Y, \Delta t | Z) P(Z, t | X) dZ dY - \int_{-\infty}^{\infty} h(Y) P(Y, t | X) dY \right], \quad (56)$$

در می آید. اگر در جمله ی دوم رابطه ی (۵۶) جای متغیر Y و Z را عوض کنیم و از نرمال بود تابع توزیع بهره بگیریم این رابطه به صورت زیر در می آید،

¹ Generalized Fokker-Planck Equation

² Chapman-Kolmogorov