وزارت علوم و تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان

جواب‌های موجی سفری معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی با استفاده از روش انتگرال اول

اساتید راهنما:

آقای دکتر سعید عباس‌بندی

آقای دکتر محمد اخوی‌زادگان

استاد مشاور:

آقای دکتر داوود رستمی

تهیه و تنظیم:

لیلا پناهی

اسفند ۱۳۹۰

تقدیم به آنانکه همواره دوستشان دارم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که سپاس و ستایش در برابرشان حقیر است

تقدیم به آنانکه وجودشان آرامش و اطمینان دلم بود و در راه کسب علم و دانش همیشه مشوق و حامی من بودند.

و تقدیم به همسر مهربانم

تقدیم به او که در تمامی لحظات مونس و همدم زندگیم است و با عشق پاک و خالصانه خویش زندگیم را پر از شور و نشاط می‌کند. تقدیم به او که تا ابد همراهش خواهم بود.

سپاس

اکنون که به خواست و عنایت ایزد منان، این پایان‌نامه به انتها رسیده است، لازم می‌دانم از کلیه سروران محترمی که در تهیه و گردآوری این مجموعه مرا یاری نموده‌اند صمیمانه قدردانی نمایم. از خداوند متعال، موفقیت روزافزون این عزیزان را در راه خدمت به علم و بشریت آرزومندم.

از استاد محترم جناب آقای دکتر عباس‌بندی به پاس کمک‌های ارزنده‌شان صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم. هم‌چنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر اخوی‌زادگان که مرا از راهنمایی‌های بی‌شائبه‌شان بهره‌مند ساختند کمال تشکر و قدردانی دارم. در انتها از استاد محترم جناب آقای دکتر رستمی که مرا در این امر یاری فرمودند، قدردانی می‌کنم.

پیش‌گفتار

در طی ۴۰ سال اخیر مطالعه‌ی روش‌هایی جهت پیدا کردن جواب معادلات دیفرانسیل جزیی (PDE) از هر دو نقطه‌نظر تئوری و کاربردی بسیار حائز اهمیت بوده است. همزمان با ترقی سریع در تکنولوژی کامپیوتر روش‌های عددی بهبود یافتند و تعداد زیادی از PDEها که از مهندسی و دیگر علوم ناشی شده بودند و قبلاً حل آنها بسیار سخت بود، براحتی حل شدند. در روش تفاضل متناهی، عملگرهای دیفرانسیل تقریب زده می‌شوند و معادلات تفاضلی حل می‌شوند. در روش عناصر متناهی، بازه‌ی کران‌دار I را به N زیربازه‌ی متناهی افراز می‌کنیم و جواب را در هرکدام از زیربازه‌ها تقریب می‌زنیم. در هر دو روش تفاضل متناهی و عناصر متناهی کران‌دار بودن و شرایط اولیه ضروری است. روش تجزیه آدومیان فقط به شرایط اولیه بستگی دارد و یک جواب به‌صورت سری به‌دست می‌دهد که به جواب دقیق مسأله همگراست. در سال‌های اخیر روش‌های زیادی طرح‌ریزی شده‌اند مثل روش tanh، روش تابع هیپربولیک تعمیم‌یافته و ...و روش انتگرال اول.

روش انتگرال اول بر مبنای تئوری حلقه در جبر جابجایی بنا شده است. این روش ابتدا توسط Feng مطرح شد. این پایان‌نامه به بیان این روش پرداخته است و بر مبنای مرجع [۱۵] نوشته شده است. روش انتگرال اول در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه ریاضی‌دانان قرارگرفته است. توان این روش با به‌کار بردن آن برای معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی تصدیق شده است.

چکیده

در این پایان‌نامه به جواب‌های موجی سفری معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی با استفاده از روش انتگرال اول پرداخته شده است.

فصل اول شامل مفاهیم ابتدایی از قبیل معادلات دیفرانسیل جزیی و انواع آن و تئوری حلقه در جبر جابجایی است.

در فصل دوم ابتدا به بیان قضایای موردنیاز و دو قضیه‌ی اساسی که روش انتگرال اول بر مبنای آن‌ها پایه‌گذاری شده اشاره شده و سپس به شرح روش انتگرال اول پرداخته شده است.

فصل سوم شامل حل چندین معادله دیفرانسیل جزیی غیرخطی با استفاده از روش انتگرال اول است.

فصل چهارم شامل حل چندین دستگاه معادله دیفرانسیل جزیی غیرخطی با استفاده از این روش است.

واژه‌های کلیدی:

معادله دیفرانسیل جزیی غیرخطی، جواب‌های موجی-سفری، روش انتگرال اول، قضیه‌ی تقسیم.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

۱۰۱ معادلات دیفرانسیل جزیی

معادلات دیفرانسیل جزیی در علوم مهندسی و علوم پایه کاربردهای مهمی دارند. معادله‌های دیفرانسیل جزیی در مدل ریاضی پدیده‌های طبیعت ظاهر می‌شوند. اغلب فرآیندهای فیزیکی با معادله‌هایی توصیف می‌شوند که بیش از یک متغیر مستقل دارند.

یک معادله دیفرانسیل جزیی، معادله‌ایی است که شامل یک تابع مجهول از دو متغیر مستقل یا بیشتر و مشتقات جزیی تابع نسبت به این متغیرهاست. معمولاً معادله دیفرانسیل جزیی را با علامت اختصاری (PDE)[۱] نشان می‌دهند.

فرم کلی یک معادلات دیفرانسیل جزیی (PDE) در دو بعد به‌صورت زیر است:

$$A(x,y)\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲}+B(x,y)\frac{\partial^۲ U}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲}=F(x,y,U,\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y})$$

معادله دیفرانسیل جزیی بسته به شرایط زیر به سه دسته بیضوی، سهموی و هذلولی تقسیم می‌شود:

۱) بیضوی (Elliptic PDE) $B^۲ - ۴AC < ۰$

1) Partial differential equation

۲) سهموی (Parabolic PDE) $\circ = B^{۲} - ۴AC$

۳) هذلولی (Hyperbolic PDE) $\circ < B^{۲} - ۴AC$

این سه نوع PDE به‌ترتیب در ارتباط با حالت‌های تعادل، پخش و سیستم‌های نوسانی می‌باشند.

۱.۱.۱ تعریف. مرتبه یک PDE، مرتبه‌ی بالاترین مشتق جزیی تابع مجهول در معادله است.

مثال: دو معادله زیر را درنظر بگیرید که در آن‌ها z متغیر وابسته و X و Y متغیر مستقل هستند.

$$(I)\ \ X\frac{\partial Z}{\partial X} + Y\frac{\partial Z}{\partial Y} = Z$$
$$(II)\ \ X\frac{\partial^{۲} Z}{\partial X^{۲}} + ۳\frac{\partial^{۲} Z}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^{۲} Z}{\partial Y^{۲}} = \circ$$

معادله‌ی (I) و (II) به‌ترتیب معادله با مشتقات جزیی مرتبه اول و مرتبه دوم می‌باشند.

۲.۱.۱ تعریف. اگر در یک PDE متغیر وابسته و مشتق‌های جزیی آن از درجه اول باشند و حاصلضرب آن در مشتق‌های جزیی حضور نداشته باشند معادله خطی و درغیراین‌صورت معادله غیرخطی نامیده می‌شود.

۳.۱.۱ تعریف. اگر معادله دیفرانسیل خطی در هر جمله فقط شامل تابع مجهول یا مشتق‌های آن باشد، همگن نامیده می‌شود.

۴.۱.۱ تعریف. جواب عمومی یک PDE عبارتست از جوابی که شامل تعداد توابع مشتق دلخواه که برابر با مرتبه معادله است.

۵.۱.۱ تعریف. جواب خصوصی PDE عبارتست از جوابی که با انتخاب بخصوص توابع دلخواه در جواب عمومی به‌دست می‌آید.

۲.۱ معادله دیفرانسیل جزیی بیضوی

معادله پواسن[1] یک مثال از معادله دیفرانسیل جزیی بیضوی است. فرمول عمومی معادله پواسن به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \qquad (۱.۲.۱)$$

در این معادله تابع f مشخص‌کننده داده مسأله روی یک ناحیه مسطح R است که مرز آن را با S نمایش می‌دهیم. معادلاتی از این نوع به‌طور طبیعی در مطالعه‌ی مسائل فیزیکی مستقل از زمان گوناگون، نظیر حالت یکنواخت توزیع گرما در یک ناحیه مسطح، انرژی پتانسیل یک نقطه در صفحه که نیروهای ثقلی واقع در صفحه روی آن عمل می‌کنند، و مسائل حالت یکنواخت دو بعدی شامل سیالات تراکم‌ناپذیر، رخ می‌دهند.

برای به‌دست آوردن جواب منحصر به‌فرد برای معادله پواسن باید قیدهای اضافی بر جواب نهاد. مثلاً مطالعه حالت یکنواخت توزیع گرما در یک ناحیه‌ی مسطح لازم دارد که $f(x,y) = 0$، که منجر به ساده‌تر شدن (۱.۲.۱) به‌صورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad (۲.۲.۱)$$

معادله فوق به معادله‌ی لاپلاس[2] معروف است. اگر دمای داخل ناحیه به وسیله توزیع دما روی مرز ناحیه معین شود، قیدها شرایط مرزی دیریکله[3] نامیده می‌شوند.

۳.۱ معادله دیفرانسیل جزیی سهموی

مثالی از یک معادله دیفرانسیل سهموی، معادله گرماست[4] فرمول معادله گرما به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad (۱.۳.۱)$$

مسأله فیزیکی که در این معادله بررسی می‌شود به جریان گرما در امتداد یک میله‌ی نازک به طول L مربوط است که فرض می‌شود در هر مقطع عرضی جسم دارای دمای یکنواخت است، به شرطی که میله در سطح کناری‌اش

1) Poisson 2) Laplace 3) Dirichlet 4) Heat equation

کاملاً عایق‌دار باشد. ثابت α در معادله (۱.۳.۱) به‌وسیله‌ی خواص هدایت گرمایی مواد تشکیل‌دهنده‌ی میله تعیین و فرض می‌شود که از محل استقرار در میله مستقل باشد.

یک دسته‌ی نوعی از این قیود برای مسأله جریان گرما آن است که توزیع اولیه‌ی گرما در میله را مشخص کرده $U(x,\circ)=f(x)$ و بیان کنیم که در انتهای میله چه رخ می‌دهد. مثلاً اگر دو انتهای میله را در دمای ثابت β و γ نگه‌داریم، شرایط مرزی به شکل زیر خواهند بود:

$$U(\circ,t)=\beta \quad , \quad U(L,t)=\gamma$$

و توزیع گرما در میله به توزیع دمای حدی میل می‌کند:

$$\lim u(x,t)=\beta+\frac{\gamma-\beta}{L}x$$

در عوض اگر میله را چنان عایق کنیم که هیچ گرمایی از انتها جریان نداشته باشد، شرایط مرزی

$$\frac{\partial U}{\partial x}(\circ,t)=\circ \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial x}(L,t)=\circ$$

خواهند بود، و یک دمای ثابت را به عنوان حالت حدی، در میله نتیجه می‌دهد.

معادله دیفرانسیل جزیی سهموی در مطالعه انتشارگاز نیز اهمیت دارد؛ در واقع معادله‌ی (۱.۳.۱) در بعضی از حوزه‌ها به معادله‌ی انتشار معروف است.

۴.۱ معادله دیفرانسیل جزیی هذلولوی

مثالی از یک معادله دیفرانسیل جزیی هذلولوی، معادله‌ی موج یک بعدی است. فرض کنید یک نخ قابل ارتجاع به طول L بین دو نقطه‌ی اتکا در یک سطح افقی کشیده شده باشد. هرگاه نخ چنان به حرکت درآید که در یک سطح قائم نوسان کند، آن‌گاه تغییر مکان قائم $U(x,t)$ یک نقطه‌ی x در زمان t در معادله دیفرانسیل جزیی

$$\alpha^{\text{۲}}\frac{\partial^{\text{۲}} U}{\partial x^{\text{۲}}}(x,t)=\frac{\partial^{\text{۲}} U}{\partial t^{\text{۲}}}(x,t) \quad , \quad \circ<x<L \ , \ \circ<t \qquad (\text{۱.۴.۱})$$

صدق می‌کند، البته به شرطی که از اثرات بی‌حرکت کردن سیم صرف‌نظر شود و میدان نوسان خیلی بزرگ نباشد.

برای اعمال قیود روی این مسأله، فرض کنیم محل اولیه و سرعت نخ به‌وسیله‌ی

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,\circ)=g(x) \quad , \quad \circ\le x\le L \ , \ U(x,\circ)=f(x)$$

داده شده باشند و از این امر استفاده می‌کنیم که نقاط انتهایی ثابت هستند، که نتیجه می‌دهد $U(\circ, t) = \circ$ و $U(L, t) = \circ$.

مسائل فیزیکی دیگری شامل معادلات دیفرانسیل جزیی هذلولوی (۱.۴.۱) در مطالعه‌ی میله‌های نوسان‌کننده، که یک یا دو انتهای آن با گیره نگه‌داشته می‌شود، و انتقال الکتریسیته در یک خط انتقال طویل، که در آن مقداری نشت جریان به زمین وجود دارد، رخ می‌دهد.

۵.۱ نظریه‌ی حلقه‌ها در جبر جابجایی

از آنجا که روش انتگرال اول بر روی نظریه حلقه‌ها در جبر جابجایی بنا شده است در این قسمت به بیان مفاهیم اساسی در نظریه حلقه‌ها در جبر جابجایی می‌پردازیم.

۱.۵.۱ تعریف. یک حلقه مجموعه‌ای است ناتهی مانند R همراه با دو عمل دوتایی (که معمولاً به‌صورت $+$ و $\cdot$ نموده می‌شوند) به‌طوری‌که

i. $(R, +)$ گروه آبلی است.

ii. ضرب شرکت‌پذیر باشد یعنی

$$\forall a, b, c \in R \quad , \quad a[bc] = [ab]c$$

iii. قوانین پخش‌پذیری از چپ و راست برقرار باشد یعنی

$$\forall a, b, c \in R \quad , \quad a(b + c) = ab + ac \;\; , \;\; (a + b)c = ac + ab$$

۲.۵.۱ تعریف. زیرمجموعه S از حلقه‌ی R را زیرحلقه‌ی R گوییم هرگاه S خود نسبت به عمل‌های دوتایی R حلقه باشد، چنین حلقه‌ای را با نماد $(R, +, \cdot)$ نمایش می‌دهیم.

۳.۵.۱ تعریف. حلقه‌ی $(R, +, \cdot)$ حلقه‌ی جابجایی است هرگاه عمل دوتایی ضرب در R تعویض‌پذیر باشد یعنی

$$\forall a, b \in R \quad , \quad ab = ba$$

۴.۵.۱ تعریف. حلقه‌ی $(R,+,\cdot)$ حلقه‌ی یکدار است هرگاه R نسبت به عمل دوتایی ضرب عنصر همانی داشته باشد یعنی R شامل عنصری چون I_R باشد به‌طوری‌که

$$\forall r \in R \quad , \quad I_R \cdot a = a \cdot I_R = a$$

نکته: اگر $(R,+,\cdot)$ حلقه‌ی یکدار باشد و $S \subseteq R$ زیرحلقه‌ی R باشد باید داشته باشیم $I_S = I_R$. یعنی همانی ضربی S با همانی ضربی R برابر باشد.

۵.۵.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد. مقسوم‌علیه صفر R عنصری چون $r \in R$ است که به‌ازای آن عنصری چون $y \in R$ با شرط $y \neq \circ$ وجود داشته باشد که $ry = \circ_R$. هر عنصر R که مقسوم‌علیه صفر نباشد نامقسوم‌علیه صفر نامیده می‌شود.

۶.۵.۱ تعریف. عنصر a در حلقه‌ی یکدار R را معکوس‌پذیر چپ (راست) گوییم هرگاه $c \in R$ $(b \in R)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $ca = I_R$ $(ba = I_R)$. عنصر c (b) معکوس چپ (راست) a نامیده می‌شود.

۷.۵.۱ تعریف. عنصر $a \in R$ که هم معکوس‌پذیر چپ باشد و هم معکوس‌پذیر راست، عنصر معکوس‌پذیر می‌گوییم.

۸.۵.۱ تعریف. حلقه‌ی جابجایی و یکدار R با خاصیت $I_R \neq \circ$ و فاقد مقسوم‌علیه صفر دامنه‌ی صحیح نامیده می‌شود.

۹.۵.۱ تعریف. حلقه‌ی یکدار R با خاصیت $I_R \neq \circ$ که در آن هر عنصر ناصفر عنصر معکوس‌پذیر باشد یک حلقه تقسیم است.

۱۰.۵.۱ تعریف. هر میدان یک حلقه تقسیم جابجایی است.

۱۱.۵.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد، $R[X]$ متشکل از چندجمله‌ای‌هایی از مجهول X با ضریب‌هایی متعلق به R را حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها گوییم.

نکته. $R[X]$ نیز حلقه‌ی جابجایی است.

۱۲.۵.۱ تعریف. فرض کنید $f : R \to S$ نگاشتی از حلقه‌ی R به حلقه‌ی S باشد، در این‌صورت f را همریختی (همریختی حلقه‌ای یا همریختی حلقه‌ها) می‌نامیم اگر

i. به‌ازای هر $a, b \in R$ داشته باشیم $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

ii. به‌ازای هر $a, b \in R$ داشته باشیم $f(ab) = f(a)f(b)$.

نکته: در تعریف قبل اگر R و S حلقه‌های یکدار باشند علاوه‌بر شرط (i) و (ii) باید داشته باشیم

$$f(I_R) = f(I_S)$$

نکته: هر همریختی دوسویی حلقه‌ها یکریختی (یکریختی حلقه‌ها یا یکریختی حلقه‌ای) است.

۱۳.۵.۱ تعریف. همریختی $f : R \to S$ را همریختی دوسویی گوییم هرگاه f یک‌به‌یک و پوشا باشد.

۱۴.۵.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه جابجایی باشد. منظور از Rـجبر حلقه‌ای چون S مجهز به یک همریختی چون $f : R \to S$ است. لذا همریختی f را باید قسمتی از ساختار Rـجبر بدانیم.

۱۵.۵.۱ تعریف. فرض کنید R و S حلقه‌های جابجایی باشند و $f : R \to S$ همریختی حلقه‌ای باشد. در این‌صورت هسته f را با $\ker f$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ker f = \{r \in R \,:\, f(r) = \circ_S\}$$

۱۶.۵.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ی جابجایی باشد، زیرمجموعه I از R را ایده‌آل R می‌نامیم هرگاه شرط‌های زیر برقرار باشد:

i. $I \neq \phi$.

ii. هرگاه $a, b \in I$ آن‌گاه $a+b \in I$.

iii. هرگاه $a \in I$ و $r \in R$ آن‌گاه $ra \in I$.

۱۷.۵.۱ تعریف. فرض کنید I ایده‌آل حلقه‌ی جابجایی R باشد. در این‌صورت نگاشت $f : R \to \frac{R}{I}$ با تعریف $f(r) = r + I$ به‌ازای هر $r \in R$ را همریختی طبیعی (کانونی) از R به $\frac{R}{I}$ می‌گوییم.

نکته: همریختی طبیعی $f : R \to \frac{R}{I}$ همریختی پوشای حلقه‌ای با هسته‌ی I است.

۱۸.۵.۱ تعریف. ایده‌آل M از حلقه‌ی جابجایی R را ایده‌آل ماکسیمال R گوییم هرگاه

i. $M \subset R$.

ii. ایده‌آلی چون I از R وجود نداشته باشد که $M \subset I \subset R$.

۱۹.۵.۱ تعریف. فرض کنید P ایده‌آلی از حلقه‌ی جابجایی R باشد، می‌گوییم P ایده‌ال اول است هرگاه

i. $P \subset R$ یعنی P ایده‌آل سره R باشد.

ii. به‌ازای هر $a, b \in R$ که $ab \in P$ داشته باشیم $a \in P$ یا $b \in P$.

۲۰.۵.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ی جابجایی باشد و $a \in R$. در این‌صورت مجموعه

$$aR = \{ar \ : \ r \in R\}$$

یک ایده‌آل R است و ایده‌آل اصلی تولیده شده توسط a نامیده می‌شود.

نکته. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و $\phi \neq H \subseteq R$ و $H = \{h_۱, \ldots, h_t\}$ لذا

$$(H) = \left\{ \sum_{i=۱}^{t} r_i h_i \ : \ r_t \in R \right\} \qquad , \qquad t > ۰$$

در این حالت (H) را معمولاً به‌صورت ساده‌تر $(h_۱, \ldots, h_t)$ می‌نویسیم و آن را ایده‌آل تولیده شده توسط $h_۱, \ldots, h_t$ می‌نامیم.

نکته. فرض کنید R حلقه‌ی جابجایی باشد

۱) به‌ازای $h \in R$ داریم $(\{h\}) = \{rh : r \in R\}$ که ایده‌آل اصلی R تولید شده توسط h است.

۲) فرض کنید ایده‌آل I از R برابر (H) باشد که در آن H زیرمجموعه‌ای متناهی از R است می‌گوییم که I ایده‌آل متناهی مولد R است.

۱.۵.۲۱ تعریف. زیرمجموعه F از میدان K را زیرمیدان K گوییم اگر F با اعمال K میدان باشد. در این‌صورت می‌گوییم K میدان حاصل از توسیع F است یا F زیرمیدان K است، و یا F به K توسیع یافته است. وقتی می‌نویسیم توسیع $F \subseteq K$ مقصود توسیع F به K است.

۱.۵.۲۲ تعریف. فرض کنید L زیرمیدان K باشد و $\theta \in L$. θ نسبت به K جبری است هرگاه θ ریشه‌ی یک چندجمله‌ای ناصفر مانند $h \in K[X]$ باشد.

۱.۵.۲۳ تعریف. فرض کنید F زیرمیدان K باشد. می‌گوییم F روی K جبری است (یا توسیع $F \subseteq K$ جبری است.) هرگاه هر عنصر F روی K جبری باشد.

۱.۵.۲۴ تعریف. میدان F جبری بسته است هرگاه هر چندجمله‌ای با یک متغیر از درجه‌ی حداقل یک با ضرایب در F، یک ریشه در F داشته باشد.

۱.۵.۲۵ تعریف. فرض کنید K یک میدان باشد. بستار جبری میدان K یک توسیع جبری از K است به‌طوری‌که جبری بسته باشد.

۱.۵.۲۶ تعریف. فرض کنید S زیرحلقه‌ای از حلقه جابجایی R باشد و $s \in S$. می‌گوییم s روی R صحیح است اگر $h \in \mathbb{N}$ و $r_0, \dots, r_{h-1} \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$s^h + r_{h-1}s^{h-1} + \cdots + r_1 s + r_0 = 0$$

یعنی s ریشه‌ی چندجمله‌ای تکین متعلق به $R[X]$ باشد.

نکته. در حالتی‌که R و S میدان‌اند S روی R صحیح است اگر و تنها اگر روی R جبری باشد.

۲۷.۵.۱ تعریف. فرض کنید S زیرحلقه‌ای از حلقه جابجایی R باشد، می‌گوییم S روی R صحیح است اگر هر عضو S روی R صحیح باشد.

۲۸.۵.۱ تعریف. فرض کنید R و L حلقه‌های جابجایی باشند، می‌گوییم همریختی حلقه‌ای $f : R \to L$ صحیح است اگر L روی زیرحلقه‌اش $\mathrm{Im}\, f$ صحیح باشد.

۲۹.۵.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ی جابجایی باشد، عنصر $r \in R$ را پوچ‌توان گوییم هرگاه عددی چون $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $r^n = 0$.

لم. فرض کنید R حلقه‌ی جابجایی و X مجهول باشد. فرض کنید T مجهز به همریختی ساختاری $f : R \to T$، Rـجبری جابجایی باشد و $\alpha \in T$. در این‌صورت یک همریختی منحصربفرد $f_1 : R[X] \to T$ وجود دارد که حاصل توسیع f است (یعنی چنان است که $f_1|_R = f$) و در $f_1(X) = \alpha$ صدق می‌کند. $\square$

قضیه یکریختی حلقه‌های جابجایی. فرض کنید R و S حلقه‌های جابجایی $f : R \to S$ همریختی حلقه‌ای باشد. در این‌صورت از f یک یکریختی حلقه‌ای چون $\overline{f} : \frac{R}{\ker f} \to \mathrm{Im}\, f$ به‌دست می‌آید که

$$\overline{f}(r + \ker f) = f(r) \quad , \quad \forall r \in R \quad \square$$

فصل دوم

روش انتگرال اول

۱.۲ مقدمه

پدیده‌های غیرخطی در گونه‌های وسیعی از علوم کاربردی مثل فیزیک پلاسما، فیزیک حالت جامد و دینامیک سیال ظاهر می‌شود. به منظور فهم بهتر این پدیده‌های غیرخطی بسیاری از ریاضی‌دانان و دانشمندان فیزیک تلاش کرده‌اند تا جواب‌های دقیق بیشتری برای این معادلات جستجو کنند. چندین روش توانمند مطرح شده برای به‌دست آوردن جواب بسط معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی عبارتند از:

روش پراکنده شدن معکوس، روش تبدیل Backlund، روش بسط Darboux، روش دوخطی Hirota، روش موازنه همگن، روش بسط گویا معادله ریکاتی، روش tanh و ....

در این پایان‌نامه روش انتگرال اول (FIM)[1] برای ساختن جواب‌های موجی سفری[2] دقیق جدید از معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی به‌کار برده شده است. روش انتگرال اول اولین بار توسط Z.Feng مطرح شد. این روش بر روی تئوری حلقه در جبر جابجایی بنا شده است. روش انتگرال اول توسط دیگر ریاضی‌دانان گسترش یافت. اخیراً این روش سودمند در بسیاری از زمینه‌ها به‌کار رفته است. توان این روش با به‌کار بردن آن برای چندین معادله دیفرانسیل جزیی غیرخطی تصدیق شده است.

1) First Integral Method 2) Travelling Wave Solutions

در این فصل به بیان شرح روش انتگرال اول می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا به بیان قضایای کاربردی در این روش می‌پردازیم.

۲.۲ قضایای کاربردی

تعریف ۱.۲.۲: فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد. زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی جابجایی R را زیرمجموعه‌ی ضربی گوییم هرگاه به‌ازای هر $x,y \in S$ داشته باشیم $xy \in S$.

تعریف ۲.۲.۲: فرض کنید R یک حلقه باشد. S یک زیرمجموعه از R و $\overline{S}$ زیرمجموعه‌ی ضربی تولید شده توسط S باشد. حلقه‌ی کسرهای R که توسط مجموعه‌ی S تولید می‌شود را با $R\lfloor S^{-1}\rfloor$ نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی خارج‌قسمتی $R \times \overline{S}$ تحت رابطه‌ی هم‌ارزی

$$\exists\, t \in \overline{S} \quad \mathrm{s.t.} \quad t(sr' - s'r) = 0$$

با ساختار حلقه‌ای مشخص شده توسط

$$(\frac{r}{b}) + (\frac{b}{t}) = \frac{rt+sb}{st}$$
$$(\frac{a}{s})(\frac{b}{t}) = \frac{ab}{st}$$

است ($r,b \in R$ و $s,t \in \overline{S}$). نگاشت کانونی از R به $R\lfloor S^{-1}\rfloor$ همریختی $r \mapsto \frac{r}{1}$ است که $R\lfloor S^{-1}\rfloor$ را به توی Rـجبر می‌نگارد.

۱.۲.۲ قضیه. فرض کنید A یک حلقه و S یک زیرمجموعه از A باشد حلقه‌ی A' و همریختی $h : A \to A'$ با شرایط زیر موجود است:

i) اعضای $h(S)$ در A' وارون‌پذیرند.

ii) برای هر همریختی u از A به یک حلقه‌ی B به‌طوری‌که $u(S)$ در B وارون‌پذیرند، همریختی یکتای u' از A به B چنان موجود است که

$$u = u' \circ h$$