دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

عنوان:

نگاشتهای مشتق‌پذیر در نقاط ثابت روی جبرها

دانشجو:

کاوه استرحامیان

استاد راهنما:

دکترهوگر قهرمانی

استاد مشاور:

دکترمحّمد علی اردلانی

پایان نامه کارشناسي ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

آذر ۱۳۹۰

چکیده

یکی از موضوعات مورد توجه در ارتباط با جبرها مفهوم مشتق‌پذیری می‌باشد. جدیداً به کلاسهای متفاوت این مشتقات مانند مشتقات جردن و مشتق در نقاط ثابت زیاد پرداخته شده است. می‌دانیم که هر نگاشت مشتق، مشتق جردن و همچنین در هر نقطه نیز به طور طبیعی مشتق‌پذیر است. یکی از علاقه مندی‌های ریاضی‌دانان بخصوص در شاخه‌های جبر و آنالیز بررسی عکس این مطلب است، یعنی تحت چه شرایطی یک مشتق جردن یا نگاشت مشتق‌پذیر در نقاطی ثابت یک نگاشت مشتق است. از جمله ریاضی‌دانانی که در این زمینه کار کرده‌اند می‌توان به جیان کوی لی[1] زدونگ پان[2]، جین چوان هو[3] و چند ریاضی‌دان چینی دیگر اشاره کرد. در این پایان‌نامه هدف پرداختن به نگاشتهای مشتق‌پذیردر نقاط ثابت و بررسی شرایطی که به مشتقات جردن و نگاشتهای مشتق تبدیل می‌شوند می‌باشد.

کلمات کلیدی: *فضای باناخ - فضای هیلبرت - جبر عملگرها - نگاشت مشتق - مشتق جردن*

---

[1] Jiankui li

[2] Zhidong pan

[3] Jinchuan Hou

فهرست مطالب

پیشگفتار

در این پایان‌نامه هدف اصلی بررسی نگاشت‌های مشتق‌پذیر در نقاط ثابت، مشتقات جردن و ارتباط آنها با نگاشت مشتق می‌باشد. برای اولین بار هراشتاین [۴] ثابت کرد که روی هر حلقه اول با مشخصه دو، هر مشتق جردن یک نگاشت مشتق است. و بعد از آن ریاضی‌دانانی مانند بریسار[۵] این موضوع را تعمیم دادند.

در فصل اول که در شش بخش و با توجه به منابع ۱و۲۶و۲۸و۲۹و۳۰ تنظیم شده به مرور تعاریف وقضایای مورد نیاز در فصل دوم می‌پردازیم. فصل دوم براساس منبع [۱] و[۲] تنظیم شده است. منابع دیگر که به‌طور مستقیم در مطالب این فصل استفاده شده نیز در جای خود ارجاع داده شده است.

در این فصل ابتدا به اثبات مطالبی از مشتقات جردن جبری می‌پردازیم. در ادامه برای هر زیر جبر یکدار و نرم بسته از $\mathcal{A}$ متشکل از عملگرهای روی فضای باناخ X، نشان داده می‌شود اگر C متعلق به $\mathcal{A}$ در $B(X)$ معکوس راست داشته باشد و فضای تولید شده خطی از برد عملگرها با $Rank(۱)$ متعلق به $\mathcal{A}$ در X فشرده باشد، آنگاه تنها نگاشت‌های مشتق‌پذیر در C از $\mathcal{A}$ به $B(X)$ همان نگاشت‌های مشتق‌اند. بخصوص نتیجه برای جبرهای یکدار و نرم بسته از $B(X)$ و همچنین مشبکه‌های زیر فضایی کاملاً توزیع‌پذیر و $\mathcal{J}$ - مشبکه‌های زیرفضایی برقرار است.

در کاربرد مطالب بالا نشان داده می شود که هرمشتق جردن، از چنین جبرهایی به $B(X)$ یک نگاشت مشتق است. برای کلاس بزرگی ازجبرهای بازتابی روی فضای باناخ X، نشان داده می‌شود که هر مشتق

---
[۴] I.n herstein
[۵] M bresar

داخلی می‌تواند به وسیله نگاشت خطی کرانداری که در هر نقطه ثابت C از $\mathcal{A}$ مشتق‌پذیر است مشخص گردد، به شرطی که C در $B(X)$ دارای معکوس راست باشد. همچنین نشان داده می‌شود که اگر $\mathcal{A}$ یک زیرجبرمتعارف از یک C^* -جبر تقریباً متناهی $\mathcal{B}$(بستار اجتماع دنباله ای صعودی ازC^*- زیرجبرها با بعد متناهی) و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-دو مدول باناخ یکدار باشد، آنگاه هرمشتق موضعی کراندار از $\mathcal{A}$ به‌توی $\mathcal{M}$ یک نگاشت مشتق است. به‌علاوه هرنگاشت خطی کراندار از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ که در I (یکه) مشتق‌پذیر باشد، یک نگاشت مشتق است. در قضیه‌ای که بر اساس منبع [۲] تنظیم شده است به ارتباط مشتق‌پذیری در نقطه ثابت و مشتق جردن روی جبرهای باناخ پرداخته شده است.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف، قضایا و نمادهای مورد نیاز در فصل بعد آورده شده است. این تعاریف بر اساس منابع [۳۰،۲۹،۲۸،۲۶،۱] تنظیم شده است. همچنین برای مجموعه‌های خاص نیز نمادهای مختص آنها آورده شده است. در این پایان نامه فضای عملگرها را روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ در نظر گرفته‌ایم.

۱.۱ فضاهای باناخ

تعریف ۱. مجموعه V را یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ گوییم هر گاه دو عمل جمع + وضرب اسکالر. روی آن تعریف شوند بطوری‌که برای هر $x, y, z \in V$ و $\alpha, \lambda \in \mathbb{F}$ داشته باشیم

۱. $x + y \in V$ و $\alpha . x \in V$

۲. $(x + y) + z = x + (y + z)$

۳. $x + y = y + x$

۴. عضو یکتای $0 \in V$ که آن را بردار صفر گوییم وجود داشته باشد به طوری‌که $x + 0 = x$

۵. برای هر $x \in V$ عضو یکتای $-x$ در V موجود باشد به طوری‌که $x + (-x) = 0$

۶. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

۷. $\alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$

۸. $(\alpha+\lambda).x=\alpha.x+\lambda.x$

۹. $(\alpha\lambda).x=\alpha(\lambda.x)$

مثال ۱.۱. فرض کنیم $M_{m\times n}$ مجموعه ماتریسهای $m\times n$ با درایه‌های حقیقی (مختلط) باشد. $M_{m\times n}$ با جمع ماتریسی و ضرب اسکالر یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی (مختلط) است.

تعریف ۲. فرض کنیم V وW فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند،**عملگر خطی** $T:V\to W$ عبارت است از یک نگاشت به طوری‌که برای هر x,y متعلق به V و اسکالر $\alpha\in\mathbb{F}$ داشته باشیم

$$T(x+y)=T(x)+T(y)$$

$$T(\alpha x)=\alpha T(x)$$

اگر $T:V\to W$ یک عملگر خطی باشد، آنگاه

$$Ker(T)=\{x\in V:T(x)=0\}$$

$$Ran(T)=\{T(x)\in W:x\in V\}$$

مثال ۲.۱. ۱-اگر V و W فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. مثالهای بدیهی از عملگرهای خطی نگاشت ثابت صفر $f(x)=0$، و در حالتی که $V=W$ نگاشت همانی $f(x)=x$ هستند.
۲-نگاشت $f:R^2\longrightarrow R^3$ با ضابطه $f(x,y)=(x+y,x-y,y)$ یک نگاشت خطی است .

مثال ۳.۱. فرض کنیم V,W فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و $L(V,W)$ مجموعه نگاشتهای خطی از V به W باشد. برای هر دو نگاشت $f,g\in L(V,W)$ و $\lambda\in\mathbb{F}$ نگاشتهای $f+g:V\longrightarrow W$ و $\lambda f:V\longrightarrow W$ رابا ضابطه‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x):\forall x\in V$$

$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x):\forall x\in V$$

براحتی می توان دید که $L(V,W)$ با جمع وضرب تعریف شده، یک فضای برداری است.

تعریف ۳. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $W \subseteq V$، مجموعه W رایک زیر فضای برداری V گویند هر گاه W با همان اعمال روی V، یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد.

قضیه ۱.۱. $W \subseteq V$ زیر فضای برداری است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in W$ و $\lambda \in \mathbb{F}$ داشته باشیم

$$\lambda x + y \in W$$

اثبات: به مرجع [۳۰] فصل دوم مراجعه شود.

مثال ۴.۱. فرض $V = R^{۲}$ و $W = \{(x, ۰) : x \in R\}$ به وضوح W یک زیرفضای برداری V است.

اگر V یک فضای برداری و $A \subseteq V$، زیر فضای خطی تولید شده توسط A را با $Span(A)$ نمایش می دهیم. که عبارت است از

$$Span(A) = \{\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{F}, x_i \in A, n \in N\}$$

تعریف ۴. فرض V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد . مجموعه بردارهای $\{x_۱, x_۲, ...x_n\}$ متعلق به V را مستقل خطی گوییم هر گاه برای هر $\lambda_۱, \lambda_۲, ..., \lambda_n \in \mathbb{F}$ از تساوی $\lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲ + ... + \lambda_n x_n = ۰$ نتیجه بگیریم که $\lambda_i = ۰ : i = ۱, ۲, ..., n$. در غیر این صورت مجموعه فوق وابسته خطی خواهد بود.

تعریف ۵. زیر مجموعه مستقل خطی A از فضای برداری V رایک پایه برای V گوییم هرگاه

$$Span(A) = V$$

هر فضای برداری مانند V یک پایه دارد. هر دو پایه دلخواه یک فضای برداری عدد اصلی (کاردینال)[۱] برابر دارند. این عدد اصلی را بعد فضای برداری می نامیم، و آن رابا $dimV$ نشان میدهیم. اگر V دارای یک پایه با N عضو باشد، آنگاه V رامتناهی‌البعد می‌نامیم. در این حالت $dimV = N$.

مثال ۵.۱. مجموعه R^n رابه عنوان فضای برداری روی میدان R در نظر می گیریم، بردارهای

$$e_i = (۰, ..., ۰, ۱, ۰, ..., ۰)$$

[۱] Cardinal

را که عنصر یک در آن در مولفه i ام قرار دارد را در نظر می‌گیریم. مجموعه $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ مستقل خطی و تشکیل یک پایه برای R^n می‌دهد. در این صورت $dim(R^n) = n$.

گزاره ۶. در یک فضای برداری n بعدی، حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی n تاست.

اثبات: به مرجع [۳۰] فصل دوم مراجعه گردد.

تعریف ۷. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، یک نرم[2] تابعی است به‌صورت $\|.\| : V \longrightarrow [0, \infty)$ به‌طوریکه دارای شرایط زیر باشد

۱. برای هر $x \in V$، $\|x\| \geqslant 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۲. برای هر $x \in V$ و $\alpha \in F$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳. برای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلثی)

توجه ۸. اگر شرط $\|x\| = 0$ آنگاه $x = 0$ برقرار نباشد به تابع فوق یک شبه نرم می‌گویند.

تعریف ۹. اگر V یک فضای برداری روی میدان F و $\|.\|$ ، یک نرم دلخواه روی V باشد، آنگاه فضای برداری V را یک فضای نرم‌دار گویند و آن را با $(V, \|.\|)$ نمایش می‌دهیم.

در ادامه همه فضاهای برداری را روی میدان اعداد مختلط در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱۰. دنباله $\{lbracex_n\}$ را در فضای برداری نرم دار V همگرا گوییم هرگاه $x \in V$ موجود باشد به طوری‌که: $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$

دنباله $\{x_n\}$ را **کوشی** گوییم اگربرای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مانند $N = N(\varepsilon)$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $m, n \geq N$ داشته باشیم

$$\| x_m - x_n \| < \varepsilon$$

تعریف ۱۱. فضای نرم داری را که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد کامل گوییم و آن را فضای **باناخ** [3] می‌نامیم.

---
[2] Norm

[3] Banach

مثال ۶.۱. فرض کنیم l_1 گردایه همه دنباله های حقیقی $x = (x_1, x_2, ...)$ باشد بطوری که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid < \infty$$

l_1 همراه با اعمال جبری

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...), \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ...)$$

یک فضای برداری است. علاوه بر این اگر برای هر $x \in l_1$ تعریف کنیم $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid$. در این صورت $\|.\|_1$ یک نرم روی l_1 است. اکنون نشان می دهیم که l_1 یک فضای باناخ است.

برای این منظور، فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله ای کوشی در l_1 باشد. یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مانند $N = N(\varepsilon)$ وجود دارد بطوری که برای هر $m, n > N$ داشته باشیم: $\|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon$. در نتیجه، عددی مانند $M > 0$ وجود دارد بطوری که به ازای هر n، $\|x_n\|_1 \leq M$. به ازای هر n فرض کنیم $x_n = (x_1^n, x_2^n, ...)$. به ازای هر $m, n \geq N$ از نابرابری های

$$\mid x_i^n - x_i^m \mid \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mid x_i^n - x_i^m \mid = \| x_n - x_m \|_1 < \varepsilon$$

نتیجه می شود که به ازای هر اندیس i ،دنباله‌ی اعداد حقیقی $\{x_i^n\}$ دنباله ای کوشی است. به ازای هر i فرض کنیم $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$. چون به ازای هر $n \geq N$ و هر p داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \mid x_i \mid &\leq \sum_{i=1}^{p} \mid x_i - x_i^n \mid + \sum_{i=1}^{p} \mid x_i^n \mid \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} \mid x_i - x_i^n \mid + \| x_n \|_1 \\
&= \lim_{m\to\infty} (\sum_{i=1}^{p} \mid x_i^m - x_i^n \mid) + \| x_n \|_1 \leq \varepsilon + M < \infty
\end{aligned}$$

پس $x = (x_1, x_2, ...) \in l_1$.همچنین با توجه به اینکه اگر$m, n \geq N$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{p} \mid x_i^n - x_i^m \mid \leq \| x_n - x_m \|_1 < \varepsilon$$

به ازای هر p و $n > N$ خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{p} \mid x_i - x_i^n \mid = \lim_{m\to\infty} (\sum_{i=1}^{p} \mid x_i^m - x_i^n \mid) \leq \varepsilon$$

بنابراین به ازای هر $n > N$ نابرابری $\| x - x_n \|_1 < \varepsilon$ برقرار است واز این رو، دنباله $\{x_n\}$ درl_1 به x همگراست، یعنی l_1 یک فضای باناخ است.

۲.۱ فضاهای هیلبرت [۴]

تعریف ۱۲. اگر V یک فضای برداری مختلط باشد، تابع $\prec .,. \succ: V \times V \to \mathbb{C}$ ازدو متغیر مختلط را یک ضرب داخلی[۵] بر V می‌نامیم هر گاه

۱. $\prec .,. \succ$ نسبت به متغیر اول خطی باشد یعنی به ازای هر $x, y, z \in V$ و هردوعدد مختلط α, β داشته باشیم $\prec \alpha x + \beta y, z \succ = \alpha \prec x, z \succ + \beta \prec y, z \succ$

۲. به ازای هر $x, y \in V$، $\prec x, y \succ = \overline{\prec y, x \succ}$

۳. به ازای هر $x \in V$ داشته باشیم $\prec x, x \succ \geq 0$ و $\prec x, x \succ = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$

قضیه ۲.۱. اگر V فضایی با ضرب داخلی باشد، آنگاه را بطه $\| x \| = \prec x, x \succ^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی V تعریف می‌کند.که آن را نرم القایی به وسیله ضرب داخلی می‌نامیم .

اثبات: به مرجع [۲۶] یا [۲۹] مراجعه گردد.

تعریف ۱۳. فضای هیلبرت عبارت است از یک فضای برداری H روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ همراه با یک ضرب داخلی به طوری که تحت نرم القا شده توسط ضرب داخلی خود کامل باشد.

مثال ۷.۱. فضای $\mathbb{C}^n$ هراه با ضرب داخلی تعریف شده در زیر یک فضای هیلبرت است.

$$\langle h, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} h_i \overline{g_i} : \forall h = (h_1, h_2, ..., h_n), g = (g_1, g_2, ..., g_n) \in \mathbb{C}^n$$

مثال ۸.۱. اگر $H = L^2([0,1])$ ،بطوری که

$$L^2([0,1]) = \{ f : f \text{ اندازه پذیر } \mid (\int_0^1 | f |^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} < \infty \}$$

در این صورت H همراه با نرم القا شده توسط ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

$$\| f \| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$$

---

[۴] Hilbert

[۵] Inner product

تعریف ۱۴. اگر H یک فضای هیلبرت روی میدان $\mathbb{C}$ باشد.و M زیر فضای بسته از H آنگاه عملگر $P : H \to M$ که به هر نقطه از H نزدیکترین نقطه از M را نظیر میکند، **تصویرمتعامد** H روی Mگوییم و آن را با P_M نشان می دهیم.

تعریف ۱۵. اگر H یک فضای هیلبرت باشد و M زیر فضای آن و $L \in B(H)$ (فضای عملگرهای خطی وکراندار ازH بهH)آنگاه M را نسبت به L پایا گوییم هر گاه داشته باشیم

$$L(M) \subseteq M$$

تعریف ۱۶. اگر H یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه دو بردار x, y را متعامد [۶] گوییم و می‌نویسیم $x \perp y$ هر گاه $\prec x, y \succ = ۰$

اگر H یک فضای هیلبرت باشد و $S \subseteq H$، آنگاه $S^{\perp} = \{h \in H : h \perp s : \forall s \in S\}$

تعریف ۱۷. یک ایزومتری جزئی عملگری مانند $W : H \longrightarrow H$ است بطوری که

$$\forall h \in kerW^{\perp} :\| Wh \| = \| h \|$$

$kerW^{\perp}$ را فضای اولیه و برد W، $R(W)$ را فضای ثانویه گویند.

تعریف ۱۸. فرض کنیم K, H فضاهای هیلبرت باشند و $A \in B(H, K)$.عملگر $B \in B(K, H)$ را الحاقی [۷]، A گوییم هر گاه داشته باشیم

$$< Ah, k > = < h, Bk >: \forall h \in H, \forall k \in K$$

عملگر B یکتاست و آن را با A^* نشان می دهیم.

تعریف ۱۹. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. Hرا جدایی‌پذیر [۸]گوییم هر گاه دارای یک زیرمجموعه چگال[۹] شمارش‌پذیر باشد.

---

[۶] Orthogonal
[۷] Adjoint
[۸] Separable
[۹] Dense

مثال ۹.۱. فرض کنیم R مجموعه اعداد حقیقی باشد. فضای برداری $R^۲$ همراه با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است

$$\forall(x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲) \in R^۲ :\prec (x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲) \succ= x_۱x_۲ + y_۱y_۲$$

اگر Q مجموعه اعداد گویا باشد، به‌وضوح $Q \times Q$ شمارش‌پذیر و در $R^۲$ چگال است. پس $R^۲$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیراست.

۳.۱ جبرهای باناخ و باناخ مدولها [۱۰]

تعریف ۲۰. جبر $\mathcal{A}$، فضای برداری $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ است بطوریکه برای ضرب $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$: . تعریف شده روی آن و به ازای هر $x, y, z \in \mathcal{A}$ و هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{F}$ دارای خواص زیر باشد

۱. $xy \in \mathcal{A}$ و $(xy)z = x(yz)$

۲. $x(y + z) = xy + xz$

۳. $(x + y)z = xz + yz$

۴. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

تعریف ۲۱. فضای نرم‌دار $\mathcal{A}$ را یک جبر نرم‌دار گوییم هرگاه یک جبر بوده وبرای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\| xy \|\leq\| x \|\| y \|$$

تعریف ۲۲. جبر $\mathcal{A}$ را یکدارگوییم هر گاه دارای عضوی مانند ۱ باشد به طوری‌که برای هر $x \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$۱x = x۱ = x$$

همچنین جبر $\mathcal{A}$ را تعویض‌پذیر گوییم هر گاه برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم: $xy = yx$

[۱۰] Module

تعریف ۲۳. جبر نرم‌دار کامل $\mathcal{A}$ را یک جبر باناخ می‌گوییم.

مثال ۱.۰.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این صورت $B(X)$ با جمع وضرب به صورت ترکیب نگاشتها یک جبر باناخ یکدار است.

تعریف ۲۴. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد، $x \in \mathcal{A}$ را وارون‌پذیر راست (چپ) گوییم هرگاه عضوی متعلق به $\mathcal{A}$، که آن را با $x^{-۱}$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد بطوری‌که

$$xx^{-۱} = ۱ \ (x^{-۱}x = ۱)$$

اگر عضوی وارون پذیر چپ و راست باشد ، وارون‌پذیر نامیده می‌شود. وارون یک عنصر در صورت وجود یکتاست.

تعریف ۲۵. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. مجموعه $I \subseteq \mathcal{A}$ را یک ایده آل چپ از $\mathcal{A}$ گوییم، هرگاه I یک زیر جبر $\mathcal{A}$ باشد و

$$\forall a \in \mathcal{A} \, , x \in I : ax \in I$$

به شکل مشابه می توان ایده‌آل راست را نیز تعریف کرد.

تعریف ۲۶. فرض $\mathcal{A}$ یک جبر باشد. مرکز $\mathcal{A}$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$C(\mathcal{A}) = \{z \in \mathcal{A} : zx = xz : \forall x \in \mathcal{A}\}$$

تعریف ۲۷. عنصر p متعلق به جبر $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ را خود توان گوییم هر گاه داشته باشیم: $p^۲ = p$

لم ۲۸. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبریکدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد.اگر $p \in \mathcal{A}$ خود توان باشد، آنگاه $۱ - p$ نیز خود توان است.

اثبات: فرض $P \in \mathcal{A}$ خود توان باشدآنگاه داریم

$$(۱ - p)^۲ = ۱ - ۱p - ۱p + p^۲$$

$$= ۱ - p - p + p$$

$$= ۱ - p$$

قضیه ۳.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار با عضو یکه ۱ و $x \in \mathcal{A}$، به طوری‌که $\|x\| < ۱$ آنگاه $(۱ - x)$ در $\mathcal{A}$ وارون پذیر است و

$$(۱ - x)^{-۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n$$

اثبات: اگر $\|x\| = ۰$ آنگاه $x = ۰$ وبوضوح $۱ - x$ وارون‌پذیر است. بنابراین فرض کنیم $\|x\| = r$ و $۰ < r < ۱$ برای $n < m$، قرار می‌دهیم : $s_n = \sum_{k=۰}^{n} (x)^k$ آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\|s_m - s_n\| &= \| \sum_{k=n+۱}^{m} x^k \| \\
&\leq \sum_{k=n+۱}^{m} \|x^k\| \\
&\leq \sum_{k=n+۱}^{\infty} \|x\|^k \\
&\leq \|x\|^{n+۱} + \|x\|^{n+۲} + \|x\|^{n+۳} + ... \\
&= \|x\|^{n+۱}(۱ + \|x\| + ...) \\
&= \frac{r^{n+۱}}{۱ - r}
\end{aligned}$$

و چون $۰ < r < ۱$ پس مقدار بدست آمده وقتی که n به سمت بی نهایت میل می کند به سمت صفر میل خواهد کرد. بنابراین s_n یک دنباله کوشی است که به مجموع زیر همگراست

$$a = \sum_{k=۰}^{\infty} x^k$$

حال برای هر n خواهیم داشت

$$s_n x = \sum_{k=۰}^{n} x^{k+۱} = s_{n+۱} - ۱$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to ۰} s_n x &= \lim_{n \to \infty} (s_{n+۱} - ۱) \\
&= \sum_{k=۰}^{\infty} x^k - ۱
\end{aligned}$$

از این رو

$$\begin{aligned} a(۱ - x) &= \sum_{k=۰}^{\infty} x^k - ax \\ &= \sum_{k=۰}^{\infty} x^k - (\sum_{k=۰}^{\infty} x^k)x \\ &= \sum_{k=۰}^{\infty} x^k - \lim_{n\to\infty} s_n x \\ &= \sum_{k=۰}^{\infty} x^k - \sum_{k=۰}^{\infty} x^k + ۱ \\ &= ۱ \end{aligned}$$

بطور مشابه می توان نشان داد $(۱ - x)a = ۱$ بنابراین

$$(۱ - x)^{-۱} = a = \textstyle\sum_{k=۰}^{\infty} x^k$$

به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می رسد.

نتیجه ۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ یکدار با عضو یکه ۱ باشد و $x \in \mathcal{A}$ بطوری که $\|x - ۱\| < ۱$ آنگاه xدر $\mathcal{A}$ وارون‌پذیر است و

$$(x)^{-۱} = \textstyle\sum_{k=۰}^{n}(۱ - x)^k$$

تعریف ۲۹. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهایی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ را همسانریخت [۱۱] گوییم هر گاه نگاشت ϕ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ وجود داشته باشد بطوری که

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) : \forall a, b \in \mathcal{A}$$

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) : \forall a, b \in \mathcal{A}$$

اگر ϕ ایزومتری(یک به یک) و پوشا باشد ، ϕ را یکریختی [۱۲] گوییم.

---

[۱۱] Homeomorphism

[۱۲] Isomorphism

تعریف ۳۰. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ فضاهای نرمدار باشند، در این صورت عملگر خطی $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ را کراندار گوییم اگر $C > ۰$ که$C \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ میدان اعداد حقیقی) موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\| T(x) \| \leq C \| x \|$$

تعریف ۳۱. اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ فضاهای نرمدار روی میدان $\mathbb{C}$ باشند آنگاه عملگرخطی $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ را در $x_۰$ متعلق به دامنه T پیوسته گوییم اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ موجود باشد به طوری‌که اگر $\| x - x_۰ \| < \delta$ آنگاه $\| T(x) - T(x_۰) \| < \varepsilon$

قضیه ۴.۱. اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ فضاهای نرمدار روی میدان $\mathbb{C}$ باشند و $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ یک عملگر خطی باشد آنگاه احکام زیر هم ارزند

۱. Tکراندار است.

۲. Tدر صفر پیوسته است.

۳. Tپیوسته است.

اثبات: ۱ $\Leftarrow$ ۲ فرض $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathcal{A}$ باشد با توجه به کراندار بودن T برای هر عنصر از دنباله داریم

$$\| T(x_n) \| \leq C \| x_n \|$$

حال فرض کنیم $x_n \longrightarrow ۰$ از تر کیب رابطه $\lim \| x_n \| = ۰$ با رابطه بالا داریم

$$\lim \| T(x_n) \| = ۰$$

واین یعنی T در صفر پیوسته است.

۲ $\Leftarrow$ ۳ باتوجه به اینکه در فضاهای نرم دار داریم

$$\lim(x_n - x) = ۰ \Leftrightarrow \lim x_n = x$$

واز اینکه $\parallel T(x)-T(y)\parallel=\parallel T(x-y)\parallel$ پیوستگی T بی درنگ نتیجه می شود.

۳ ⇐ ۱ فرض کنیم T کراندار نباشد یعنی $\parallel T\parallel=\infty$ در این صورت دنباله ای مانند $\{x_n\}$ در $\mathcal{A}$ هست به طوری‌که به ازای هر n،

$$\parallel T(x_n)\parallel\geq n,\ \ \parallel (x_n)\parallel=۱$$

حال به ازای هر n قرار می دهیم $y_n=\frac{x_n}{n}$ و ملاحظه می کنیم که رابطه $\frac{۱}{n}=\parallel (y_n)\parallel$ مستلزم $lim\, y_n=۰$ می باشد. در این صورت بنا بر پیوستگی T باید $(y_n)=۰$ و این با نابرابری زیر که به ازای هر n برقرار است مغایرت دارد.

$$\parallel T(y_n)\parallel=n^{-۱}\parallel T(x_n)\parallel\geq ۱$$

بنابراین ، $\parallel T\parallel<\infty$ و اثبات قضیه تمام است.

مجموعه تمام عملگرها از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ را با $\mathcal{L}(\mathcal{A},\mathbb{F})$ که در آن $\mathbb{F}$ میدان اعداد حقیقی یا مختلط است نشان می‌دهیم. و مجموعه تمام عملگرهای کراندار از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ را با $B(\mathcal{A},\mathcal{B})$ نشان می‌دهیم (در حالت خاص $B(\mathcal{A},\mathcal{A})$ را با $B(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم)که با نرم زیر یک فضای نرمدار است

$$\parallel T\parallel=\sup\{\parallel T(x)\parallel\ :\ \parallel x\parallel=۱, x\in\mathcal{A}\}$$

تعریف ۳۲. اگر $\mathcal{A}$ فضایی نرمدار باشد فضای باناخ $B(\mathcal{A},\mathbb{C})$ را دوگان $\mathcal{A}$ گوییم وآن را با $\mathcal{A}^*$ نشان می‌دهیم یعنی از تمام توابعی مانند $f:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ تشکیل شده است که خطی و کراندارند. اعضای $\mathcal{A}^*$ را تابعک خطی کراندار می‌گوییم.

اگر X یک فضای باناخ باشد دوگان آن رابا X^* نشان می‌دهیم. همچنین می‌توان دوگان دوم X را نیز به شیوه مشابه تعریف کرد.

اگر X یک فضای باناخ روی میدان $\mathbb{C}$ باشد، نگاشت $\widehat{x}:X^*\longrightarrow\mathbb{C}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\widehat{x}(f)=f(x):\forall f\in X^*$$

اگر X^{**} دوگان دوم X (دوگان X^*) باشد، به‌وضوح $\widehat{x}\in X^{**}$. نگاشت $x\longrightarrow\widehat{x}$ یک ایزومتری بین فضاهای X وX^{**} است که آن را یک نگاشت طبیعی می‌گویند.

تعریف ۳۳. فضای باناخ X را بازتابی گوییم هر گاه $X \cong X^{**}$. یعنی نگاشت $x \longrightarrow \widehat{x}$ پوشا باشد.

قضیه ۵.۱. هان باناخ[۱۳]: فرض کنیم X یک فضای باناخ و A یک زیر فضای خطی از آن باشد. اگر $\rho_\circ$ یک تابعک خطی کراندار روی A باشد، آنگاه تابعک خطی کراندار ρ روی X وجود دارد بطوری که روی A، $\rho = \rho_\circ$ و روی X داریم $\|\rho_\circ\| = \|\rho\|$. به عبارت دیگر برای هرتابعک خطی کراندار مانند $\rho_\circ$ روی زیر فضای خطی A، توسیعی مانند ρ به X وجود دارد.

تعریف ۳۴. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باشد، عنصر $x \in \mathcal{A}$ راجبری گوییم اگر در یک چند جمله‌ای غیر صفر مانند $P(t)$ با ضرایب در $\mathbb{F}$ صدق کند.

تعریف ۳۵. اگر F یک میدان باشد، آن را یک میدان بسته جبری گوییم هر گاه هر چند جمله ای با یک متغیر و با حداقل درجه ۱ و با ضرایب در F در آن ریشه داشته باشد. یک میدان بسته جبری را نمی‌توان به میدان‌های بزرگتر توسعه داد.

مثال ۱۱.۱. فرض R میدان اعداد حقیقی باشد، بوضوح R میدان بسته جبری نیست. برای مثال چند جمله ای $x^۲ + ۱$ ریشه های خود را در R اختیار نمی کند.
فرض $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد، $\mathbb{C}$ میدان بسته جبری است چون هر چند جمله ای در آن ریشه های خود را اختیار می کند.

باناخ مدولها

یکی از مهمترین ساختارهای جبری مدول‌ها هستند. گروههای آبلی، فضاهای برداری و حلقه ها، که ساختارهای جبری آشنا هستند همگی در قالب مدول‌ها جای می‌گیرند.

تعریف ۳۶. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبرروی میدان $\mathbb{F}$ و $\mathcal{M}$ فضایی برداری روی $\mathbb{F}$ باشد. $\mathcal{M}$ را همراه با ضرب اسکالر $\mathcal{A} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$: . $\mathcal{A}$ -مدول چپ می‌نامیم اگر

۱. برای هر دو عضو از $\mathcal{M}$ مثل x, y و هر عضو از $\mathcal{A}$ مثل a، $a(x+y) = ax + ay$

۲. برای هر عضو از $\mathcal{M}$ مثل x و هر دو عضو از $\mathcal{A}$ مثل a, b ، $(a+b)x = ax + bx$

Hahn banach[۱۳]

۳. برای هر عضو از $\mathcal{M}$ مثل x و هر دو عضو از $\mathcal{A}$ مثل a, b ، $(ab)x = a(bx)$

۴. به ازای هر $\lambda \in \mathbb{F}, a \in \mathcal{A}\ , m \in \mathcal{M}$ داشته باشیم $(\lambda a)m = a(\lambda m) = \lambda(am)$

اگر $\mathcal{A}$ یک جبر یکدار با یکه ۱ باشد و به ازای هر $x \in \mathcal{M}$، $1x = x$ آنگاه $\mathcal{M}$ را $\mathcal{A}$- مدول چپ یکانی می‌نامیم.

تذکر: مانند تعریف $\mathcal{A}$ -مدول چپ(یکانی) می‌توانیم $\mathcal{A}$ -مدول راست (یکانی) را نیز تعریف کنیم.
$\mathcal{M}$ را $\mathcal{A}$ - مدول یا $\mathcal{A}$-دو مدول (یکانی) گوییم، هر گاه هم $\mathcal{A}$-مدول راست (یکانی) باشد وهم $\mathcal{A}$-مدول چپ(یکانی).

مثال ۱.۱۲. فرض کنیم $B(X)$ فضای عملگرهای خطی کراندار از X به X و $\mathcal{A}$ زیرجبری از آن باشد، می توان $B(X)$ را به عنوان یک $\mathcal{A}$-دو مدول در نظر گرفت که در آن عمل ضرب $\mathcal{A}$ در $B(X)$ همان ترکیب دو نگاشت خطی می‌باشد، یعنی برای هر $T \in \mathcal{A}$ و هر $S \in B(X)$ داریم

$$T.S(x) = T \circ S(x) = T(S(x)) : \forall x \in X$$

تعریف ۳۷. هر گاه $\mathcal{A}$ یک جبر نرمدار و $\mathcal{M}$ یک فضای برداری نرم دار باشد آنگاه $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$ -مدول چپ نرمدار است هر گاه $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$ -مدول چپ باشد و $k > 0$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $a \in \mathcal{A}$ و هر $m \in \mathcal{M}$، داشته باشیم

$$\| am \| \leq k \| a \| \| m \|$$

و همچنین $\mathcal{M}$ را $\mathcal{A}$-مدول راست نرمدار گوییم هر گاه $k > 0$ موجود باشد بطوری‌که برای هر $a \in \mathcal{A}$ و هر $m \in \mathcal{M}$، داشته باشیم

$$\| ma \| \leq k \| m \| \| a \|$$

$\mathcal{M}$ را $\mathcal{A}$-دو مدول نرمدار می‌نامیم هر گاه هم $\mathcal{A}$-مدول چپ نرمدار و هم $\mathcal{A}$-مدول راست نرمدار باشد.

تعریف ۳۸. $\mathcal{A}$ -دو مدول نرمدار$\mathcal{M}$ راباناخ $\mathcal{A}$ -دو مدول گوییم هر گاه$\mathcal{A}$ و$\mathcal{M}$ هر دو فضاهای باناخ باشند.