بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه کردستان
دانشکده‌ی علوم پایه
گروه ریاضی

عنوان :

حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از چندجمله‌ایهای متعامد

پایان نامه

کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی

نویسنده : **سجاد یاوری عظیم**

استاد راهنما : **دکتر امجد علی پناه**
استاد مشاور : **دکتر کمال شانظری**

بهمن ماه ۱۳۸۷

کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات ، ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه کردستان است .

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

خداوند بزرگ را شکر که در سایهٔ لطف و رحمتش توانستم این پایان نامه را به انتها برسانم. در نگارش این پایان نامه استادانی گرانمایه و دوستانی چند دخیل بودند و من وظیفهٔ خود می دانم که از همهٔ این عزیزان قدردانی و سپاسگزاری نمایم. از آن جمله‌اند آقای دکتر امجد علی پناه استاد راهنما که در طول این دوره زحمات بسیاری کشیده‌اند و از هیچ کوششی بری اینجانب کوتاهی نکرده‌اند و نیز از آقای دکتر کمال شانظری که در طول دوره کارشناسی ارشد از راهنمایی‌های ارزنده ایشان بهره گرفتم.

در پایان، از تمام دوستان عزیزی که در انجام این کار مرا یاری کرده‌اند، سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان نامه با استفاده از روش گالرکین بر اساس چند جمله‌ای‌های متعامد به حل عددی انواع معادلات انتگرال، معادله انتگرال – دیفرانسیل جمعیت و معادله دیفراسیل با شرایط اولیه پرداخته می شود. در ادامه این پایان نامه ماتریس‌های عملیاتی برای چند جمله‌ای‌های متعامد لژاندر و چبی شف ساخته می شوند. در این روش با تقریب توابع بر حسب چند جمله‌ای‌های متعامد انواع این مسائل را به یک سری معادلات جبری خطی تبدیل می کنیم که این نوع معادلات خطی را با روش‌های تکراری حل می کنیم. در ادامه مثال‌های عددی گوناگونی را با دو چند جمله‌ای متعامد لژاندر و چبی شف حل کرده و خطای مربوط به آنها را محاسبه می کنیم.

واژگان کلیدی: معادلات انتگرال، معادلات دیفرانسیل، چند جمله‌ای‌های متعامد، ماتریس‌های عملیاتی و معادله جمعیت.

فهرست

۳ چند جمله‌ای‌های متعامد

۴ حل عددی معادلات انتگرال

فصل اول

مقدمه

امروزه اکثر مسائل علوم و مهندسی را با توجه به پیچیدگی مدل مربوطه با روش‌های تقریبی حل می کنند. تقریب تابع، یکی از مهمترین مسائل در زمینه ریاضیات کاربردی و مهندسی می باشد. این تقریب باید به گونه‌ای باشد که با حجم عملیات کمتری به دقت خوبی برسد. لذا برای تقریب مسائلی که به صورت یک معادله دیفرانسیلی ظاهر می گردند با توجه به شکل و خصوصیات آن، روش‌های زیادی بوجود آمده‌اند. از جمله این روشها می توان به روش‌های المان محدود [۱] تفاضلات متناهی [۲]، روش‌های طیفی [۳] و غیره اشاره کرد. هر کدام از این روش‌ها یک خانواده از روش‌های متنوع می باشند، که دارای مزایا و معایب خاص خود بوده و با توجه به خصوصیات هر روش برای مسائل ویژه‌ای بکار می روند.

اگر چه روش اِلمان‌های محدود را می توان جزء آنالیز عددی دانست، اما در عمل توسط مهندسین رشته سازه برای حل مسائل در ابعاد بالا بکار می رود. اولین مقاله در مورد روش‌های اِلمان‌های محدود توسط ریاضیدان مشهور کورانت [۴] در سال ۱۹۴۳ برای حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه شد، اما به دلیل حجم عملیات بالا، این روش در آن زمان مورد توجه قرار نگرفت. همچنین اولین کتاب در مورد اِلمان‌های محدود در سال ۱۹٦۷ توسط

[۱] Finite element methods

[۲] Finite difference

[۳] Spectral methods

[۴] Richard Courant

زینکویچ و چانگ [۱] منتشر شد.

روش‌های تفاضلات متناهی نیز یکی از روش‌های کارا و مؤثر برای حل معادلات با مشتقات جزئی می باشند، که به طور وسیعی بکار می روند. این روش مشتقات تابع را در نقاط گسسته تقریب می زند و مسائل خطی را به دستگاه معادلات خطی تنک [۵] تبدیل می کند. اما این روش دارای مرتبه دقت پایین است و برای رسیدن به دقت مطلوب، دستگاه معادلات بزرگی را باید حل کرد. همچنین این روش تقریب تابع مورد نظر را فقط در یک سری از نقاط بدست می آورد [۲].

روش‌های طیفی، خانواده ای بزرگ از روش‌ها به منظور حل معادلات عملگری می باشند که در دو دهه اخیر بطور وسیعی گسترش یافته است. این روش‌ها برای حل مسائل علوم و مهندسی بسیار کارا و مؤثر می باشند. اولین الگوریتم‌های مربوط به روشهای طیفی در سال ۱۹۳۸ بوسیله $Lanczos$ ارائه شد [۳].

در روش‌های طیفی عملگرهای توصیف کننده سیستم را با استفاده از پایه‌های کلاسیک نظیر فوریه، انواع چند جمله‌ای‌های متعامد و غیر متعامد و توابع قطعه‌ای پیوسته و همچنین ماتریس‌های عملیاتی مناسب مربوط به پایه‌ها، تبدیل به یک دستگاه معادلات جبری خطی یا غیر خطی می کنند[۷—۴]، سپس با روش‌های مناسبی به حل دستگاه معادلات می پردازند.

پایه‌هایی که برای روش‌های طیفی بکار می روند را می توان به دو گروه پایه‌های متعامد و غیر متعامد تقسیم کرد. گروه پایه‌های متعامد را نیز می توان به سه دستهٔ چند جمله‌ای‌های متعامد [۸—۶]، توابع مثلثاتی، توابع قطعه‌ای پیوسته (بلاک—پالس [۹]، والش [۵] و پایه‌های ترکیبی [۱۰]، هار [۱۱] و ...) تقسیم بندی کرد. از جمله پایه‌های غیر متعامد می توان به چند جمله‌ای‌های درونیاب اشاره کرد. در این رساله در مورد چند جمله‌ای‌های متعامد بحث خواهیم کرد.

به طور کلی روش‌های طیفی را به سه دسته گالرکین [۶]، روش تاو [۷] و هم مکانی [۸] تقسیم بندی می کنند.

روش گالرکین، در این روش پایه‌ها به طریقی ساخته می شود که در شرایط مرزی عملگرها صدق کنند [۱۲و۱۳]. این روش بیشتر در روش اِلمان‌های محدود به کار می رود.

روش تاو، این روش در حقیقت تغییر یافته روش گالرکین است که برای اولین بار در سال ۱۹۳۸ به وسیله

[۵] Sparce

[۶] Galerkin method

[۷] Tau method

[۸] Collocation method

$Lanczos$ [۳] معرفی شد. کاربرد این روش بیشتر در مسائل خطی با ضرایب ثابت می باشد. در مرجع [۱۴] پرند و رزاقی، با استفاده از روش تاو معادله ولترای مدل جمعیت را حل کرده‌اند. همچنین در مرجع [۱۵] با استفاده از این روش معادلات خطی فردهلم انتگرال—دیفرانسیل مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است.

روش هم مکانی، این روش ساده ترین نوع از روش‌های باقیمانده وزنی یا به اختصار (WRM) می باشد. در مرجع [۱٦] $Kreiss$ و $Oliger$ برای اولین بار روش هم مکانی را برای مسائل مشتقات جزئی به کار بردند. همچنین $Orszag$ نیز از این روش‌ها به طور وسیعی استفاده کرده و این روش‌ها را روش‌های شبه طیفی [۹] نامید [۱۷]. بعد از این، روش‌های هم مکانی را شبه طیفی نیز می گویند. این روش‌ها دارای دقت بالا بوده و به سادگی برای مسائل مختلف قابل اعمال می باشد.

به طور کلی این روش‌ها را به دو دسته کلاسیک و غیر کلاسیک تقسیم می کنند، که در آن روش‌های شبه طیفی کلاسیک بر اساس چند جمله‌ای‌های متعامد و توابع مثلثاتی و روشهای شبه طیفی غیر کلاسیک بر اساس چند جمله‌ای‌های متعامد غیر کلاسیک به کار می روند.

در فصل دوم، مفاهیم و تعاریف مقدماتی حاصل ضرب داخلی و نظریه تقریب را به طور مختصر بیان نموده وسپس بسط توابع را در فضای $L^2[a,b]$ بیان می کنیم. همچنین به معرفی بعضی از روش‌های باقیمانده وزنی می پردازیم.

در فصل سوم، ابتدا روش تولید چند جمله‌ای‌های متعامد را با استفاده از دو روش رودریگه [۱۰] و روش گرام—اشمیت [۱۱] توضیح داده و به یادآوری قضایایی در مورد چند جمله‌ای‌های متعامد می پردازیم. سپس به معرفی چند جمله‌ای‌های متعامد لژاندر پرداخته و رابطه بازگشتی سه جمله‌ای و ویژگی‌های آنها را بیان کرده و ماتریس عملیاتی انتگرال آن را به دست می آوریم. در ادامه چند جمله‌ای‌های متعامد چبی شف و ویژگی‌های مربوط به آن را معرفی نموده و ماتریس عملیاتی انتگرال چبی شف را نیز به دست می آوریم. در پایان انواع چند جمله‌ای‌های متعامد کلاسیک را در جدولی می آوریم.

در فصل چهارم، ابتدا انواع معادلات انتگرال را معرفی کرده و سپس به حل عددی آنها با استفاده از روش گالرکین و با استفاده از پایه‌های متعامد لژاندر و چبی شف پرداخته و در پایان چند مثال عددی می آوریم و خطای مربوط به آنها را محاسبه می کنیم.

---

[۹] Pseudospectral

[۱۰] Rodrigue

[۱۱] Gram-Schmidt

در فصل پنجم به حل عددی معادله انتگرال – دیفرانسیل جمعیت پرداخته و آنرا با استفاده از پایه‌های متعامد لژاندر انتقال داده شده حل می کنیم.

فصل دوم

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۲−۱ مقدمه

در این فصل، فضای حاصل ضرب داخلی و نرم القا شده توسط این فضا را تعریف می کنیم. همچنین با ارائه قضایایی خاصیت‌هایی را در مورد نرم‌ها بیان می کنیم. در ادامه مجموعه‌های متعامد و متعامد یکه کامل را تعریف می کنیم و همچنین به طور خلاصه نظریه تقریب و بسط توابع را می آوریم. در ادامه این فصل، روش‌های باقیمانده وزنی و انواع آنرا معرفی می کنیم.

۲−۲ فضای حاصل ضرب داخلی

تعریف: اگر روی فضای برداری X یک نرم تعریف شده باشد، گوئیم X یک فضای برداری نرم دار است. اگر X یک فضای برداری نرم دار باشد، برای هر $x, y \in X$ قرار می دهیم

$$d(x,y) = \|x-y\|,$$

آنگاه d متر تولید شده توسط نرم $\|.\|$ نامیده می شود. پس هر فضای برداری نرم دار یک فضای برداری متریک است.

فضای $C[a, b]$، این فضا شامل همه توابع حقیقی پیوسته روی بازه $[a, b]$ می باشد، این فضا نرم دار است و در این فضا نرم‌های مختلفی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \qquad (i)$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \qquad (ii)$$

$$\|f\|_\infty = sup\ |f(x)| \qquad (iii)$$

فضای $L^p[a, b]$، برای $1 \leq p < \infty$، شامل همه توابع حقیقی انتگرال پذیر لبگ می باشد که $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$. این فضا یک فضای نرم دار است که نرم آن به صورت زیر تعریف می شود

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

اگر $p = 2$ باشد آنرا فضای انرژی گویند.

تعریف: فضای برداری نرم دار X را یک فضای باناخ گویند، هر گاه هر دنبالهٔ کوشی روی فضای X همگرا باشد. شایان ذکر است که $L^p[a, b]$ یک فضای باناخ [1] است و $\|.\|_p$ به اختصار نرم$-p$ نامیده می شود.

تعریف: اگر $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ دنباله ای در فضای نرم دار X باشد، گوئیم $\sum_{n=1}^\infty x_n$ در X به $\overline{x}$ همگراست هر گاه دنباله $s_k = \sum_{j=1}^k x_j$ به $\overline{x}$ همگرا باشد، یعنی $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^k x_j = \overline{x}$.

تعریف: سری $\sum_{n=1}^\infty x_n$ را در X همگرای مطلق گویند هر گاه $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ همگرا باشد.

تعریف: تابع (حقیقی یا مختلط) $<,>$ را روی $X \times X$ یک ضرب داخلی گوئیم هر گاه بازای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha, \beta \in C$ دارای خواص زیر باشد

الف$-$ $<\alpha x + \beta y, z> = \alpha <x, z> + \beta <y, z>$

ب$-$ $\overline{<x, y>} = <y, x>$

ج$-$ $<x, x> \geq 0$

د$-$ $<x, x> = 0$ اگر وفقط اگر $x = 0$.

تعریف: فضای خطی X را همراه یک ضرب داخلی یک فضای ضرب داخلی گفته می شود.

[1] Banach space

تعریف: فرض کنید که X یک فضای ضرب داخلی باشد، در این صورت نرم تولید شده توسط فضای ضرب داخلی را یک نرم القائی گویند و به صورت زیر تعریف می شود،

$$\forall x \in X, \qquad \|x\| = \sqrt{<x,x>}.$$

قضیه (نامساوی کوشی –شوارتز)– برای هر y,x در فضای ضرب داخلی X داریم

$$|<x,y>|^2 \leq <x,x><y,y>.$$

اثبات– بنابر خاصیت نرم‌ها داریم، بازای هر $\beta \in C$، $\|x-\beta y\| \geq 0$. بنابراین

$$\|x-\beta y\|^2 = <x-\beta y, x-\beta y> = <x,x> - \overline{\beta} <x,y> - \beta <y,x> + \beta^2 <y,y>$$

حال اگر قرار دهیم $\beta = \frac{<x,y>}{\|y\|^2}$، آنگاه

$$\|x-\beta y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{|<x,y>|^2}{\|y\|^2} - \frac{|<x,y>|^2}{\|y\|^2} + \frac{|<x,y>|^2}{\|y\|^2}$$

بنابراین

$$\|x-\beta y\|^2 = \frac{\|x\|^2\|y\|^2 - |<x,y>|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

لذا نتیجه می شود $|<x,y>|^2 \leq <x,x><y,y>$.

قضیه: فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد آنگاه برای هر $x,y \in X$ داریم

الف– (نامساوی کوشی –شوارتز) $\qquad |<x,y>| \leq \|x\|\|y\|$

ب– (نامساوی مثلثی) $\qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ج ـ (قانون متوازی الاضلاع) $\qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$

مثال. فرض کنید $X = C[a,b]$ باشد، در این صورت بازاء هر $f,g \in X$ و $w(x) > 0$ بازای هر $x \in X$، اگر تعریف کنیم

$$< f,g >= \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx,$$

آنگاه به سادگی نشان داده می شود که تعریف فوق تمام خواص حاصل ضرب داخلی را دارا می باشد و به علاوه

$$\|f\|^2 =< f,f >= \int_a^b w(x)f^2(x)dx.$$

تعریف: فضای حاصلضرب داخلی X را یک فضای هیلبرت [۲] گوییم هر گاه X نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی ($\|x\| = \sqrt{< x,x >}$) یک فضای باناخ باشد.

تعریف: فرض کنیم x و y دو بردار در فضای ضرب داخلی X باشند، در این صورت گوئیم x بر y متعامد [۳] است هر گاه

$$< x,y >= 0,$$

و اگر دو بردار x و y متعامد باشند، در این صورت می نویسیم $x \perp y$ و چنانچه $A \subset X$ آنگاه مجموعه $A^\perp$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A^\perp = \Big\{x \in X | \forall y \in A, < x,y >= 0\Big\}.$$

تعریف: فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی و $A \subset X$ باشد، در این صورت A یک مجموعه متعامد است اگر به ازای هر $x,y \in A$ و $x \neq y$، $x \perp y$.

بردار صفر بر همه بردارهای عضو X متعامد است و تنها برداری است که این ویژگی را دارد.

تعریف: مجموعه $A \subset X$ را متعامد نرمال (یکه) [۴] گوئیم هر گاه A متعامد باشد و به ازای هر $x \in A$، $\|x\| = 1$.

مثال– در فضای $L^2[-1,1]$، $\Big\{\frac{2n+1}{2}P_n(x)\Big\}$ یک مجموعه متعامد یکه است که در آن $P_n(x)$ چند جمله‌ای متعامد لژاندر می باشند.

چند جمله‌ای‌های متعامد لژاندر را در فصل سوم به طور کامل توضیح می دهیم.

[۲] Hilbert space

[۳] Orthogonal

[۴] Orthonormal set

قضیه: اگر A یک مجموعهٔ متعامد یکه از فضای ضرب داخلی X باشد، در این صورت به ازای هر $x, y \in A$ و $x \neq y$ داریم $\|x-y\| = \sqrt{2}$.

اثبات. به ازای هر $x, y \in A$ داریم

$$\begin{aligned} \|x-y\|_2^2 &= < x-y, x-y > \\ &= < x, x > - < x, y > - < y, x > + < y, y > \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2, \end{aligned}$$

لذا

$$\|x-y\|_2 = \sqrt{2}.$$

نتیجه: اگر A یک مجموعهٔ متعامد یکه باشد، آنگاه $0 \notin A$.

قضیه: هر زیر مجموعهٔ متعامد یکه از یک فضای ضرب داخلی مستقل خطی است [۱۸].

اثبات. فرض A یک مجموعه متعامد یکه باشد و $\sum_{x\in A} c_x x = 0$. حال با اعمال ضرب داخلی طرفین نسبت به $y \in A$ داریم

$$0 = < \sum_{x\in A} c_x x, y > = \sum_{x\in A} c_x < x, y > = c_y \|y\|^2,$$

در نتیجه

$$\forall y \in A, \quad c_y = 0.$$

تعریف: فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی و A یک زیر مجموعهٔ متعامد یکه از X و $y \in X$ باشد. در این صورت سری $\sum_{x\in A} < x, y > x$، را سری فوریه [۵] متناظر y می گوئیم و $< x, y >$ ها را ضرایب فوریه گویند.

مثال ـ فرض کنید $X = L^2[-\pi, \pi]$ و $A = \left\{\frac{sin(n\pi x)}{\pi}\right\}_{n=1}^{\infty} \bigcup \left\{\frac{cos(n\pi x)}{\pi}\right\}_{n=1}^{\infty}$، آنگاه بازای هر $y = f \in X$ داریم

$$\sum_{x\in A} < x, y > x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n cos(n\pi x) + b_n sin(n\pi x)\big),$$

[۵] Fourier series

که در آن

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(n\pi x)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(n\pi x)dx.$$

مثال ـ فرض کنید $X = L^2[-1,1]$ و $\left\{P_n(x)\right.$ چند جمله‌ای‌های لژاندر نرمال $\left. | \frac{P_n(x)}{\frac{2}{2n+1}}\right\} = A$ آنگاه بازای هر $f \in L^2[-1,1]$، سری فوریه f به صورت زیر است

$$\sum_{x\in A} < f, x > x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

که در آن

$$< f, x >= a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)dt.$$

قضیه (نا مساوی بِسِل [۶]**)**[۱۹]: اگر A یک مجموعهٔ متعامد یکه از فضای ضرب داخلی X باشد آنگاه به ازای هر $y \in X$ داریم

$$\sum_{x\in A} | < x, y > |^2 \leq \|y\|^2.$$

قضیه: اگر A یک زیر مجموعهٔ متعامد یکه از فضای هیلبرت باشد آنگاه همگرایی سری فوریه $\sum_{x\in A} < x, y > x$ مستقل از ترتیب جملات (عناصر) A می باشد.

۲ــ۳ مجموعه های متعامد یکه کامل

در این بخش مفهوم متعامد یکه کامل در یک فضای ضرب داخلی را معرفی می کنیم. این مفهوم در نظریه تقریب نقش اساسی را ایفا می کند.

تعریف: فرض کنیم A یک زیر مجموعه از فضای ضرب داخلی X باشد، در این صورت گوئیم A کامل است هر گاه $A^{\perp} = \{0\}$.

[۶] Bessel inequality

یا به عبارت دیگر

$$\exists y \in X : \forall x \in A, \ \ \langle y, x \rangle = 0 \implies y = 0.$$

تعریف: فرض کنیم A یک مجموعه متعامد یکه از یک فضای ضرب داخلی X با شد، در این صورت A را یک پایه متعامد نرمال برای X نامیم اگر برای هر $y \in X$، داشته باشیم

$$y = \sum_{x \in A} < x, y > x.$$

قضیه[۱۹]: اگر A یک زیر مجموعهٔ متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آنگاه شرایط زیر معادلند.

الف ـ برای هر $y \in H$، اتحاد پارسوال برقرار است. $\quad (\|y\|^2 = \sum_{x \in A} | < x, y > |^2)$

ب ـ مجموعهٔ A کامل است.

ج ـ A یک پایهٔ متعامد یکه برای H است.

مثال ـ مجموعهٔ $A = \{sin(x), sin(2x), \dots, sin(nx) \dots\}$ یک مجموعهٔ متعامد روی فضای $L^2[-\pi, \pi]$ می باشد ولی یک مجموعهٔ کامل (پایه) نیست، زیرا اگر

$$y = f(x) = 1,$$

آنگاه

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sin(nx) \quad s.t. \quad c_n =< 1, sin(nx) >= \int_{-\pi}^{\pi} sin(nx)dx = 0,$$

بنابراین به ازای هر $x \in A$، $< 1, x >= 0$، اما $0 \neq 1$ است، پس بنابر تعریف A کامل نیست.

نتیجه: تعامد شرط لازم برای کامل بودن است.

مثال— مجموعه چند جمله‌ای‌های لژاندر در فضای هیلبرت $L^2[-1, 1]$، کامل است.

تعریف: فرض کنیم X یک فضای هیلبرت باشد در این صورت، X تفکیک پذیر است اگر و فقط اگر هر زیر مجموعه متعامد یکه از X شمارش پذیر باشد.