بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش جبر

عنوان:

چگونگی محاسبه‌ی عمق استانلی ایده‌آل‌های تک جمله‌ای

دانشجو:

مهدی نیازی

استاد راهنما:

دکتر علی سلیمان جهان

استاد مشاور:

دکتر محمد زرین

خرداد ۱۳۹۲

رساله پایان‌نامه کارشناسی ارشدرشته ریاضی گرایش جبر

تحت عنوان:

چگونگی محاسبه‌ی عمق استانلی ایده‌آل‌های تک جمله‌ای

استاد راهنما:
دکتر علی سلیمان جهان — امضاء:

استاد مشاور:
دکتر محمد زرین — امضاء:

داور داخلی:
دکتر امیر مافی — امضاء:

داور خارجی:
دکتر هیرو صارمی — امضاء:

چکیده

هدف اصلی این تحقیق، محاسبه‌ی عمق استانلی ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای و ارتباط تجزیه‌های استانلی با پالایش‌های اول و همچنین افرازها می‌باشد. نشان می‌دهیم اگر $I \subset J$ ایده‌آل‌های تک جمله‌ای در حلقه چندجمله‌ای‌های $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ باشند، آنگاه عمق استانلی I/J را می‌توان در تعداد متناهی مرحله محاسبه کرد. همچنین $fdepth$ یک ایده‌آل تک جمله‌ای که بر حسب پالایش‌های اول آن ایده‌آل تعریف می‌شود را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که $fdepth$ را نیز می‌توان در تعداد متناهی مرحله محاسبه کرد. البته هر دوی این حالت‌ها با در نظر گرفتن افرازهای مناسب از مجموعه‌های مرتب جزئی بدست می‌آیند.

واژه‌های کلیدی: تجزیه استانلی، ایده‌آل مدرج، ایده‌آل تک‌جمله‌ای، پالایش اول، مجتمع سادکی، پوسته‌پذیری، مدول تمیز، افرازها.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۸۲ ریچارد استانلی[۱] [۲۵] حدسی در مورد مدول‌های $\mathbb{N}^n$ -مدرج شده روی حلقه‌ای $\mathbb{Z}^n$ -مدرج بیان کرد. این حدس که امروزه آن را حدس استانلی بر روی تجزیه‌های استانلی می‌نامند اخیرا توسط افراد زیادی مطالعه شده است. به عنوان مثال می‌توان به [۲۱] و [۲۴] و مراجع آنها اشاره کرد. یک سال بعد استانلی در کتابش حدسی را در مورد مجتمع‌های سادکی کوهن — مکاولی مطرح نمود [۲۶]. در سال ۲۰۱۰ هرزوگ[۲] سلیمان جهان و یاسمی نشان دادند که این حدس حالت خاصی از حدس استانلی بر روی تجزیه‌های استانلی است [۱۳]. بیشتر مطالب این پایان‌نامه در راستای مرجع [۱۴] است.

فرض کنید $S = K[x_1, ..., x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با n متغیر روی میدان K و همچنین $J \subset I$ ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای باشند. آن‌گاه S حلقه‌ای $\mathbb{Z}^n$ -مدرج و $M = I/J$ یک S -مدول $\mathbb{N}^n$ -مدرج است. در این صورت یک تجزیه به فرم $\mathcal{D} : M = \bigoplus_{i=1}^{n} u_i K[Z_i]$ از M را یک تجزیه‌ی استانلی گویند اگر u_i یک تک‌جمله‌ای و $Z_i \subset \{x_1, ..., x_n\}$. عمق استانلی $\mathcal{D}$ عبارت است از کمترین تعداد اعضای Z_i و آن را با $sdepth(\mathcal{D})$ نشان می‌دهیم. همچنین عمق استانلی M را با $sdepth(M)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$sdepth(M) = max\{sdepth(\mathcal{D})|\ \mathcal{D}\ is\ a\ decomposition\ of\ M\}.$$

حدس استانلی بیان می‌کند که برای هر S -مدول $\mathbb{Z}^n$ -مدرج مانند M همواره $depthM \leq sdepthM$.

هدف اصلی در این پایان‌نامه این است که نشان دهیم عمق استانلی مدولهای به فرم $M = I/J$ را می‌توان در تعداد متناهی مرحله حساب کرد.

فرض کنید $a = (a_1, ..., a_n)$ و $b = (b_1, ..., b_n)$ دو بردار در $\mathbb{Z}^n$ باشند. می‌گوییم $a \leq b$ اگر و تنها اگر به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، داشته باشیم $a_i \leq b_i$. هرگاه $a = (a(1), ..., a(n)) \in \mathbb{N}^n$ آنگاه $x^a = x_1^{a(1)} x_2^{a(2)} ... x_n^{a(n)}$ را یک تک‌جمله‌ای گویند.

فرض کنید $I = (x^{a_1}, x^{a_2}, ..., x^{a_m})$ و $J = (x^{b_1}, x^{b_2}, ..., x^{b_t})$ دو ایده‌آل تک‌جمله‌ای در S باشند و داشته

[۱] Richard Stanley
[۲] Herzog

باشیم $J \subset I$. $g \in \mathbb{N}^n$ را برداری ثابت در نظر می‌گیریم بطوریکه به ازای بعضی از iها، $1 \leq i \leq m$، داشته باشیم $a_i \leq g$ و به ازای هر j، $1 \leq j \leq t$، داشته باشیم $b_j \leq g$. آنگاه مجموعه‌ی مرتب جزئی وابسته به I/J را با $P^g_{I/J}$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P^g_{I/J} = \{a \in \mathbb{Z}^n \ : \ x^a \in I/J, \ \ a \leq g\}.$$

در فصل سوم نشان می‌دهیم که هر افراز از $P^g_{I/J}$ به صورت اجتماعی از بازه‌ها یک تجزیه‌ی استانلی از I/J القا می‌کند. همچنین نشان می‌دهیم که برای هر تجزیه‌ی استانلی از I/J، یک افراز از $P^g_{I/J}$ وجود دارد بطوریکه عمق استانلی آن بزرگتر یا مساوی عمق استانلی تجزیه‌ی استانلی داده شده می‌باشد. از این دو مطلب نتیجه می‌گیریم که عمق استانلی با در نظر گرفتن افرازهای مختلف از $P^g_{I/J}$ می‌تواند محاسبه شود.

هرگاه $m = (x_1, ..., x_n)$ ایده‌آل مدرج ماکسیمال S باشد، با استفاده از افرازهای P^g_m، بیرو[1] و دیگران [۶] نشان دادند به ازای هر n

$$sdepth(m) = \lceil n/2 \rceil.$$

فرض‌کنید R حلقه‌ای $\mathbb{Z}^n$-مدرج و M یک R-مدول $\mathbb{N}^n$-مدرج باشد. اگر $\mathcal{F} : <0>= M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$ یک زنجیر از زیرمدول‌های $\mathbb{Z}^n$-مدرج از M باشد در این صورت $\mathcal{F}$ یک پالایش اول از M نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i = 1, \ldots, r$ ایده‌آل اول $P_i \in spec(R)$ موجود باشد بطوریکه

$$M_i/M_{i-1} \cong \frac{S}{P_i}(-a_i)$$

که در آن $a_i \in \mathbb{Z}^n$. مجموعه ایده‌آل‌های اول ظاهر شده $\{P_1, \cdots, P_m\}$ در این پالایش اول را با $supp(\mathcal{F})$ نشان می‌دهیم و آن را محمل $\mathcal{F}$ می‌نامیم. به علاوه قرار می‌دهیم

$$fdepth\mathcal{F} = min\{dimS/P \ : \ P \in supp(\mathcal{F})\} \quad and$$

$$fdepthM = max\{fdepth\mathcal{F} \ : \ \mathcal{F} \ is \ a \ prime \ filteration \ of \ M\}$$

[1] Biro

نشان خواهیم داد که $fdepthM$ یک کران پایین برای $depthM$ و $sdepthM$ است. به عبارت دیگر $fdepthM \leq depthM, sdepthM$.

در فصل چهار نشان می‌دهیم که هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای مقطع کامل در حدس استانلی صدق می‌کند. همچنین نشان خواهیم داد اگر I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای مقطع کامل باشد آنگاه $depth(\frac{S}{I}) = fdepth(\frac{S}{I})$. در نهایت حدس سلیمان جهان [۲۱] که در خصوص یک کران پائین برای نظم کاستن منفرد یک مدول $\mathbb{Z}^n$ -مدرج است را مطالعه و نشان خواهیم داد که یک افراز مانند $P_{I/J}^g = \cup_{i=1}^r [c_i, d_i]$ از $P_{I/J}^g$ وجود دارد که به ازای هر i، $|c_i| \leq reg(I/J)$. که در آن $|c|$ به معنی مجموع مولفه‌های بردار c است.

فصل ۱

تعاریف مقدماتی وپیش‌نیازها

۱.۱ ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای و ایده‌آل‌های اول وابسته آنها

در این فصل تعاریف و قضایایی از جبر جابجایی و جبر پیشرفته را که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند، یادآور می‌شویم. در سرتاسر این پایان‌نامه، منظور ازحلقه‌ی R، حلقه‌ای جابجایی و یکدار است.

قرارداد. در این پایان‌نامه $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای با n متغیر روی میدان K می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم $\mathbb{Z}_+^n = \{a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n | a_i \geq 0\}$. به ازای هر $a \in \mathbb{Z}_+^n$، $u = x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ را یک تک‌جمله‌ای می‌نامیم و مجموعه‌ی همه‌ی تک‌جمله‌ای‌های در S را با $Mon(S)$ نمایش می‌دهیم. همچنین درجه x^a را به صورت $\deg(x^a) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ تعریف می‌کنیم.
مجموعه‌ی $Mon(S)$ یک K-پایه S است. به عبارت دیگر، برای هر چندجمله‌ای $f \in S$ یک ترکیب خطی یکتا با ضرایب در K از تک‌جمله‌ای‌های $Mon(S)$ یافت می‌شود، بطوریکه

$$f = \sum_{u \in \mathrm{Mon}(S)} a_u u \quad \text{s.t.} \quad a_u \in K$$

در این صورت محمل چندجمله‌ای f را که با $supp(f)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از

$$supp(f) = \{u \in Mon(S) | a_u \neq 0\}.$$

f را همگن از درجه‌ی j گویند هرگاه برای هر $u \in supp(f)$، $\deg u = j$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض می‌کنیم u و v دو تک‌جمله‌ای باشند در این صورت کوچکترین مضرب مشترک u و v را با نماد $lcm(u, v)$ و بزرگترین مقسوم علیه مشترک u و v را با نماد $\gcd(u, v)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. ایده‌آل $I \subset S$ را ایده‌آل تک‌جمله‌ای می‌نامیم هرگاه به وسیله تک‌جمله‌ای‌ها تولید شود.

مثال ۴.۱.۱. با توجه به تعریف ایده‌آل تک‌جمله‌ای، $I =< x_1x_2x_3, x_1x_2^3 >\subset K[x_1, x_2, x_3]$ یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای است اما $J =< x_1 - x_2, x_1x_3 >$ ایده‌آل تک‌جمله‌ای نیست.

گزاره ۵.۱.۱. اگر I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشد آنگاه مجموعه‌ی $\mathcal{N}$ از تک‌جمله‌ای متعلق به I یک K-پایه I است.

اثبات. رجوع شود به [۱۶، گزاره ۱.۱.۲]. □

گزاره ۶.۱.۱. ایده‌آل I در حلقه چندجمله‌ای S یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای است اگر و تنها اگر برای هر چندجمله‌ای $f \in S$ داشته باشیم

$$f \in I \Leftrightarrow \ supp(f) \subseteq I.$$

اثبات. رجوع شود به [۱۶، گزاره ۱.۱.۳]. □

یادآوری: طبق قضیه پایه هیلبرت $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه نوتری است، لذا هر ایده‌آل در S متناهی مولد است. در نتیجه، هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای در S متناهی مولد می‌باشد.

گزاره ۷.۱.۱. فرض کنیم $\{u_1, \ldots, u_m\}$ مولدهای ایده‌آل تک‌جمله‌ای I باشند. آنگاه تک‌جمله‌ای v در I است اگر و تنها اگر تک‌جمله‌ای $w \in S$ بطوریکه $v = wu_i$ به ازای $1 \leq i \leq m$، وجود داشته باشد.

اثبات. رجوع شود به [۱۶، گزاره ۱.۱.۵]. □

گزاره ۸.۱.۱. هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای $I \subset S$ یک مجموعه مولد مینیمال یکتا از تک‌جمله‌ای‌ها دارد که آن را با $G(I)$ نشان می‌دهیم.

اثبات. رجوع شود به [۱۶، گزاره ۱.۱.۶]. □

تذکر ۹.۱.۱. فرض کنیم $I, J \subset S$ دو ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشند. در این صورت $I + J$، IJ و $I \cap J$ نیز ایده‌آل تک‌جمله‌ای هستند و داریم:

$$G(I \cap J) \subseteq \{\mathrm{lcm}(u, v) | u \in G(I), v \in G(J)\}$$

و

$$G(IJ) \subset G(I)G(J),\ G(I + J) \subset G(I) \cup G(J).$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم I, J دو ایده‌آل باشند. مجموعه‌ی $I : J = \{f \in S | fg \in I, \forall\ g \in J\}$ ایده‌آلی از S است که آن را ایده‌آل دو نقطه‌ای I نسبت به J می‌گوییم.

گزاره ۱.۱.۱۱. فرض کنید I و J دو ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشند. در این صورت $I : J$ نیز یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای است و $I : J = \bigcap_{v \in G(J)} I : (v)$.
علاوه بر این، $\{u/\gcd(u,v) : u \in G(I)\}$ یک مجموعه مولد برای $I : (v)$ است.

اثبات. رجوع شود به [۱۶، گزاره ۱.۲.۲].

□

تعریف ۱.۱.۱۲. برای ایده‌آل $I \subseteq S$ ایده‌آل $\sqrt{I} = \{f \in S | \exists k, \quad f^k \in I\}$ را رادیکال I می‌نامیم. I را ایده‌آل رادیکال می‌نامیم هرگاه $I = \sqrt{I}$.

گزاره ۱.۱.۱۳. اگر $I \subseteq S$ یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشد، آنگاه $\sqrt{I}$ نیز ایده‌آل تک‌جمله‌ای است.

اثبات. رجوع شود به [۱۶، گزاره ۱.۲.۳]. □

تعریف ۱.۱.۱۴. تک‌جمله‌ای $u = x^a \in \mathrm{Mon}(S)$ خالی از مربع نامیده می‌شود اگر مولفه‌های a صفر یا یک باشند.

قرارداد. فرض کنیم $u = x^a$ یک تک‌جمله‌ای باشد. قرار می‌دهیم $\sqrt{u} = \prod_{i, a_i \neq ۰} x_i$، که یک تک‌جمله‌ای خالی از مربع است. بنابراین بدیهی است که تک‌جمله‌ای u خالی از مربع است اگر و تنها اگر $u = \sqrt{u}$.

گزاره ۱.۱.۱۵. فرض کنیم I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشد. آنگاه $\{\sqrt{u} : u \in G(I)\}$ یک مجموعه مولد برای $\sqrt{I}$ است.

اثبات. رجوع شود به [۱۶، گزاره ۱.۲.۴]. □

تعریف ۱.۱.۱۶. ایده‌آل تک‌جمله‌ای $I \subseteq S$ خالی از مربع نامیده می‌شود، اگر به وسیله‌ی تک‌جمله‌ای‌های خالی از مربع تولید شده باشد.

نتیجه ۱.۱.۱۷. ایده‌آل تک‌جمله‌ای $I \subseteq S$ خالی از مربع است اگر و تنها اگر $I = \sqrt{I}$.

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنید $S = K[x_۱, \dots, x_n]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها باشد. گوییم $u = x^b$ عاد می‌کند $v = x^a$ را، اگر به ازای هر i، $b_i \leq a_i$.

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنیم M یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از $Mon(S)$ باشد. تک‌جمله‌ای $x^a \in M$ یک عنصر مینیمال از M نامیده می‌شود (نسبت به تقسیم پذیری)، هرگاه $x^b | x^a$ و اگر $x^b \in M$، آنگاه $x^b = x^a$.

تعریف ۱.۱.۲۰. یک ترتیب کلی روی یک مجموعه‌ی P یک ترتیب جزئی $\leq$ روی P است بطوریکه برای هر دو عنصر x, y متعلق به P، داشته باشیم $x \leq y$ یا $y \leq x$.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم S حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان K باشد، یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی S، ترتیب کاملی روی $Mon(S)$ است، بطوریکه

۱. برای هر $u \in Mon(S)$ که $u \neq 1$ داشته باشیم، $1 < u$

۲. اگر $u, v \in Mon(S)$ و $u < v$، آنگاه برای هر $w \in Mon(S)$ داشته باشیم $uw < vw$.

تعریف ۲۲.۱.۱. یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای را از نوع بورل گوئیم اگر در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند.

۱. به ازای هر تک‌جمله‌ای مانند $u \in I$ و $i, j, s \in \mathbb{Z}$ با این شرط که $1 \leq j < i \leq n$ و $s > 0$ بطوریکه $x_i^s \mid u$ یک عدد صحیح مانند $t \geq 0$ وجود داشته باشد بطوریکه $x_j^t(u/x_i^s) \in I$

۲. اگر $P \in Ass(S/I)$ در این صورت jای هست که $P = (x_1, ..., x_j)$.

تعریف ۲۳.۱.۱. یک نمایش از یک ایده‌آل I به صورت $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i$ که Q_iها ایده‌آل‌هایی از S می‌باشد، کاهش‌ناپذیر نامیده می‌شود اگر هیچ یک از ایده‌آل‌های Q_i در این نمایش را نتوان حذف کرد.

قضیه ۲۴.۱.۱. *فرض کنیم $I \subseteq S$ یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشد، آنگاه I دارای نمایشی به صورت $I = \bigcap_{i=1}^m Q_i$ است، که در آن هر Q_i تولید شده توسط توان‌های محضی از متغیرهاست. به عبارت دیگر، هر Q_i به فرم $(x_{i_1}^{a_1}, \ldots, x_{i_k}^{a_k})$ است. به علاوه یک نمایش کاهش‌ناپذیر به این شکل یکتاست.*

اثبات. رجوع شود به [۱۶، قضیه ۱.۳.۱]. □

تعریف ۲۵.۱.۱. یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای تحویل‌ناپذیر نامیده می‌شود، اگر آن را نتوان به صورت اشتراک سره‌ی دو ایده‌آل تک‌جمله‌ای دیگر نوشت. در غیر این صورت، تحویل‌پذیر نامیده می‌شود.

نتیجه ۲۶.۱.۱. ایده‌آل تک‌جمله‌ای I تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر I توسط توان‌های محضی از متغیرها تولید شود.

اثبات. رجوع شود به [۱۶، نتیجه ۱.۳.۲]. □

قضیه‌ی ۲۴.۱.۱ در ترکیب با نتیجه‌ی ۲۶.۱.۱ بیان می‌کند که هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای یک نمایش یکتا به عنوان اشتراکی کاهش‌ناپذیر از ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای تحویل‌ناپذیر دارد.

مثال ۲۷.۱.۱. فرض کنید $I = (x_1^2x_2, x_1^2x_3^2, x_2^2, x_2x_3^2)$.
آنگاه بنا بر نتیجه قبلی، نمایش یکتای I به عنوان اشتراکی از ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای تحویل‌ناپذیر به صورت زیر است:

$$I = (x_1^2, x_1^2x_3^2, x_2^2, x_2x_3^2) \cap (x_2, x_1^2x_3^2, x_2^2, x_2x_3^2) = (x_1^2, x_2^2, x_2x_3^2) \cap (x_2, x_1^2x_3^2)$$

$$= (x_1^2, x_2^2, x_2) \cap (x_1^2, x_2^2, x_3^2) \cap (x_2, x_1^2) \cap (x_2, x_3^2) = (x_1^2, x_2) \cap (x_1^2, x_2^2, x_3^2) \cap (x_2, x_3^2)$$

اگر I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع باشد، ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای تحویل‌ناپذیر ظاهر شده در نمایش I به صورت اشتراک ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر همه به فرم $(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$ هستند، که واضح است همه ایده‌آل‌های اول تک‌جمله‌ای هستند.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و I ایده‌آل سره‌ای از R باشد. ایده‌آل اولی از R مثل P را که شامل I است را ایده‌آل اول مینیمال I می‌نامیم هرگاه ایده‌آل اولی از R مانند J موجود نباشد بطوریکه $I \subseteq J \nsubseteq P$ ومجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های مینیمال I را با $Min(I)$ نشان می‌دهیم.

لم ۲۹.۱.۱. فرض کنید I دارای نمایش کاهش‌ناپذیر از ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر به صورت $I = P_1 \bigcap \dots \bigcap P_m$ باشد. در این صورت $Min(I) = \{P_1,\dots,P_m\}$.

اثبات. رجوع شود به [۱۶، لم ۱.۳.۵]. □

نتیجه ۳۰.۱.۱. اگر I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع باشد. آنگاه $I = \bigcap_{P \in Min(I)} P$ و هر ایده‌آل $P \in Min(I)$ یک ایده‌آل اول تک‌جمله‌ای است.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد. ایده‌آل $Q \subseteq R$ را ایده‌آل اولیه گوئیم هرگاه برای هر $a,b \in R$، اگر $ab \in Q$ و $b \notin Q$، آنگاه $a \in \sqrt{Q}$.

تعریف ۳۲.۱.۱. اگر Q یک ایده‌آل اولیه باشد، و $P = \sqrt{Q}$ یک ایده‌آل اول باشد. آنگاه Q را ایده‌آل P-اولیه گویند.

گزاره ۳۳.۱.۱. ایده‌آل تحویل‌ناپذیر $(x_{i_1}^{a_1},\dots,x_{i_k}^{a_k})$ یک ایده‌آل $(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$-اولیه است.

اثبات. رجوع شود به [۱۶، گزاره ۱.۳.۷]. □

تعریف ۳۴.۱.۱. یک نمایش از یک ایده‌آل I به عنوان اشتراک $I = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ که هر Q_i ایده‌آل P_i-اولیه است، یک تجزیه اولیه I نامیده می‌شود.

تعریف ۳۵.۱.۱. تجزیه اولیه را تجزیه اولیه کاهش‌ناپذیر می‌گوییم، اگر هیچ یک از Q_iها را نتوان در اشتراک حذف کرد و به ازای هر $i \neq j$ داشته باشیم $P_i \neq P_j$. در این حالت هر Q_i مولفه‌ی P_i-اولیه‌ی I است. ایده‌آل‌های $P_1,\dots,P_r$ ظاهر شده در این تجزیه را ایده‌آل‌های اول وابسته I گویند و آن را با $Ass(I)$ نشان می‌دهند.

گزاره ۳۶.۱.۱. مولفه‌های اولیه وابسته به ایده‌آل‌های اول مینیمال I به طور یکتا مشخص می‌شوند.

اثبات. رجوع شود به [۱۶، گزاره ۱.۳.۸]. □

تذکر ۳۷.۱.۱. گزاره ۳۳.۱.۱ ایجاب می‌کند که تجزیه یک ایده‌آل به ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر یک تجزیه اولیه است. البته ممکن است این تجزیه اولیه کاهش‌ناپذیر نباشد.

چون اشتراک تعدادی از ایده‌آل‌های P-اولیه دوباره P-اولیه است، می‌توانیم با قرار دادن اشتراک همه ایده‌آل‌هایی مانند Q_i با شرط $Ass(Q_i) = P$ به جای مولفه P-اولیه I و حذف کردن عامل‌های غیر ضروری به یک تجزیه اولیه کاهش‌ناپذیر رسید.

مثال ۳۸.۱.۱. ایده‌آل

$$I = (x_1^3, x_2^3, x_1^2x_3^2, x_1x_2x_3^2, x_2^2x_3^2)$$

نمایش کاهش‌ناپذیری به صورت اشتراکی از ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر به صورت زیر دارد

$$I = (x_1^3, x_2^2, x_3^2) \cap (x_1^2, x_2) \cap (x_1, x_2^2)$$

چون

$$\mathrm{Ass}(x_1^2, x_2) = \ Ass(x_1, x_2^2) = \{(x_1, x_2)\}.$$

از اشتراک (x_1^2, x_2) و (x_1, x_2^2) ایده‌آل (x_1, x_2)-اولیه (x_1^2, x_1x_2, x_2^2) را به دست می‌آوریم و در نتیجه تجزیه اولیه‌ی کاهش‌ناپذیر $I = (x_1^3, x_2^3, x_3^2) \bigcap (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ به دست می‌آید.

تعریف ۳۹.۱.۱. اگر چه تجزیه اولیه یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای I ممکن است یکتا نباشد، تجزیه اولیه به دست آمده از یک اشتراک کاهش‌ناپذیر از ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر مشابه آنچه در بالا توضیح داده شد، یکتاست. ما این چنین تجزیه‌ای را یک تجزیه اولیه استاندارد I می‌نامیم.

گزاره ۴۰.۱.۱. ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای، ایده‌آل‌های اول تک‌جمله‌ای هستند.

اثبات. رجوع شود به [۱۶، گزاره ۱.۳.۹]. □

گزاره ۴۱.۱.۱. در حلقه نوتری R، برای هر ایده‌آل $I \subset R$،

$$Min(I) \subset \ Ass(I).$$

اثبات. قبل از اثبات حکم، نشان می‌دهیم که اگر P ایده‌آل اولی از حلقه‌ی R باشد که $I \subset P$، آنگاه $P' \in Ass(I)$ موجود است بطوریکه $P' \subset P$. فرض کنیم $I = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ یک تجزیه اولیه کاهش‌ناپذیر برای I باشد که برای هر $1 \leq i \leq n$، $\sqrt{Q_i} = P_i$. بنابراین $I \subseteq \sqrt{I} \subseteq P$. در نتیجه، $\bigcap_{i=1}^{r} P_i \subseteq P$. بنابراین، $1 \leq i \leq n$ موجود است بطوریکه $P_i \subseteq P$ و $P_i \in \ Ass(I)$.

حال فرض می‌کنیم P ایده‌آل اول مینیمال I باشد. در این صورت $I \subseteq P$ لذا طبق آنچه که در قبل نشان دادیم، $P' \in \ Ass(I)$ موجود است بطوریکه $I \subseteq P' \subseteq P$ و چون P اول مینیمال I است نتیجه می‌شود که $P' = P$ و لذا حکم برقرار است. □

۲.۱ حلقه‌ها و مدول‌های مدرج

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و جابه‌جایی باشد و $(R_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های جمعی R باشند. R را حلقه‌ی مدرج گوییم، هرگاه

۱. $R = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} R_i$.
۲. به ازای هر $i,j \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $R_iR_j \subset R_{i+j}$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $R = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ یک حلقه مدرج و M نیز یک R-مدول باشد. در این صورت M را یک مدول مدرج گوییم هرگاه

۱. $M = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ که در آن M_i ها زیرگروههای جمعی M هستند.
۲. به ازای هر $i,j \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $R_iM_j \subset M_{i+j}$

تذکر ۳.۲.۱. M_i را i-امین مولفه همگن M می‌نامیم. هر عنصر $x \in M_i$ را همگن از درجه i می‌نامیم و درجه آن را با $deg\ x$ نشان می‌دهیم و هر عنصر $x \in R_i$ را یک i-فرم در R می‌نامیم. قرارداد می‌کنیم که عنصر صفر همگن از هر درجه‌ای است. توجه کنید که M_i ها و خود M، R_0 مدول نیز هستند.

لم ۴.۲.۱. فرض کنیم $M = \bigoplus\limits_{a\in H} M_a$ یک R-مدول مدرج باشد و $N \subset M$ یک زیرمدول M باشد در این صورت شرایط زیر معادل می‌باشد:

الف) N مدرج است، یعنی $N = \bigoplus\limits_{a\in H}(M_a \bigcap N)$.
ب) N به وسیله عناصر همگن تولید می‌شود.

ج) فرض کنیم $m = \sum m_a$ که $m_a \in M_a$. در این صورت $m \in N$ اگر و تنها اگر برای هر a، $m_a \in N$.

اثبات. رجوع شود به [۱۲، لم ۲.۲.۷]. □

تعریف ۵.۲.۱. زیرمدول $N \subset M$ که در شرایط لم قبل صدق کند را یک زیرمدول مدرج می‌نامیم. یک زیرمدول مدرج از یک حلقه مدرج را یک ایده‌آل مدرج یا یک ایده‌آل همگن می‌نامیم.

مثال ۶.۲.۱. فرض کنیم $S = K[x_1,\ldots,x_n]$ حلقه چندجمله‌ای روی میدان K باشد. یک روش معمول برای مدرج کردن S قرار دادن درجه d_i برای هر متغیر x_i می‌باشد، که $d_1,\ldots,d_n$ اعداد صحیح مثبت می‌باشند. برای
$a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{N}^n$
قرار می‌دهیم $x^a = x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ و $\deg x^a = |a| = a_1d_1 + \cdots + a_nd_n$. در این صورت S را به صورت روبه‌رو مدرج می‌کنیم:

$$S = \bigoplus_{i\geq 0} S_i \quad \text{s.t.} \quad S_i = \bigoplus_{|a|=i} Kx^a$$

و گوییم که S یک حلقه $\mathbb{N}$-مدرج است.

با قرار دادن $S_i = 0$ برای هر $i < 0$، گوییم S یک حلقه $\mathbb{Z}$-مدرج است.

در این حلقه مدرج، ایده‌آل $I \subset S$ مدرج (همگن) است هرگاه چندجمله‌ای‌های همگن $f_۱, \dots, f_r$ در S موجود باشند بطوریکه $I = (f_۱, \dots, f_r)$. با قرار دادن $\deg(f_i) = \delta_i$ ایده‌آل I به صورت زیر مدرج می‌شود:

$$I = \bigoplus_{i \geq ۰} I_i$$

که در آن

$$I_i = I \cap S_i = f_۱ S_{i-\delta_۱} + \cdots + f_r S_{i-\delta_r}.$$

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی مدرج و P یک ایده‌آل اول باشد. در این صورت ایده‌آل مدرج P^* را ایده‌آل تولید شده توسط عضوهای همگن به صورت $a \in P$ تعریف می‌کنیم. واضح است P^* بزرگترین ایده‌آل مدرج شامل در P است و همچنین R/P^* به طور طبیعی ساختار یک حلقه‌ی مدرج را به ارث می‌برد.

لم ۸.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی مدرج باشد آنگاه

الف) برای هر ایده‌آل اول مانندP، ایده‌آل P^* یک ایده‌آل اول است.

ب) فرض کنید M یک مدول مدرج باشد.

(i) اگر $P \in \ supp(M)$ در این صورت، $P^* \in \ supp(M)$.

(ii) اگر $P \in \ Ass(M)$ در این صورت P مدرج، به علاوه P پوچساز و یک عضو همگن نیز می‌باشد.

اثبات. رجوع شود به [۸، لم ۱.۵.۶]. □

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم M یک R مدول باشد. M را آزاد می‌گوییم هرگاه دارای پایه باشد. پایه برای R-مدول آزاد M، مجموعه‌ی B از عناصر M است بطوریکه هر u از M را بتوان به طور یکتا به صورت $u = \sum_{e \in B} x_e e$ نوشت که در آن $x_e \in R$ و به جز تعدادی متناهی، x_eها همگی صفر باشند. اگر

$$|B| = n < \infty.$$

آنگاه $M \cong R^n$. اگر R نوتری باشد، هر دو پایه M کاردینال یکسان دارد که آن را رتبه M گویند.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم R' و R دو حلقه باشند. R' را یک R-جبر گوییم هرگاه همریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow R'$ موجود باشد. ملاحظه می‌کنیم که در این صورت R' یک R-مدول با ضرب مدولی زیر خواهد بود:

$$r \cdot r' = \varphi(r) r' \qquad \forall r \in R, r' \in R'.$$

تعریف ۱۱.۲.۱. اگر R زیرحلقه‌ای از R' باشد R' را یک توسیع از R گوییم.

تذکر ۱۲.۲.۱. اگر R' یک توسیع از حلقه R باشد در این صورت R' به طور طبیعی با همریختی شمول یک R-جبر است. لازم به ذکر است هرگاه K میدان و R' یک K-جبر باشد می‌توانیم فرض کنیم $K \subset R'$ یک حلقه توسیع است. (همریختی ۱-۱)

تعریف ۱۳.۲.۱. جبر R روی میدان K (یا یک حلقه جابجایی) یک جبر مدرج نامیده می‌شود، هرگاه R به عنوان یک حلقه، مدرج باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. R-مدول M را متناهی مولد گوییم هرگاه عناصر $u_1, \dots, u_n \in M$ موجود باشند بطوریکه $M = Ru_1 + \cdots + Ru_n$. یعنی $u \in M$ را بتوان (نه لزوماً یکتا) به صورت زیر نوشت:

$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n \quad \text{s.t.} \quad x_i \in R.$$

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنیم K میدان و $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ یک K-جبر مدرج باشد. R را یک K-جبر استاندارد مدرج گوییم هرگاه R یک K-جبر متناهی مولد باشد که مولدهایش از درجه ۱ است. به عبارت دیگر،

$$R = K[R_1], \ \dim_K R_1 < \infty.$$

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_{n-1} \subset P_n$ یک زنجیر اکید از ایده‌آل‌های اول R باشد. طول این زنجیر برابر n است. بعد حلقه R (بعد کرول) را با $\dim R$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim R = \begin{cases} \sup\{n \geq 0 \mid \text{یک زنجیر اکید به طول } n \text{ از ایده‌آل‌های اول موجود باشد}\} \\ \infty \qquad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

قرارداد: اگر $R = 0$، آنگاه $\dim R = -1$.

مثال ۱۷.۲.۱. اگر R یک حوزه ایده‌آل اصلی باشد، آنگاه $\dim R = 1$، زیرا هر ایده‌آل اول غیر صفر در حوزه‌های ایده‌آل اصلی یک ایده‌آل ماکسیمال است. همچنین اگر R یک میدان باشد واضح است که $\dim R = 0$.

تعریف ۱۸.۲.۱. برای ایده‌آل اول P از R ارتفاع P را با $height(P)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$height(P) = \begin{cases} \sup\{n \in \mathbb{N} \mid P_0 \subset P_1 \subset P_{n-1} \subset P_n = P\} \\ \infty \qquad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تبصره ۱۹.۲.۱. $\dim R = \sup\{height(P) \mid \text{ایده‌آل اولی از } R \text{ است } P\}$.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم M یک R-مدول متناهی مولد باشد. ایده‌آل اول $P \subset R$ یک ایده‌آل اول وابسته‌ی M نامیده می‌شود اگر موجود باشد $x \in M$ بطوریکه $P = Ann(x)$. در این جا $Ann(x)$ پوچساز x است و تعریف می‌شود $Ann(x) = \{a \in R : ax = 0\}$.
مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته M را به صورت $Ass(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید M مدولی روی حلقه تعویض پذیر R باشد. منظور از محمل M، مجموعه‌ی $\{P \in spec(R) : M_P \neq 0\}$ است؛ این مجموعه را با $supp(M)$ یا $supp_R(M)$ نشان می‌دهیم. در اینجا M_P مدول حاصل از موضعی سازی M در P و $spec(R)$ مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R است. بنابراین در حالت کلی مجموعه ایده آل‌های اول مینیمال M، مجموعه عناصر مینیمال $supp(M)$ ، نسبت به رابطه شمول است.

تعریف ۲۲.۲.۱. ایده‌آل اول $P \subset R$، ایده‌آل اول مینیمال M نامیده می‌شود، اگر $M_P \neq 0$، و برای هر ایده‌آل اول Q که $Q \subsetneq P$ داشته باشیم $M_Q = 0$. مجموعه ایده‌آل‌های اول مینیمال M توسط $Min(M)$ نشان داده می‌شود. ملاحظه می‌شود هرگاه I یک ایده‌آل حلقه R باشد آنگاه P ایده‌آل اول مینیمال حلقه $\frac{R}{I}$ است اگر و تنها اگر P ایده‌آل اول مینیمال I باشد.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنیم M مدول با تولید متناهی و ناصفر و $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ یک زنجیر از ایده‌آلهای اول باشد که به ازای هر $i = 0, 1, \ldots, n$، $P_i \in Supp(M)$. ماکسیمال چنین زنجیرهای را با $dimM$ نمایش می‌دهیم. در صورتیکه ماکسیمال موجود نباشد قرار می‌دهیم $dimM = \infty$.
بنابراین برای ایده‌آل اول P از R ارتفاع P نسبت به M را برابر $\dim M_P$ تعریف می‌کنیم. لذا

$$\dim M = \max\{dimR/P \mid P \in supp(M)\}.$$

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنید M یک R- مدول باشد. $x \in R$ را یک مقسوم علیه صفر روی M می‌نامیم هرگاه $0 \neq m \in M$ موجود باشد بطوریکه $xm = 0$.

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنید M یک R -مدول باشد. اگر $x \in R$ یک مقسوم علیه صفر روی M نباشد گوییم که x یک عنصر M -منظم است.

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنید M یک R -مدول باشد. رشته‌ی $x = x_1, \ldots, x_n$ از عناصر R را یک رشته M -منظم گوییم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:
الف) برای هر $1 \leq i \leq n$ ، x_i یک عنصر $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$ منظم باشد.
ب) $M/xM \neq 0$.

تعریف ۲۷.۲.۱. فرض کنید M یک R -مدول باشد. و I ایده‌آلی در حلقه‌ی R باشد. $x_1, \ldots, x_n \in I$ را یک M -رشته منظم ماکسیمال از I گوییم. هرگاه به ازای هر $x_{n+1} \in I$، رشته $x_1, \ldots, x_{n+1}$، یک رشته M -منظم از I نباشد.

قضیه ۲۸.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری ، M یک R -مدول متناهی مولد و I یک ایده‌آل در R باشد بطوریکه $IM \neq M$. در این صورت تمام M -رشته‌های منظم ماکسیمال از I دارای طولی یکسان هستند که این طول را درجه‌ی I در M گوییم و با $grad(I, M)$ نمایش می‌دهیم.*

اثبات. رجوع شود به [۸، قضیه ۱.۲.۵]. □

تذکر ۲۹.۲.۱. اگر $M = IM$، آنگاه قرار می‌دهیم $grad(I, M) = \infty$.

تعریف ۳۰.۲.۱. فرض کنید (R, m) یک حلقه‌ی موضعی نوتری، M یک R -مدول متناهی مولد باشد. در این صورت $grad(m, M)$ را عمق M گوییم. بنابراین در حالتی که (R, m) حلقه‌ی موضعی و نوتری باشد درجه‌ی m روی M، عمق M نامیده می‌شود. و آن را با $depthM$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۱.۲.۱. فرض کنید (R, m) یک حلقه‌ی موضعی و نوتری و $M \neq 0$ یک R -مدول متناهی مولد باشد. در این صورت M را یک R -مدول کوهن-مکاولی گوییم هرگاه $depthM = dimM$. اگر R به عنوان یک R -مدول کوهن-مکاولی باشد در این صورت گوییم R یک حلقه‌ی کوهن-مکاولی است.

به طور کلی حلقه‌ی دلخواه R را کوهن-مکاولی گوییم هرگاه به ازای هر ایده‌آل اول از R حلقه‌ی موضعی R_p کوهن-مکاولی باشد. همچنین یک مدول کوهن-مکاولی مانند M را ماکسیمال گویند هرگاه هم کوهن-مکاولی و هم اینکه $dimR = dimM$.

در حالت کلی M یک مدول کوهن-مکاولی است هرگاه مدول M_m برای هر ایده‌آل ماکسیمال $m \in Supp(M)$ کوهن-مکاولی باشد. اگر I یک ایده‌آل از R مشمول در $Ann(M)$ باشد آنگاه M را می‌توان به عنوان R-مدول یا R/I-مدول در نظر گرفت. به ویژه اگر R یک حلقه‌ی موضعی و M کوهن-مکاولی باشد آنگاه M یک مدول ماکسیمال کوهن-مکاولی روی $R/Ann(M)$ است.

قضیه ۳۲.۲.۱. *فرض کنیم (R, m) یک حلقه موضعی و $M \neq 0$ یک مدول کوهن-مکاولی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) $dimR/P = depthM$ *برای هر* $P \in Ass(M)$.

ب) $grade(I, M) = dimM - dimM/IM$ *برای هر ایده‌آل* $I \subseteq m$.

ج) $x = x_1, x_2, ..., x_n$ *یک* M- *رشته است اگر و تنها اگر* $dimM/xM = dimM - n$.

اثبات. رجوع شود به [۸، قضیه ۲.۱.۲]. □

گزاره ۳۳.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه نوتری و I ، J ایده آلهای آن باشند. و M یک R-مدول متناهی باشد. در این صورت

الف) $grade(I, M) = inf\{depthM_P \ : \ P \in V(I)\}$.

ب) $grade(I \cap J, M) = min\{grade(I, M) \ , \ grade(J, M)\}$.

ج) اگر $x = x_1, ..., x_n$ یک M- رشته در I باشد. در این صورت

$$grade(I/(x), M/xM) = grade(I, M/xM) = grade(I, M) - n.$$

اثبات. رجوع شود به [۸، گزاره ۱.۲.۱۰]. □

گزاره ۳۴.۲.۱. فرض کنیم (R,m) یک حلقه موضعی نوتری و $M \neq 0$ یک R-مدول متناهی باشد. در این صورت هر M-رشته، قسمتی از یک دستگاه از پارامترهای M است. بویژه اینکه در حالت خاص $depthM \leq dimM$.

اثبات. رجوع شود به [۸، گزاره ۱.۲.۱۱ و گزاره ۱.۲.۱۲]. □

تعریف ۳۵.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای تعویض پذیر باشد، و G و M و N، R-مدول و $g : G \longrightarrow M$ و $f : M \longrightarrow N$ همریختی R-مدولی باشند. می‌گوییم که دنباله‌ی $G \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$ دقیق (کامل) است اگر $\operatorname{Im} g = \ker f$.

به طور کلی گوئیم دنباله

$$\cdots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} M^{n+2} \longrightarrow \cdots$$

از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها در جمله‌ی M^r از این دنباله کامل است اگر دنباله‌ی

$$M^{r-1} \xrightarrow{d^{r-1}} M^r \xrightarrow{d^r} M^{r+1}$$

دنباله‌ای کامل باشد. می‌گوییم دنباله کامل است اگر این دنباله در هر جمله‌ی M^rای که هر دو نگاشت d^{r-1} و d^r تعریف شده‌اند کامل باشد.

دنباله‌ی کامل از R-مدول‌ها و R-همریختیها به صورت

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

را دنباله دقیق (کامل) کوتاه می‌نامیم.

قضیه ۳۶.۲.۱. *فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت M تصویر همریخت یک R-مدول آزاد است.*

اثبات. هر R-مدول آزاد با تقریب یکریختی به صورت $\bigoplus_{i\in I} R$ می‌باشد که در آن I می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

اینک فرض کنیم X یک مجموعه مولد برای M باشد یعنی $M =< X >$. (توجه شود که X می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد). همریختی $\varphi : \bigoplus_{i\in X} R \longrightarrow M$ را با ضابطه‌ی

$$\varphi(\{r_i\}_{i\in X}) = \sum_{i\in X} r_i x_i$$

تعریف می‌کنیم که در آن $x_i \in X$. به وضوح φ یک همریختی پوشاست. زیرا اگر $m \in M$ دلخواه باشد، چون X یک مجموعه‌ی مولد برای M است، خواهیم داشت

$$m = \sum_{i\in X} r_i x_i = \varphi(\{r_i\}_{i\in X})$$

بنابراین φ پوشاست. لذا ثابت شد که M تصویر همریخت $\bigoplus_{i\in X} R$ است که یک R مدول آزاد است. □