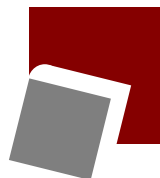


وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوزنگ - زنجان



مفاهیم ریاضی کاشی کاری

پایان نامه کارشناسی ارشد

نرگس اکبری صفا

استاد راهنما:

دکتر رشید زارع نهندي
دکتر علی اکبر یزدان پور

مهر ۱۳۹۳

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به

پدرم

کوهی استوار و حامی من در طول تمام زندگی

مادرم

سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت

برادرانم

فرزاد و فرزاد که همواره در طول تحصیل متحمل زحمتم بودند و تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات و وجودشان مایه

دلگرمی من می باشد.

شکر و قدردانی

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم . ابتدا از استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر رشید زارع نهندي که افتخار شاگردی ایشان را داشتم، به عنوان استاد راهنما که این مقطع تحصیلی را مدیون زحمات ایشان هستم و همواره نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار داده اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم و آرزوی سلامتی و سر بلندی ایشان را همواره دارم.

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نسیم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیاسیم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

از اساتید گرامی و محترم: جناب آقای دکتر بیات، جناب آقای دکتر ذاکر، جناب آقای دکتر خدایی فرو جناب آقای دکتر کمپانی زارع که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از اساتید با کمالات و شایسته: جناب آقای دکتر صادقی بی غم، جناب آقای دکتر چهارسوقی، جناب آقای دکتر یزدان پور، خانم اولیایی و آقای مرادی مسئولین کتابخانه گنبد سلطانیه، خانم میرزاخانی مسئول کتابخانه میراث فرهنگی، آقای واحد پور مسئول امور فرهنگی دانشگاه تحصیلات تکمیلی زنجان و همچنین تمامی دوستان و کسانی که مرا به نوعی در انجام این مهم یاری کردند و از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ نمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

چکیده

بشر از زمانی که محل ثابتی برای اسکان انتخاب کرد، به فکر پوشاندن دیوارها و کف آن محل و سپس زیبایی این پوشش‌ها افتاد. از همان زمان مسئله کاشی‌کاری آغاز می‌شود. در این پایان‌نامه تعریف ریاضی کاشی‌کاری ارائه شده و تحت شرایطی تعداد کاشی‌کاری‌های ممکن محاسبه می‌شود. بررسی‌ها محدود به کاشی‌کاری با چندضلعی‌های منتظم و ستاره‌ای است. حرکات صلب در صفحه که منجر به کاشی‌کاری‌ها می‌شوند، تشکیل یک گروه می‌دهند که همان گروه تقارن‌ها است. گروه تقارن‌ها نیز در مورد کاشی‌کاری‌های مطرح شده بررسی می‌شود. به عنوان یک تمرین عملی، کاشی‌کاری‌های بنای سلطانیه بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: کاشی‌کاری، الگو، گروه تقارن‌ها، یکنواخت، متعدی، ستاره‌ای، ارشمیدسی.

فهرست

پنج	چکیده
۲	پیش‌گفتار
۱۳	۱ مقدمات و پیش‌نیازها
۱۳	۱.۱ تعریف ریاضی کاشی‌کاری
۱۵	۲.۱ واژگان استفاده شده در کاشی‌کاری و کاشی‌ها
۱۷	۳.۱ کاشی‌کاری با تعداد کمی از اشکال کاشی‌ها
۱۸	۴.۱ تقارن
۲۲	۵.۱ گروه‌های متقارن کاشی‌ها
۲۵	۶.۱ کلاس‌های تقارنی
۲۹	۲ کاشی‌کاری‌ها با چندضلعی‌های منتظم و ستاره‌ای
۲۹	۱.۲ کاشی‌کاری‌های منتظم و یکنواخت
۴۳	۲.۲ کاشی‌کاری‌های k -یکنواخت
۵۱	۳.۲ کاشی‌کاری‌های شبه-منتظم
۶۶	۴.۲ کاشی‌کاری‌های هم‌متعدی و یال‌متعدی
۶۸	۵.۲ کاشی‌کاری‌هایی که یال به یال نیستند

۷۹	کاشی کاری‌های ستاره‌ای	۶.۲
۹۲	کاشی کاری‌های برشی	۷.۲
۹۴	کاشی کاری‌ها با رئوس منتظم	۸.۲
۹۸	بسط قطعه‌ها	۹.۲
۱۰۴	رنگ‌آمیزی کاشی کاری‌ها: یکنواخت و ارشمیدسی	۱۰.۲
۱۱۱	بررسی کاشی کاری‌های سلطانیه	۳
۱۱۱	مقدمه	۱.۳
۱۱۴	بررسی کاشی کاری‌ها و تزئینات نمای بیرونی گنبد سلطانیه	۲.۳
۱۱۹	بررسی کاشی کاری‌ها و تزئینات داخلی گنبد سلطانیه	۳.۳
۱۳۹	بررسی کاشی کاری‌ها و تزئینات طبقه‌ی اول	۴.۳
۱۵۷	بررسی کاشی کاری‌ها و تزئینات طبقه‌ی دوم	۵.۳
۱۷۳	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۱۸۰	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	

فهرست تصاویر

۳ مسجد الحمرا	۱
۴ الگوها با نقوش حیوانات و طرح‌بندی‌های بسیار مشابه	۲
۴ الگوهایی به شکل پوست مار	۳
۴ تزئینات نوارهای مشابه	۴
۵ نمونه‌ای از کاشی‌کاری‌های روزگار باستان و ادوار میانی	۵
۶ کاشی‌کاری‌های پرتغال باستان در قرن پانزدهم	۶
۶ کاشی‌کاری‌های مختلف باستانی غالباً از اروپا و شرق میانه	۷
۷ شکل آجرکاری‌های استاندارد با تنوع زیاد	۸
۸ تعدادی سنگ‌فرش خیابانی معمولی	۹
۸ نمونه‌ای از کاشی‌کاری‌های رنگی	۱۰
۹ کاشی‌کاری‌ها با تزئینات پیچیده	۱۱
۹ کاشی‌کاری‌های رنگی در پرتغال	۱۲
۹ کاشی‌کاری‌های برجسته	۱۳
۱۰ تزئینات مغولی	۱۴
۱۰ نمونه‌ای از کاشی‌کاری اشر	۱۵
۱۱ دو نمونه از کاشی‌کاری‌هایی که در طبیعت رخ می‌دهد	۱۶

۱۴	مجموعه‌هایی که به صورت قرص‌های توپولوژیکی نیستند	۱.۱
۱۵	نمونه‌ای از کاشی‌کاری	۲.۱
۱۶	کاشی‌کاری‌های مشابه و هم‌ارز	۳.۱
۱۷	سه کاشی‌کاری منتظم (a) , (b) , (c)	۴.۱
۱۸	دو کاشی‌کاری ۲-الگویی با الگوها چندضلعی‌های محدب	۵.۱
۱۹	دوران حول نقطه O	۶.۱
۱۹	سه نمونه تقارن انتقال	۷.۱
۲۰	سه نمونه تقارن انعکاس	۸.۱
۲۱	دو نمونه تقارن انعکاس-انتقال	۹.۱
۲۲	کاشی‌هایی با گروه دوری	۱۰.۱
۲۲	کاشی‌هایی با گروه ۲-وجهی	۱۱.۱
۲۳	یک کاشی‌کاری تک-الگویی با تقارن‌هایش	۱۲.۱
۲۴	نمونه‌ای از کاشی‌کاری که تقارن انعکاس-انتقال	۱۳.۱
۲۶	(a) و (b) یک کاشی‌کاری الگوپایا و (c) ، (d) یک کاشی‌کاری ۲-الگوپایا	۱۴.۱
۲۷	کاشی‌کاری که راس‌همگون است ولی راس‌پایا نیست	۱۵.۱
۲۸	یک کاشی‌کاری یال‌پایا و یال‌همگون	۱۶.۱
۳۴	۲۱ نوع از رئوس ممکن با کاشی‌های چندضلعی منتظم	۱.۲
۳۶	نمونه‌ای از یک کاشی‌کاری تک‌الگویی که در صفحه گسترده نمی‌شود	۲.۲
۳۷	راس نوع $۳.x.y$ به‌طوری‌که $x \leq y$	۳.۲
۳۷	راس نوع $x \cdot ۵ \cdot y$ و $x \leq ۵$	۴.۲
۳۸	راس نوع $۳.x.y.z$	۵.۲
۳۹	۱۱ نوع کاشی‌کاری ارشمیدسی	۶.۲

۴۰	۷.۲	دو شکل کاشی کاری (۳۴.۰۶)
۴۱	۸.۲	کاشی کاری یکنواخت (۳۰.۶.۳۰.۶) که ممکن با خط‌های افقی بریده شود
	۹.۲	در کاشی کاری یکنواخت (۳۲.۴.۳۰.۴) یال‌های زیگزاگی وجود دارد که در سمت
۴۲		چپ نشان داده شده است.
	۱۰.۲	در کاشی کاری یکنواخت (۳۰.۴.۶.۴) قرص‌هایی وجود دارد که شامل یک ۶-ضلعی
۴۳		و همسایگانش است.
۴۴	۱۱.۲	این کاشی کاری‌ها k_i -یکنواخت هستند.
۴۶	۱۲.۲	۲۰ نوع کاشی کاری ۲-یکنواخت
۴۷	۱۳.۲	۲۰ نوع کاشی کاری ۲-یکنواخت
۵۰	۱۴.۲	مثال‌هایی از کاشی کاری‌های k_i -یکنواخت
۵۲	۱۵.۲	تصویر ۱
۵۳	۱۶.۲	تصویر ۲
۵۳	۱۷.۲	تصویر ۳
۵۴	۱۸.۲	تصویر ۴
۵۵	۱۹.۲	تصویر ۵
۵۶	۲۰.۲	تصویر ۶
۵۶	۲۱.۲	تصویر ۷
۵۷	۲۲.۲	تصویر ۸
۵۸	۲۳.۲	تصویر ۹
۵۹	۲۴.۲	تصویر ۱۰
۵۹	۲۵.۲	تصویر ۱۱
۶۱	۲۶.۲	تصویر ۱۲

۶۲	تصویر ۱۳	۲۷.۲
۶۳	تصویر ۱۴	۲۸.۲
۶۳	تصویر ۱۵	۲۹.۲
۶۴	تصویر ۱۶	۳۰.۲
۶۵	تصویر ۱۷	۳۱.۲
۶۵	تصویر ۱۸	۳۲.۲
۶۷	سه مثال از کاشی کاری های هم متعدی	۳۳.۲
۶۸	کاشی کاری های کپلر	۳۴.۲
۶۹	کاشی کاری ها با چند ضلعی های منتظم غیر یال به یال	۳۵.۲
۷۰	یک کاشی کاری تک الگویی با مثلث های متساوی الاضلاع	۳۶.۲
۷۱	هشت خانواده از کاشی کاری های یکنواخت از صفحه که یال به یال نیستند	۳۷.۲
۷۲	چندین کاشی کاری هم متعدی ۲-یکنواخت	۳۸.۲
۷۲	کاشی کاری های هم متعدی با مثلث های متساوی الاضلاع	۳۹.۲
۷۳	پنج کاشی کاری یک طرفه و هم متعدی با مربع ها از سه اندازه	۴۰.۲
۷۴	پنج مثال از کاشی کاری های یک طرفه و هم متعدی با مربع ها از چهار اندازه	۴۱.۲
		مثال هایی از کاشی کاری های یک طرفه و هم متعدی با مربع هایی از اندازه های پنج، شش و هفت.	۴۲.۲
۷۵	کوچکترین مثال شناخته شده مربع و مستطیل پر شده از مربع ها	۴۳.۲
۷۶	مربع و مستطیل پر شده از مربع	۴۴.۲
۷۷	یک ساختار برای یک کاشی کاری از صفحه با مربع ها از اندازه های مختلف	۴۵.۲
۷۹	یک قسمت بزرگ از صفحه می تواند با مربع ها پوشانده شود.	۴۶.۲
۸۰	۵-ضلعی ستاره ای ۵-پر کپلر	۴۷.۲

۴۸.۲	یک ستاره $2n$ - ضلعی	۸۱
۴۹.۲	کاشی کاری های یکنواخت با چندضلعی های منتظم و ستاره ای	۸۲
۵۰.۲	هفده نوع کاشی کاری یال به یال یکنواخت شامل چندضلعی های ستاره ای	۸۳
۵۱.۲	هفده نوع کاشی کاری یال به یال یکنواخت شامل چندضلعی های ستاره ای	۸۳
۵۲.۲	هفده نوع کاشی کاری یال به یال یکنواخت شامل چندضلعی های ستاره ای	۸۴
۵۳.۲	کاشی کاری های یکنواخت با چندضلعی های ستاره ای غیر یال به یال	۸۵
۵۴.۲	کاشی کاری های ۲- یکنواخت یال به یال با چندضلعی های منتظم و ستاره ای	۸۶
۵۵.۲	کاشی کاری های یکنواخت و هم متعدی	۸۷
۵۶.۲	یک قطعه از کاشی ها که در هر کاشی گروه متقارن D_5 است.	۸۸
۵۷.۲	چندضلعی ستاره ای پنج پر و ستاره های ۱۰- نقطه ای	۸۹
۵۸.۲	یکی از کاشی کاری های کیپلر که بیشتر مورد توجه است.	۸۹
۵۹.۲	ساختار کاشی کاری های دسکر	۹۰
۶۰.۲	لوزی ای مانند شکل (۵۹.۲) مورد (a) که داخل آن با چندضلعی های متفاوت پر شده است.	۹۱
۶۱.۲	هیولای خار دار که شامل دو ستاره ۱۰- پر ترکیب شده می باشد	۹۱
۶۲.۲	تعدادی کاشی کاری برشی برای n - ضلعی های منتظم	۹۳
۶۳.۲	تعداد دیگری از کاشی کاری های برشی	۹۴
۶۴.۲	یازده کاشی کاری لاوز	۹۶
۶۵.۲	دو مثال از کاشی کاری های لاوز علاوه بر کاشی کاری های دوگان یکنواخت	۹۸
۶۶.۲	یک قطعه محدب هموار	۱۰۰
۶۷.۲	یک قطعه از پنج کاشی	۱۰۰
۶۸.۲	بزرگترین قطعه محدب در کاشی کاری یکنواخت (۴ ۳ ۴ ۳ ۴)	۱۰۱

۱۰۲	کوچکترین قطعه با رئوس گونه‌ی نوع ۵	۶۹.۲
۱۰۳	بزرگترین قطعه با رئوس سازگار با گونه‌ی نوع ۶	۷۰.۲
	قطعه‌ای که نمی‌تواند به کاشی‌کاری کل صفحه با رئوس از گونه‌ی نوع ۶ گسترده شود.	۷۱.۲
۱۰۴		
۱۰۵	دو رنگ‌آمیزی از کاشی‌کاری منتظم با دو رنگ	۷۲.۲
۱۰۶	رنگ‌آمیزی‌های ارشمیدسی کاشی‌کاری‌های یکنواخت	۷۳.۲
۱۰۷	ادامه رنگ‌آمیزی‌های یکنواخت	۷۴.۲
۱۰۸	ادامه رنگ‌آمیزی‌های یکنواخت	۷۵.۲
۱۰۹	رنگ کاشی‌کاری منتظم (۳۶)	۷۶.۲
۱۱۴	تصویر کلی از بنای سلطانیه	۱.۳
۱۱۵	سلطانیه ۲،۳	۲.۳
۱۱۵	سلطانیه ۴،۵	۳.۳
۱۱۶	سلطانیه ۶،۷	۴.۳
۱۱۷	سلطانیه ۸	۵.۳
۱۱۷	سلطانیه ۹	۶.۳
۱۱۸	سلطانیه ۱۰	۷.۳
۱۱۹	سلطانیه ۱۱	۸.۳
۱۲۰	سلطانیه ۱۲	۹.۳
۱۲۱	سلطانیه ۱۳	۱۰.۳
۱۲۲	سلطانیه ۱۴	۱۱.۳
۱۲۳	سلطانیه ۱۵	۱۲.۳
۱۲۴	سلطانیه ۱۶	۱۳.۳

۱۲۵	سلطانیہ ۱۷	۱۴.۳
۱۲۶	سلطانیہ ۱۸	۱۵.۳
۱۲۷	سلطانیہ ۱۹	۱۶.۳
۱۲۷	سلطانیہ ۲۰	۱۷.۳
۱۲۸	سلطانیہ ۲۱	۱۸.۳
۱۲۹	سلطانیہ ۲۲	۱۹.۳
۱۳۰	سلطانیہ ۲۳	۲۰.۳
۱۳۱	سلطانیہ ۲۴	۲۱.۳
۱۳۱	سلطانیہ ۲۵	۲۲.۳
۱۳۲	سلطانیہ ۲۶	۲۳.۳
۱۳۳	سلطانیہ ۲۷	۲۴.۳
۱۳۴	سلطانیہ ۲۸	۲۵.۳
۱۳۵	سلطانیہ ۲۹	۲۶.۳
۱۳۶	سلطانیہ ۳۰	۲۷.۳
۱۳۷	سلطانیہ ۳۱	۲۸.۳
۱۳۸	سلطانیہ ۳۲	۲۹.۳
۱۳۹	سلطانیہ ۳۳	۳۰.۳
۱۴۰	سلطانیہ ۳۴	۳۱.۳
۱۴۱	سلطانیہ ۳۵	۳۲.۳
۱۴۲	سلطانیہ ۳۶	۳۳.۳
۱۴۳	سلطانیہ ۳۷	۳۴.۳
۱۴۴	سلطانیہ ۳۸	۳۵.۳

۱۴۵	سلطانیہ ۳۹	۳۶.۳
۱۴۶	سلطانیہ ۴۰	۳۷.۳
۱۴۷	سلطانیہ ۴۱	۳۸.۳
۱۴۸	سلطانیہ ۴۲	۳۹.۳
۱۴۹	سلطانیہ ۴۳	۴۰.۳
۱۵۰	سلطانیہ ۴۴	۴۱.۳
۱۵۱	سلطانیہ ۴۵	۴۲.۳
۱۵۲	سلطانیہ ۴۶	۴۳.۳
۱۵۳	سلطانیہ ۴۷	۴۴.۳
۱۵۴	سلطانیہ ۴۸	۴۵.۳
۱۵۴	سلطانیہ ۴۹	۴۶.۳
۱۵۵	سلطانیہ ۵۰	۴۷.۳
۱۵۷	سلطانیہ ۵۱	۴۸.۳
۱۵۸	سلطانیہ ۵۲	۴۹.۳
۱۵۹	سلطانیہ ۵۲	۵۰.۳
۱۶۰	سلطانیہ ۵۲	۵۱.۳
۱۶۰	سلطانیہ ۵۲	۵۲.۳
۱۶۱	سلطانیہ ۵۳	۵۳.۳
۱۶۲	سلطانیہ ۵۳	۵۴.۳
۱۶۳	سلطانیہ ۵۳	۵۵.۳
۱۶۴	سلطانیہ ۵۴	۵۶.۳
۱۶۵	سلطانیہ ۵۴	۵۷.۳

١٦٦	٥٨.٣	سلطانيه ٥٤
١٦٦	٥٩.٣	سلطانيه ٥٥
١٦٧	٦٠.٣	سلطانيه ٥٥
١٦٨	٦١.٣	سلطانيه ٥٥
١٦٨	٦٢.٣	سلطانيه ٥٦
١٦٩	٦٣.٣	سلطانيه ٥٦
١٧٠	٦٤.٣	سلطانيه ٥٦
١٧٠	٦٥.٣	سلطانيه ٥٧
١٧١	٦٦.٣	سلطانيه ٥٧
١٧٢	٦٧.٣	سلطانيه ٥٧

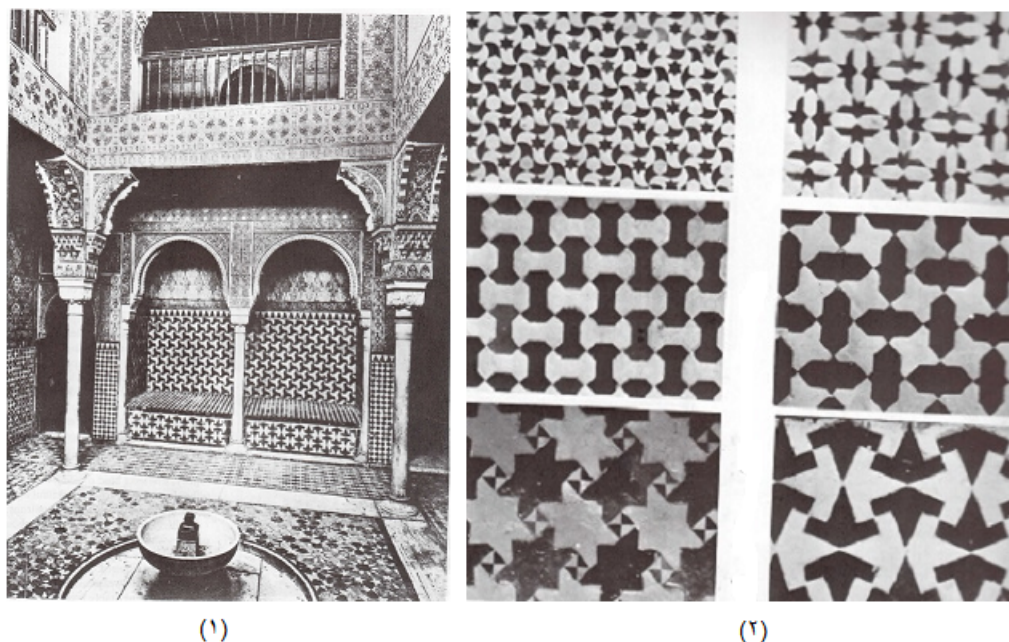
پیش‌گفتار

طراحی اشکال هندسی که به وسیله‌ی آن‌ها بتوان یک سطح را بدون شکاف و همپوشانی بپوشانیم، تاریخچه‌ی طولانی دارد. این هنر که از تقارن‌ها و تکرارها سرچشمه می‌گیرد، یک زیباشناسی عمیق در خود نهفته دارد که در آن عواطف و معنویات انسانی از بدو تاریخ ثبت شده است. زمانی که انسان شروع به ساختن خانه کرد، از سنگ‌ها برای پوشش کف و دیوارهای خانه‌اش بهره برد. او برای خوشایند کردن محیط زندگی خود دست به انتخاب اشکال و رنگ‌های سنگ‌ها زد.

هر تمدن شناخته شده‌ی بشری از کاشی‌کاری‌هایی با الگوهای خاص خود استفاده کرده است. سومری‌ها (در حدود ۴۰۰۰ سال قبل از میلاد) در بین‌النهرین، خانه‌ها و معابدی که با موزاییک‌هایی با طرح‌های هندسی تزئین شده بود، ساختند. پس از آن، ایرانی‌ها استادی خود را در کاشی‌کاری نشان دادند. همین‌طور، موروها (قرن ۱۱ میلادی، شمال آفریقا)^۱ از کاشی‌های رنگارنگ و هم‌شکل روی دیوارها و کف‌های ساختمان‌هایشان استفاده کرده‌اند. الگوهای کاشی‌کاری‌های اسلامی با رنگ‌های قابل توجه هنوز هم زنده مانده است. ساختمان‌ها، کف‌ها، و پیاده‌روهای رومیان نیز با کاشی‌هایی تزئین شده بودند که رومیان آن را موزاییک‌کاری^۲ نامیدند. نمونه‌های برخی از این طرح‌ها در شکل (۱) نشان داده شده است که مربوط به بنای معروف الحمرا در اسپانیا است.

^۱ Moors

^۲ Tessellation

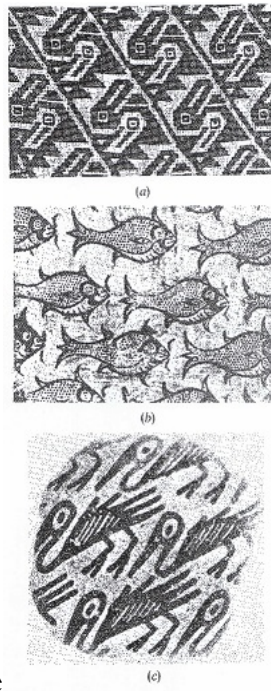


شکل ۱:

(۱) یک نما از مسجد الحمراى اسپانيا که کاشی‌کاری‌های آن توسط موروها ساخته شده است. (۲) جزئیات چندین کاشی‌کاری از

مسجد الحمرا [۳۴].

در همه‌ی فرهنگ‌ها با الگوهایى مواجه می‌شویم که دارای ریزه‌کاری‌ها و پیچیدگی‌های شگفت‌انگیز هستند. در هر چیزی که در آن نوعی تزئین نیاز، است مثلا روی پارچه‌های مرغوب، فرش‌ها، سبدها، ظروف، تسلیحات و پوشش‌های دیوار، به ناچار باید از نوعی الگو استفاده کرد. علاوه بر این، ساخت بسیاری از اشیاء به ناچار منجر به الگوهایى می‌شود: در شکل (۲)، (۳)، (۴) مثال‌هایی از فعالیت‌هایی مانند بافندگی و سبدها سازی است که نمونه‌هایی از فرهنگ‌های مختلف را نشان می‌دهد.



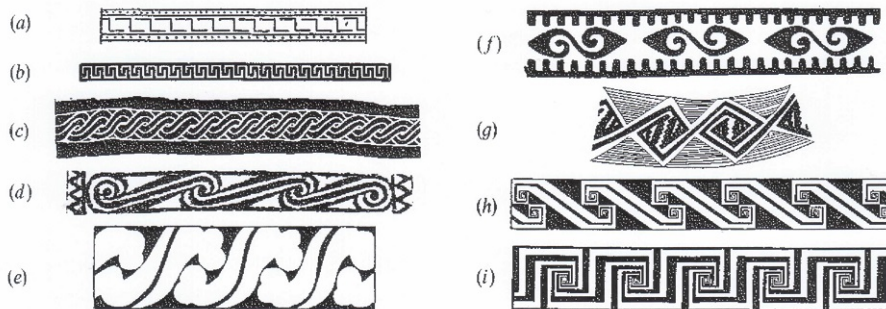
e

شکل ۲: الگوها با نقوش حیوانات و طرح‌بندی‌های بسیار مشابه [۳۰، ۱۵، ۱۳]



شکل ۳:

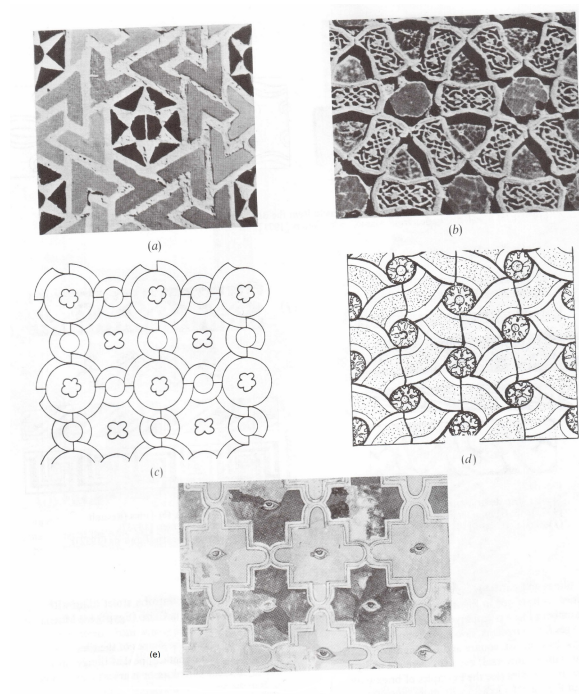
الگوهایی به شکل پوست مار (a) سپرهای چوبی از مجمع الجزایر بیسمارک در ملانزی (b) دکوراسیون دیوار از آجاتا، هند [۳۶، ۳]



شکل ۴: تزیینات نوارهای مشابه. (a) یونان (۱۹۲۹) (b) تونس (۱۹۷۳) (c) مصر (۱۸۹۰) (d) گینه نو (۱۹۲۵) (e) ژاپن (۱۹۷۵) (f) مکزیک (۱۹۴۷) (g) آریزونا (۱۹۷۷) (h) و (i) نسبتاً مدرن (۱۹۳۲) [۴۰، ۳۲، ۲۷، ۲۳، ۱۱-۹، ۴]

جالب است که نقوش مشابه اغلب در الگوهای در مکان‌ها و زمان‌های متفاوت ظاهر می‌شوند. جالب‌تر این است که ترکیب کلی الگوها در منابع مختلف نیز اغلب خیلی شبیه هستند. این مطلب از یک واقعیت ریاضی نشأت می‌گیرد که می‌توان ساختار هندسی این الگوها را شناسایی کرد و این ساختار محدودیت‌هایی را تحمیل می‌کند.

در طول قرن‌ها، کاشی‌هایی با اشکال بسیار متنوع مورد استفاده قرار می‌گرفتند ولی شناخته شده نبود که کدام یک قابل الگوبرداری هست. برخی از کاشی‌کاری‌ها در شکل‌های (۵)، (۶)، (۷) نشان داده شده که در روزگار باستان و ادوار میانی برای پیاده‌روها، کف‌ها، دیوارها و سقف‌ها استفاده شده است.



شکل ۵: برخی از کاشی‌کاری‌های باستانی. (a) و (b) مربوط به آسیای مرکزی قبل از حمله مغول (۱۲۵۹) (c) کلیسای الای Ely ، انگلستان (۱۳۲۵) (d) و (e) قلعه بردا هلند (۱۵۰۰) [۴۱، ۲]