بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی

فوق همگرایی روش تکراری گالرکین برای معادلات انتگرال غیر خطی از نوع " Hammerstein "

جواد شکری

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

استاد راهنما :دکتر خسرو مالک نژاد

تابستان ۱۳۷۷

در تحصیل علم بکوشید که فرا گرفتن آن حسنه ، و گفتگویش تسبیح و کاوش در آن جهاد و آموختن آن به جاهل صدقه و نشرش موجب قربت است . زیرا علم راهنمای حلال است ، طالب خود را به بهشت می‌کشد ، در تنهایی مونس و در غربت یار ، و در سختی رهنما و در برابر دشمن حربه و برای دوست زینت و زیور است ...

پیامبر اسلام (ص)

تقدیم به :

اسطوره‌های تلاش و عطوفت ،

پدر گرامیم و مادر مهربانم که بی شک هر چه دارم ازلطف وجود این عزیزان است .

چکیده

در این رساله روش تکراری گالرکین [۱] و روش منظم سازی تکراری «گالرکین -کانتروویچ»[۲] برای تقریب جواب معادله انتگرال *Hammerstien* با کرنل هموار و بطور ضعیف منفرد و به فرم معمولی:

$$x(t) - \int_{۰}^{۱} k(t,s)\,\tau(s,x(s))ds = f(t)\ ,\ ۰<t<۱ \qquad (۱)$$

عمومیت داده شده است. که در آن k , f , τ توابع معلوم و x تابعی است که باید معلوم گردد. هدف نشان دادند بالابودن میزان همگرایی روش تکراری گالرکین نسبت به روش گالرکین برای معادله (۱) تحت شرایط خاص و با در نظر داشتن دو نوع مخصوص از کرنل ذکر شده به صورت

۱- $k(t,s)=m(t,s)k(t-s)\ , t,s\in[۰,۱]$

$m\in c^{۲}([۰,۱]\times[۰,۱])\ , k\in N_{۱}^{\alpha}[۰,۱]\ for\ ۰<\alpha<۱$

۲- $k(t,s)=m(t,s)g_{\alpha}(|t-s|)$

می‌باشد که مرتبه خطاء به ترتیب برای کرنل‌های نوع اول و دوم از $o(h^{\gamma})$, $o(\frac{۱}{n^{\gamma}})$ از طریق روش گالرکین، به $o(h^{۲\gamma})$, $o(\frac{۱}{n^{۲\gamma}})$ از طریق روش تکراری گالرکین افزایش داده می‌شود.

1 Galerkin

2- Galerkin - kantorovich

تقدیر و تشکر

به لطف پروردگار توانستم پایان نامه خود را به رشته تحریر درآورم . امیدوارم با این کارگامی هر چند کوتاه در راه پیشبرد ریاضیات کاربردی برداشته باشم .

شایسته است که از زحمات استاد ارجمند جناب آقای دکتر خسرو مالک نژاد که با راهنمائیهای سودمند خود روشنگر مسیر و موجبات تشویق و دلگرمی را فراهم نموده‌اند صمیمانه سپاسگزاری نمایم .

لازم می‌دانم که از جناب آقای دکتر امامی زاده به خاطر حضور ایشان در جلسه دفاعیه به عنوان داور خارجی و نیز از اساتید ارجمندم در این دوره تحصیلی جناب آقای دکتر عبدا.. شیدفر و دکتر محمدرضا مختارزاده و نیز از تمامی دوستان و کارکنان دانشکده از آن جمله سرکار خانم کرد بچه مسئول کتابخانه دانشکده ریاضی و خانم یوسفی مسئول دفتر تحصیلات تکمیلی دانشکده کمال تشکر و قدردانی داشته باشم .

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمه

۱-۱) معادلات انتگرال و تاریخچه آن

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه‌های ریاضیات کاربردی است، اهمیت اصلی آن بواسطهٔ تبدیل مسئله مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزیی به این دسته از معادلات است.

در ابتدا حل معادله انتگرال تحت عنوان معکوس گرفتن از انتگرالها تلقی می‌شد. لیکن اولین بار اصطلاح معادله انتگرال توسط «ریموند»[1] پیشنهاد شد. «لاپلاس» [2] در سال ۱۷۸۲، معادله انتگرال زیر را برای تابع F ارائه داد:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} \mathrm{f(t)dt}$$

در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات، «فوریه»[3] در سال ۱۸۱۱، روی نظریه حرارت کارکرد و تئوری انتگرال فوریه در این سالها شکل گرفت، لذا معمولاً گفته می‌شود نظریه معادلات انتگرال به تئوری انتگرال فوریه برمی‌گردد. در همین سالها «آبل»[4] در مسأله خود که به مسأله مکانیکی آبل معروف است، کاربرد معادلات انتگرال را در چنین مسائلی مطرح نمود.

در سال (۱۸۲۳) و «لیوویل»[5] درسال ۱۸۳۲ بطور مستقل دسته خاصی از معادلات انتگرال را حل کرد و یک گام مهم در راه توسعه معادلات انتگرل توسط وی برداشته شد و آن چگونگی حل بعضی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود. اصطلاح نوع اول و دوم که امروز در مورد مطالعات انتگرل بکار می‌رود، اولین بارتوسط «هیلبرت »[6] پیشنهاد شد، البته قبل از کارهای هیلبرت، معادلات آبل و لیوویل به فرم‌های زیر مطرح بود:

معادله آبل: $g(x) = \int_a^x k(x,y)\, \mathrm{f(y)dy}$

معادله لیوویل: $F(x) = g(x) + \int_a^x k(x,y)\, \mathrm{f(y)dy}$

---

1 - Du Bois Reymond

2 - Laplace

3 - Fourier

4 - Abel

5 - Liouvile

6 -Di Hilbert

«پوانکاره»[1] در سال ۱۸۹۶ معادله انتگرال زیر را که متناظر با معادل دیفرانسیل جزئی:

(حرکت موج) $\nabla^{2}u+\lambda u=f(x,y)$

می‌باشد، بدست آورد:

$$u(x)+\lambda\int_{a}^{b}k(x,y)u(y)dy=f(x)$$

چند سال بعد، یعنی در حدود سالهای ۱۹۰۳-۱۹۰۰ ریاضیدان سوئدی بنام «فردهولم»[2] جهت بدست آوردن جواب مسأله فوق تحقیقاتی را انجام داد و این تحقیقات منجر به ارائه قضایای فرد هولم که از قضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند، گردید.

«والترا»[3] در اواخر قرن نوزدهم، نظریه عمومی معادلات انتگرال را ارائه نمود.

ارائه یک سخنرانی توسط «اریک هولمگر»[4] در سال ۱۹۰۷ روی کارهای فردهولم، علاقهٔ هیلبرت را به تحقیق در مورد مطالعات انتگرال برانگیخت و او در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال بهره گرفت، یکی از کارهای مهم وی فرموله کردن مسائل مقدار مرزی به صورت یک معادله انتگرالی است.

ارتباط معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال و یا مثال‌های دیگر، در ریاضی فیزیک، یک تکنیک مهم را جهت حل مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی در تئوری معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزیی بوجود می‌آورد که یکی از دستاوردهای مهم مطالعه معادلات انتگرال است.

ابتدا، قضایای فردهولم برای هسته‌های پیوسته ارائه شد، لیکن بعدها توسط افراد دیگری نظیر

---

1 - H. Poincare

2 - Ivar Fredholm

3 - Vita Voltra

4 -Erick Holmger

«کارلمان» [۱] و «ریس» [۲] برای هسته‌های کلی‌تر تعمیم یافت.

در اوایل نیمه دوم قرن اخیر، تحقیقات زیادی که روی جواب معادلهٔ انتگرال بوسیله «هرمن ویل» [۳] در ارتباط با اینکه به ازاء چه مقادیری از λ معادله انتگرال جواب دارد، صورت گرفت، لیکن از آنجا که در حالت کلی قادر به حل بسیاری از معادلات انتگرالی که در عمل با آنها مواجه می‌شویم، نیستیم لذا از همین سالها نیاز به روشهای تقویمی و حدودی جهت حل معادلات انتگرال آشکار شد.

۱-۲) تعریف و دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف: یک معادله انتگرال معاله ایست که در آن تابع مجهول در زیر یک یا چند علامت انتگرال ظاهر شود.

با توجه به توسعه معادلات انتگرال و کاربردهای وسیع آن یک تقسیم بندی جامع برای آنها ضرورت دارد. به خصوص اینکه از یک طرف در مسائل مختلف فیزیک و مهندسی انواع خاصی از معادلات انتگرال ظاهر می‌شوند و از طرف دیگر راههایی که جهت حل انواع مختلف این نوع معادلات ارائه شده است، متفاوت هستند. با توجه به موارد بالا لازم است که دسته بندی بر حسب منفرد بودن یا نبودن هسته معادلات انتگرال، توان تابع مجهول در زیر علامت انتگرال، حد متغیر مورد نظر در انتگرالگیری، وجود یا عدم وجود تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال‌گیری انجام گیرد.

ابتدا معادلات انتگرال را به دو نوع عمده تقسیم می‌کنیم:

الف) معادلاتی که در آنها حد بالای انتگرال‌گیری متغیر است که به اینها، معادلات انتگرال ولترا می‌گوییم نظیر:

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,y) f(y)\, dy$$

1 - F. Carleman

2 - F . Riesz

3 - Harmann weyl

ب) معادلات انتگرالی که در آنها دامنه انتگرال‌گیری ثابت است، این معادلات به معادلات انتگرال فردهولم شهرت دارند نظیر:

$$f(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)\,dy$$

بدیهی است که معادلات ولترا، حالت خاصی از معادلات فردهولم هستند، کافی است $k(x,y)$ را وقتی که $y>x$ مساوی صفر فرض کنیم.

هریک از معادلات انتگرالی فرد هولم و یا ولترا به دو نوع زیر تقسیم می‌شوند:

الف) معادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می‌شود که این نوع معادلات را، معادلات انتگرالی خطی می‌گوییم نظیر:

$$f(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)\,dy$$

ب) معادلات انتگرال که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال به صورت غیرخطی ظاهر می‌شرود که این نوع معادلات را، معادلات انتگرال غیر خطی می‌گوییم نظیر:

$$f(x)=\lambda\int_a^b F(x,y\,f(y))\,dy$$

که در آن $F(x\,,\,y\,,\,z)$ نسبت به z تابعی غیر خطی است.

معادلات انتگرال خطی و غیرخطی دسته مهمی از معادلات انتگرال را تشکیل می‌دهند، لیکن از آنجا که دسته مهمی از معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزیی به معادلات انتگرالی غیرخطی تبدیل می‌شوند، لذا این دسته از معادلات از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

هر یک از معادلات انتگرال فرد هولم یا ولترا، از نوع خطی یا غیرخطی به دو نوع زیر تقسیم می‌شوند:

الف) معادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول به غیر از علامت زیر انتگرال، در جای دیگر ظاهر نشده است، که این معادلات انتگرال نوع اول موسومند نظیر:

$$g(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)\,dy$$

ب) معادلات انتگرالی که در آنها تابع مجهول خارج از علامت انتگرال‌گیری هم ظاهر می‌شود که به این نوع از معادلات، معادلات انتگرالی نوع دوم می‌گویند، نظیر:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy$$

حل معادلات انتگرال نوع اول در مقایسه با معادلات انتگرال نوع دوم مشکل‌تر است.

هریک از معادلات انتگرالی نوع اول یا دوم به دو نوع تقسیم می‌شوند:

الف) معادلات انتگرالی که هسته آنها نامحدود و یا دامنه انتگرال‌گیری در آنها بی‌کران است که این نوع معادلات انتگرالی منفرد می‌گوییم نظیر:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y)\, dy$$

ب) معادلات انتگرالی که هم هسته آنها کراندار است و هم دامنه انتگرال‌گیری در آنها متناهی است که این نوع معادلات، به معادلات انتگرالی نامنفرد موسومند، نظیر:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 (x+y) f(y)\, dy$$

حل معادلات انتگرالی منفرد، در حالت کلی بسیار مشکل‌تر است، مگر اینکه هسته آنها تابع خاصی باشد.

معادلات انتگرالی غیرخطی آنقدر متنوع و گوناگون هستند که طبقه بندی خاصی برای آنها موجود نیست، مع الوصف دو دسته بندی مهم آنها به صورت ذیل است:

الف) معادلاتی که در آنها یکی از دو تابع زیر علامت انتگرال و یا هردو، بطور غیرخطی بـه تـابع مجهول $\ell(x)$ وابستگی دارند، یعنی معادلاتی بین فرم:

$$\int_0^1 H[x, y, \ell(y)]\, dy = g[x, \ell(x)]$$

ب) معادلاتیکه شامل یک تابعی غیرخطی هستند، نظیر:

$$\int_0^1 \int_0^1 k(x, y, z)(\ell y)\ell(x)\, dy\, dz$$

معادلات نوع (الف)، انواع جالبی دارند، به خصوص حالتی که تابع H به صورت حاصلضرب دو

تابع $k(x,y)$ و $L[y,\ell(y)]$ باشد، یعنی معادله‌ای بدین صورت:

$$\int_{0}^{1} k(x,y)L[y,\ell(y)]dy = g[x,\ell(x)]$$

A. Hammerstien تحقیقات وسیعی را روی این گونه معادلات انجام داده است.

در حالت خاص اگر بتوانیم معادلهٔ: $g[x,\ell](x)]=\tau(x)$ را برای تابع مجهول $\ell(x)$ حل کنیم، آنگاه می‌توانیم معادله زیر را داشته باشیم:

$$\tau(x) + \int_{0}^{1} k(x,y)f[y,\tau(y)]dy = 0$$

که معادله فوق را شکل استاندارد معادلات *Hammerstien* می‌نامیم.

فرم غیر همگن، معادله فوق را به عنوان معادله انتگرالی غیر خطی *Hammerstien* معرفی می‌کنیم:

$$y(t)=f(t) + \int_{a}^{b} k(t,s)g[s,y(s)]ds \ , \ a\leq t\leq b$$

که در آن $-\infty<a<b<\infty$ ، g,k,f توابع معلوم و y تابع مجهول (جواب معادله) است.

بحث اصلی این رساله، در جهت حل عددی اینگونه معادلات خواهد بود.

برای اطلاع بیشتر در مورد بحث فوق رجوع به مرجع *[1]*

۱-۳) هسته یک معادله انتگرال

اگر معادله انتگرال نوع اول نظیر:

$$g(x) = \lambda \int_{a}^{b} k(x,y)f(y)dy$$

و یا فرم غیرخطی *Hammerstien* نظیر:

$$y(t)=f(t) + \int_{a}^{b} k(t,s)g(s,y(s))ds$$

را در نظر بگیریم، همانطوریکه می‌دانیم تابع دو متغیره k را هسته این معادلات می‌نامیم، در حالت کلی: $k:R^2 \dashrightarrow C$ مگر خلاف این بیان شود. در همه بحث‌های مربوطه به یک معادله انتگرال، اعم از نظریه آنها و یا روشهای عددی جهت حل آنها، هسته نقش مهمی را ایفا می‌کند. بر حسب اینکه