دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

مفهوم (نیم) منظم بودن در حلقه‌ها و مدول‌های کلی

نگارش

نعیمه پورحسینی

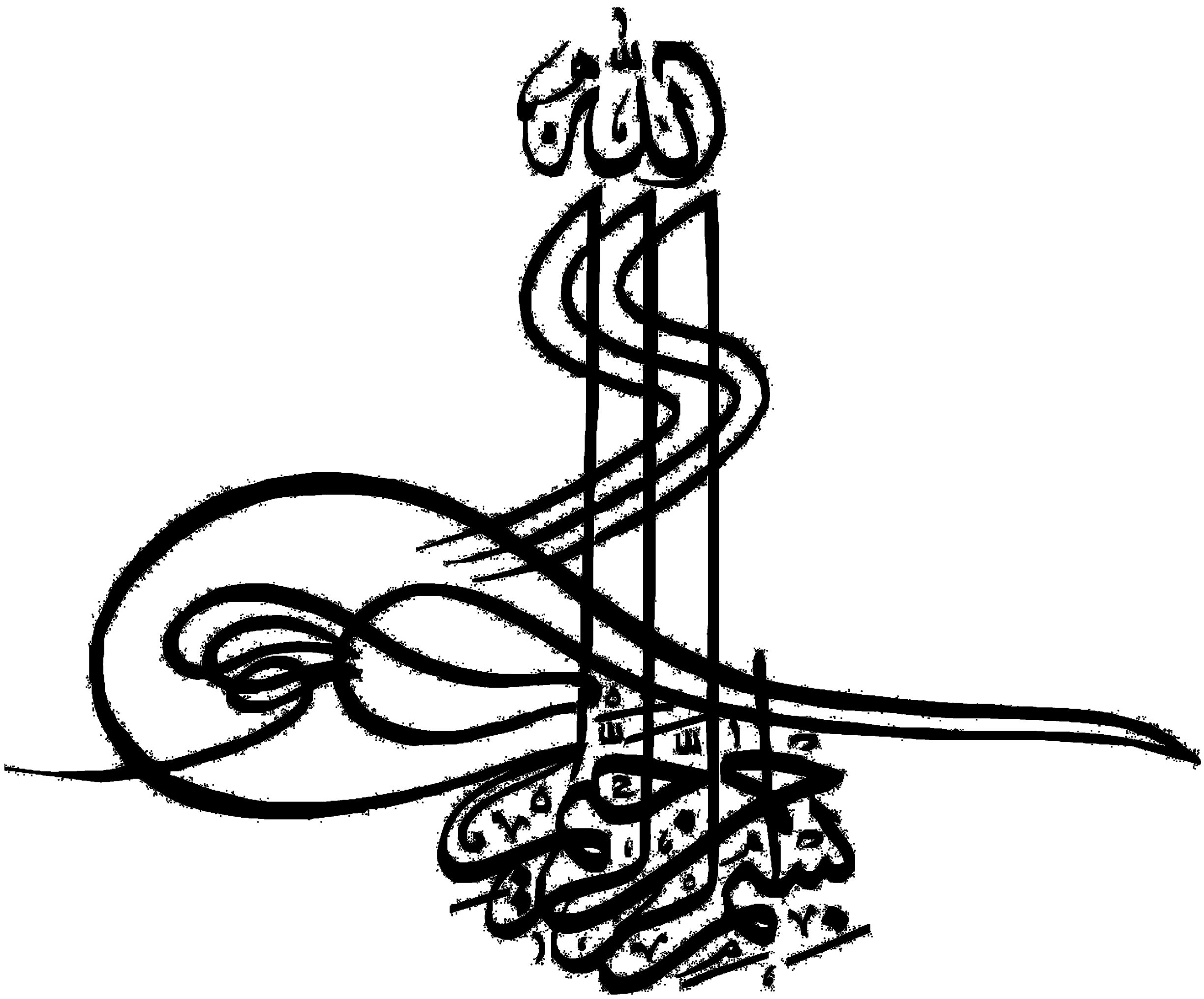
استاد راهنما

دکتر رحمان بهمنی سنگسری

استاد مشاور

دکتر علی معدنشکاف

بهمن ماه ۱۳۸۸


بسم الله الرحمن الرحيم

خداوندا:

سر خشوع به درگاه خداوندی تو فرود می آورم به خاطر دادن
دو نعمتی که از طفولیت همواره، همه جا همراه و همدمم بودند
و مرا با تمام نقص و نیازم در آغوش محبت خویش گرفتند تا
مبادا سختی های روزگار بر قامتم تازیانه های نامردی را بزنند.

« تقدیم به دو کیمیای هستی ام، پدر عزیز و مادر مهربانم »

تقدیر و تشکر

خداوندا تو را شاکرم که قلم را در دستان بی هنرم آفریدی تا اگر چه در گفتار ناتوانم اما بتوانم با قلم خویش در دفتر ادب سپاس‌گزار کسانی باشم که مرا هدایت نمودند تا گمراه نباشم، آموختند تا نادان نباشم و استاد من بودند تا راه یافتی به بیرون از ظلمات غفلت بیابم.

در این کوتاه سخن بر خود لازم می دانم از کسانی که در تمام مراحل این پایان نامه مرا یاری نمودند کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. جناب آقای دکتر بهمنی که با صبر و حوصله مرا راهنمایی کردند و جناب آقای دکتر معدنشکاف که مشاور بنده در این پایان نامه بودند و از جناب آقای استاد دکتر یاسمی و سرکار خانم دکتر اشرفی که زحمت اصلاح پایان نامه ام را بر عهده گرفتند و خانواده عزیزم که با صبر و حوصله و کمک های همه جانبه شان در کلیه‌ی مراحل کار پشتیبانم بودند.

چکیده

اخیراً مطالعاتی توسط اشنایدر[1]، کش [2]، بیدر[3] و دیگران انجام شده و نشان داده شده است که برخی از نظریه‌های حلقه‌ها و مدول‌ها می تواند در مبحث $Hom_R(M,N)$ (که M و N مدول‌هایی روی حلقه‌ی R هستند) وارد شوند.

در این پایان نامه زیرساختارهایی از $Hom_R(M,N)$ مانند رادیکال، توتال و ایدال‌های تکین و هم‌تکین تعریف می‌شود. مفهوم منظمی (و نیم‌منظمی) به $Hom_R(M,N)$ تعمیم داده شده و ارتباط آن با انژکتیو مستقیم نسبی (پروژکتیو مستقیم) و ویژگی‌هایشان نشان داده می‌شود. همچنین رابطه نیم‌منظمی، رادیکال جیکوبسن، ایدآل تکین و هم‌تکین از $Hom_R(M,N)$ با استفاده از مفهوم واقع شده در روی و زیر یک جمعوند بررسی می‌شود. نتایج جدید به دست آمده که شرایط برابر بودن توتال و رادیکال جیکوبسن در $Hom_R(M,N)$ را دارد مطرح شده و یکی از وضعیت‌های مناسب برای توتال که مدول‌های موضعاً انژکتیو و موضعاً پروژکتیو است بیان می‌شود و بالاخره وجود ایدال نیم‌منظم ماکسیمال منحصر به فرد از یک حلقه بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: منظم، نیم‌منظم، توتال، رادیکال جیکوبسن، ایدال تکین، ایدال هم‌تکین، زیرساختارهای $Hom_R(M,N)$

---

[1] Schneider
[2] Kasch
[3] Beidar

مقدمه

در سراسر این پایان نامه حلقه R شرکت‌پذیر و دارای عضو همانی است مگر این که خلاف آن ذکر شود. همه مدول‌ها روی حلقه R، مدول‌های چپ یکال هستند و R−مدول همریختی‌ها از سمت راست اثر می کنند. در سراسر پایان نامه زمانی‌که M و N R−مدول‌های چپ هستند، از نمادهای $[M,N]=Hom_R(M,N)$ و $E_M=End_R(M)$ استفاده می‌کنیم.

این پایان نامه شامل چهار فصل است در فصل اول، قضایا و تعاریف اولیه مورد نیاز برای مطالعه فصول بعدی مطرح شده‌اند. مباحث اساسی پایان نامه را (نیم)منظم بودن در $Hom_R(M,N)$ که اولین بار توسط کش و مادِر[۴] مطرح شد و چهار زیر ساختار منظم $J[M,N]$، $Tot[M,N]$، $\triangle[M,N]$ و $\nabla[M,N]$ که توسط نیکلسون [۵] مطرح شده تشکیل می دهند.

در فصل دوم بر روی زیرساختارهایی از $Hom_R(M,N)$ بحث می‌شود. یکی از این چهار زیر ساختار، توتال ($Total$)، مفهومی است که ابتدا در سال ۱۹۸۲ توسط کش مطرح شد و به وسیله کَش، اشنایدر، بیدَر، مادِر، ویگنت [۶]، زلمانویتز[۷]، زولنر[۸] و ... به‌طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین رابطه بین منظم‌بودن و زیر ساختارهای از $Hom_R(M,N)$ از جمله توتال، توسط کش و مادِر در سال ۲۰۰۶ در مرجع [۱۳] بیان شده است. در مطالعه توتال یکی از سوالات جالبی که مطرح می شود این است که چه زمانی توتال با رادیکال جیکوبسن برابر می شود که به منظور پاسخ به این سوال مفهوم نیم‌توان بودن در $Hom_R(M,N)$ و قضایای مربوطه بیان شده و در بخش سوم این فصل به این سوال در قالب یک قضیه پاسخ داده می‌شود.

نیم‌منظم و منظم بودن در $Hom_R(M,N)$ که توسط نیکلسون و ژو در سال ۱۹۷۷ در مرجع [۲۰] به طور مفصل بررسی شده است، فصل سوم از این پایان نامه را تشکیل می‌دهد.

در فصل چهارم مدول‌های موضعاً انژکتیو و موضعاً پروژکتیو که اولین بار در سال ۲۰۰۲ توسط کش مطرح شدند و وضعیت مناسبی برای توتال هستند تعریف شده و برخی از خواص ثانویه‌ی آنها مطرح

---

[۴] Mader
[۵] Nicholson
[۶] Wiegandt
[۷] Zelmanowitz
[۸] Zollner

می‌شود. فصل آخر دوباره به مباحثی در منظم بودن و نیم‌منظم بودن در $Hom_R(M,N)$ اختصاص یافته است.

در سال ۱۹۵۰ براون [9] ومکوی [10] در مرجع [۵] ثابت کردند هر حلقه غیریکال یک ایدال دوطرفه منظم ماکسیمال منحصر به فرد دارد. همچنین کش و مادِر در مرجع [۱۳] نشان دادند که $[M,N]$ دارای بزرگترین زیر دومدول منظم منحصر به فرد به نام $Reg[M,N]$ است که $Reg[M,N] \cap Tot[M,N] = 0$ است. پس به طور بدیهی اگر $[M,N] = Reg[M,N]$ باشد $[M,N] = Reg[M,N] \oplus Tot[M,N]$ برقرار است. سوالی که مطرح می شود این است که اگر $Reg[M,N] \neq [M,N] \neq 0$ باشد آیااین امکان‌پذیر است که $[M,N] = Reg[M,N] \oplus Tot[M,N]$ باشد ؟ دراین فصل با یک مثال به این سوال پاسخ داده می‌شود.

در بخش آخر فصل پنجم ثابت می‌شود هر حلقه غیریکال یک ایدال دوطرفه نیم‌منظم ماکسیمال منحصر به فرد دارد. ولی هنوز معلوم نیست آیا $[M,N]$ دارای بزرگترین زیر دومدول نیم‌منظم ماکسیمال منحصر به فرد است یا خیر؟

بیشتر مطالب این پایان نامه بر گرفته از مراجع [۲۰] و [۲۸] است.

---

[9] Brown
[10] McCoy

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف و قضایایی را که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، مطرح می کنیم. از اثبات بیشتر قضایا(به جز قضایای ساده و پرکاربرد) صرف‌نظر کرده و برهان آن‌ها را ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و M مجموعه‌ای ناتهی باشد، عمل جمع $+ : M \times M \to M$ که برای هر $x, y \in M$ به صورت $+(x,y) = x + y$ تعریف می‌شود و ضرب اسکالر $. : R \times M \to M$ که برای هر $x \in M$ و $r \in R$ به صورت $.(r,x) = r.x = rx$ تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم. M همراه با عمل جمع و ضرب بالا را $R-$مدول چپ می‌نامیم، هرگاه

۱) $(M,+)$ گروهی آبلی باشد،

۲) به ازای هر دو عضو از M مثل x, y و هر عضو از R مثل r، $r(x+y) = rx + ry$،

۳) به ازای هر عضو M مثل x و هر دو عضو از R مثل s و r، $(r+s)x = rx + sx$،

۴) به ازای هر عضو M مثل x و هر دو عضو R مثل s و r، $(rs)x = r(sx)$،

۵) به ازای هر عضو M مثل x، $1x = x$.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم M وN دو $R-$مدول باشند و $Hom_R(M,N)$ مجموعه‌ی همه‌ی $R-$مدول هم‌ریختی‌ها ازM به N باشد که تحت جمع توابع یک گروه آبلی است. $Hom(M,M)$ را حلقه‌ی $R-$درون‌ریختی‌های M نامیم و بانماد $End_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱ عنصر a در حلقه‌ی یکدار R را معکوس پذیر چپ (راست) گوییم اگر $c \in R$ ای ($b \in R$ ای) وجود داشته باشد به طوری که $ca = 1_R$ ($ab = 1_R$). عنصر c (b)، معکوس چپ (راست) a نامیده می‌شود. عنصر $a \in R$ که معکوس پذیر چپ و راست باشد، معکوس پذیر یا یکه (یکال) نامیده می‌شود و مجموعه‌ی تمام یکه‌های حلقه‌ی R را با $U(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. زیر مجموعه‌ی ناتهی I از R یک اید آل چپ (راست) حلقه‌ی R نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a,b \in I$ و هر $r \in R$، $a - b \in I$ و $ra \in I$ ($ar \in I$). اید آل چپ I در R را با نماد $I \trianglelefteq_l R$ و اید آل راست I در R را با نماد $I \trianglelefteq_r R$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ زیر مجموعه‌ی ناتهی I از حلقه‌ی R را اید آل (دو طرفه) نامیم هرگاه I یک اید آل چپ و یک اید آل راست R باشد و آن را با نماد $I \trianglelefteq R$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ اید آل I از حلقه‌ی R را اید آل سره نامیم هرگاه $I \neq R$.

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول و $\{M_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای ناتهی از زیر مدول‌های M باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) $\{M_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای مستقل است، یعنی برای هر $n \geq ۱$، هر عضو از I مثل i_k و هر عضو از M_{i_k} مثل x_{i_k}، از $\sum_{k=۱}^{n} x_{i_k} = ۰$ نتیجه شود به ازای هر k، $۱ \leq k \leq n$، $x_{i_k} = ۰$.

(۲) به ازای هر عضو از I مثل j، $M_j \cap (\sum_{i \in I - \{j\}} M_i) = ۰$.

(۳) هر عضو از $\sum_{i \in I} M_i$ نمایش منحصر به فردی بر حسب مجموعی متناهی از اعضای M_i ها داشته باشد.

برهان: به قضیه ۲.۱، صفحه‌ی ۷ از مرجع [۳۰] رجوع شود. □

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول و $\{M_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای ناتهی از زیر مدول‌های M باشد. اگر یکی از شرایط معادل در قضیه‌ی قبل برای این خانواده فراهم شود، آنگاه مجموع $\sum_{i \in I} M_i$ را مجموع مستقیم می‌نامیم و آن را با نماد $\bigoplus_{i \in I} M_i$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که $I = \{۱, \cdots, n\}$، بجای $\bigoplus_{i \in I} M_i$ می‌نویسیم $\bigoplus_{i=۱}^{n} M_i$ یا $M_۱ \oplus \cdots \oplus M_n$.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول، X زیر مجموعه‌ای از M و I ایدآل چپی از R باشد. وقتی X ناتهی باشد، مجموعه‌ی IX را به صورت

$$IX = \{\sum_{k=۱}^{n} i_k x_k \mid i_k \in I, x_k \in X, n \geq ۱\}$$

تعریف می‌کنیم و اگر X تهی باشد، قرار می‌دهیم

$$IX = ۰.$$

همچنین IX زیر مدولی از M است.

تذکر ۱۰.۱.۱ اگر در تعریف قبل قرار دهیم $I = R$، RX، که زیر مدول تولید شده توسط X نامیده می‌شود، برابر است با

$$RX = \begin{cases} \{\sum_{k=1}^{n} r_k x_k \mid r_k \in R, x_k \in X, n \geq 1\} & X \neq \varnothing \text{ اگر } \\ 0 & X = \varnothing \text{ اگر } \end{cases}$$

توجه کنید که اگر $X = \{x\}$، زیر مدول $R\{x\}$، که آن را با Rx نمایش می‌دهیم، برابر است با $Rx = \{rx \mid r \in R\}$.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم M، R−مدول باشد. M را نوتری (آرتینی) می‌گوییم هرگاه هر زنجیر صعودی (زنجیر نزولی) از زیرمدول‌های M مثل $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ ($M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$) سرانجام متوقف شود، یعنی عددی طبیعی مثل n موجود باشد که به ازای هر i، $i \geq n$، $M_i = M_n$.

تعریف ۱۲.۱.۱ حلقه‌ی R را نوتری چپ (نوتری راست) می‌نامیم اگر R، به عنوان R−مدول چپ (راست)، نوتری باشد. هم‌چنین R را آرتینی چپ (آرتینی راست) می‌نامیم اگر R، به عنوان R−مدول چپ (راست)، آرتینی باشد. R نوتری (آرتینی) نامیده می‌شود اگر هم نوتری چپ (آرتینی چپ) و هم نوتری راست (آرتینی راست) باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و M ایدآلی از آن باشد. در این صورت M را ایدآل ماکسیمال R نامیم اگر $M \neq R$ و هیچ ایدآل I از R موجود نباشد به طوری که $M \subset I \subset R$. مجموعه‌ی تمام ایدآل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را با نماد $Max(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ اشتراک همه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را جیکوبسن رادیکال حلقه‌ی R نامیم و آن را با نماد $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۵.۱.۱ فرض کنیم D حلقه‌ی تقسیم باشد. می‌دانیم D ایدآل چپ نابدیهی ندارد. پس 0 تنها ایدآل ماکسیمال چپ D است. در نتیجه

$$J(D) = \bigcap \{M \mid \text{است } D \text{ ایدآل ماکسیمال چپ } M\} = 0.$$

تعریف ۱۶.۱.۱ حلقه‌ی غیربدیهی R را موضعی گوییم هرگاه دقیقاً دارای یک ایدال ماکسیمال چپ (راست) باشد.

لذا اگر R حلقه‌ی موضعی باشد، $J(R)$ ایدال ماکسیمال منحصربه‌فرد R می‌باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم M، $R-$مدولی غیر صفر باشد، M را ساده نامیم، هرگاه 0 و M تنها زیرمدول‌های M باشند.

تعریف ۱۸.۱.۱ مدول M را تجزیه ناپذیر نامیم هرگاه به غیر از 0 و M جمعوند دیگری نداشته باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. M را مدول نیم‌ساده می‌نامیم هرگاه به ازای هر زیر مدول از M مثل K، زیرمدولی از M مثل P موجود باشد که $M = K \oplus P$.

مثال ۲۰.۱.۱ هر مدول ساده، نیم‌ساده است.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. R را نیم‌ساده‌ی چپ (راست) می‌نامیم هرگاه R، به عنوان $R-$مدول چپ (راست)، نیم‌ساده باشد.

تذکر ۲۲.۱.۱ گزاره های معادل زیر را برای تعریف حلقه نیم‌ساده داریم:

۱) R حلقه نیم‌ساده است.

۲) هر Rـمدول چپ نیم‌ساده است.

۳) هر دنباله‌ی دقیق کوتاه از Rـمدول‌های چپ و Rـهم‌ریختی‌ها شکافته می‌شود.

۴) هر Rـمدول چپ پروژکتیو است.

۵) هر Rـمدول چپ انژکتیو است.

۶) R حلقه‌ی آرتینی چپ است که $J(R) = 0$.

برهان: به صفحه‌ی ۲۰۲ از مرجع [۳۰] رجوع شود. □

مثال ۲۳.۱.۱ هر حلقه‌ی تقسیم، هم نیم‌ساده‌ی چپ و هم نیم‌ساده‌ی راست است.

تعریف ۲۴.۱.۱ زیرمدول K از $R-$مدول M را در M اساسی نامیم هرگاه برای هر زیرمدول $L \leq M$ که $K \cap L = 0$ آن‌گاه $L = 0$ که آن را با نماد $K \leq_e M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۵.۱.۱ زیرمدول K از R−مدول M را بسیار کوچک نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول L از M که $L+K=M$، داشته باشیم $L=M$ که آن را با نماد $K \ll M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۱.۱ فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. نگاشت $\varphi : R \to S$ یک هم‌ریختی حلقه‌ها است در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) برای هر $a, b \in R$، $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$،

(۲) برای هر $a, b \in R$، $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$،

(۳) $\varphi(1_R) = 1_S$.

همچنین هم‌ریختی $\varphi : R \to S$ را

(۱) تک‌ریختی حلقه‌ها نامیم، هرگاه φ یک به یک باشد،

(۲) بروریختی حلقه‌ها نامیم، هرگاه φ پوشا باشد،

(۳) یک‌ریختی حلقه‌ها نامیم، هرگاه φ یک به یک و پوشا باشد. هرگاه $\varphi : R \to S$ یک یک‌ریختی حلقه‌ها باشد، گوییم حلقه‌ی R باحلقه‌ی S یک‌ریخت است و آن را با نماد $R \cong S$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۷.۱.۱ فرض کنیم نگاشت $\varphi : R \to S$ یک هم‌ریختی حلقه‌ها باشد. در این صورت هسته‌ی هم‌ریختی φ را با نماد $\ker \varphi$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ker \varphi = \{a \in R \mid \varphi(a) = 0_S\}.$$

تعریف ۲۸.۱.۱ دنباله‌ی زیر از مدول‌ها و هم‌ریختی‌ها را یک دنباله‌ی دقیق گوییم هرگاه $Imf_i = \ker f_{i+1}$

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

ودنباله‌ی زیر را دنباله‌ی دقیق کوتاه می نامیم

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f} M_i \xrightarrow{g} M_{i+1} \longrightarrow 0$$

تعریف ۲۹.۱.۱ اگر $f : M \longrightarrow N$ هم‌ریختی باشد، آن‌گاه گوییم f تک‌ریختی شکافته شدنی است هر گاه $f' : N \longrightarrow M$ موجود باشد به طوری که $ff' = 1_M$.

تعریف ۳۰.۱.۱ اگر $f : M \longrightarrow N$ هم‌ریختی باشد، آن‌گاه گوییم f بروریختی شکافته شدنی است هر گاه $f' : N \longrightarrow M$ موجود باشد به طوری که $f'f = 1_N$.

تعریف ۳۱.۱.۱ دنباله‌ی دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f} M_i \xrightarrow{g} M_{i+1} \longrightarrow 0$$

را شکافته شدنی گوییم هر گاه f تک‌ریختی شکافته شدنی و g بروریختی شکافته شدنی باشد.

تعریف ۳۲.۱.۱ فرض کنیم M و N، R-مدول باشند. تک‌ریختی $f : N \longrightarrow M$ را اساسی نامیم هرگاه $Im(f) \leq_e M$.

تعریف ۳۳.۱.۱ فرض کنیم M و N، R-مدول باشند. بروریختی $g : M \longrightarrow N$ را بسیار کوچک نامیم هرگاه $\ker(g) \ll M$.

تعریف ۳۴.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. عنصر $e \in R$ را خودتوان نامیم در صورتی که $e^{۲} = e$. حلقه‌ی R همواره دو خودتوان ۰_R و ۱_R را دارا می‌باشد. مجموعه‌ی تمام خودتوان‌های حلقه‌ی R را با $Id(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۵.۱.۱ خودتوان‌های $e_۱$ و $e_۲$ از حلقه‌ی R را خودتوان‌های متعامد گوییم هرگاه $e_۱e_۲ = ۰_R = e_۲e_۱$.

تعریف ۳۶.۱.۱ فرض کنیم I یک ایدآل از حلقه‌ی R باشد. گوییم خودتوان‌ها به پیمانه‌ی I انتقال می‌یابند هرگاه برای هر $x \in R$ که $x^{۲} - x \in I$، عنصر خودتوان (منحصر به فرد) $e \in R$ موجود باشد به طوری که $x - e \in I$. به عبارت دیگر اگر $\bar{x} = x + I$ عنصر خودتوانی از حلقه‌ی R/I باشد آن‌گاه عنصر خودتوان $e \in R$ یافت شود به قسمی‌که $\bar{x} = \bar{e}$.

تعریف ۳۷.۱.۱ فرض کنیم e یک عنصر خودتوان از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $eRe = \{exe \mid x \in R\}$ با جمع و ضربی که در R تعریف می‌شود، تشکیل یک حلقه می‌دهد که عضو همانی جمعی آن $e۰_Re = ۰_R$ و عضو همانی ضربی آن $e۱_Re = e$ می‌باشد. اگر $e \neq ۱_R$، آنگاه روشن است که حلقه‌ی eRe زیر حلقه‌ای از R نیست. زیرا عضو همانی ضربی حلقه‌ی eRe مخالف عضو همانی ضربی R است.

تعریف ۳۸.۱.۱ R–مدول P پروژکتیو است هرگاه برای هر R–مدول M و N و برووریختی از M به N، هر هم‌ریختی از P به N قابل توسیع به یک هم‌ریختی از P به M باشد به طوری که دیاگرام زیر

جابه‌جایی باشد.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ M & \rightarrow & N \rightarrow & 0 & \end{array}$$

مدول E را انژکتیو نامیم هرگاه برای هر مدول A و هر زیرمدول X از A، هر هم‌ریختی $X \to E$ قابل توسیع به یک هم‌ریختی $A \to E$ باشد.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & A \\ & & \downarrow & \swarrow & \\ & & E & & \end{array}$$

تعریف ۳۹.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول راست (چپ) باشد. جفت (P,p) را یک پوشش پروژکتیو مدول M_R نامیم هرگاه P یک $R-$مدول راست (چپ) پروژکتیو و p یک بروریختی بسیار کوچک از P به M باشد.

تعریف ۴۰.۱.۱ Rـمدول E' را توسیع Rـمدول E می‌نامیم هرگاه E زیرمدولی از E' باشد. اگر E زیرمدول سره‌ی E' باشد آن‌گاه E' را توسیع سره از E می‌نامیم.

تعریف ۴۱.۱.۱ فرض کنیم M توسیعی از Rـمدول N باشد. گوییم M توسیع اساسی N است هرگاه به ازای هر زیرمدول غیر صفر مثل K از M داشته باشیم $N \cap K \neq 0$.

مثال ۴۲.۱.۱ Q توسیع اساسی از $\mathbb{Z}$ است.