بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی جابجایی در جبرهای موضعاً محدب ضربی

از: یونس اسکندری

استاد راهنما: دکتر اسماعیل انصاری

شهریور ۸۷

تقدیم به مادرم

تقدیر و تشکر

با سپاس فراوان از استاد راهنمای گرامی ام ، دکتر اسماعیل انصاری که زحماتشان در دوران تحصیلم را هرگز از یاد نخواهم برد ، با تشکر از دکتر حسین سهله و عباس سهله که داوری پایان نامه ام را قبول کردند و با تشکر از دکتر فتحی مدیر گروه ریاضی .

همچنین از مریم هوشیاریان که در تایپ این پایان نامه زحمت زیادی متحمل شد ، بی اندازه سپاسگزارم.
از دوستان خوبم شهرام صفی زاده، احسان انجیدنی،علی انصاری،محمد مشعوف هم ممنونم.

فهرست مطالب:

صفحه

چکیده

بررسی جابجایی در جبرهای موضعاً محدب ضربی

یونس اسکندری

در این پایان نامه مفاهیم شبه جابجایی و شبه جابجایی نسبت به یک زیر فضای خطی مطرح می شود و این مفاهیم و روابط آنها با جابجایی روی جبرهای موضعاً محدب ضربی تام دنباله ای بررسی می شوند. همچنین قضایایی در مورد جابجایی روی این جبرها اثبات می شود که در حقیقت این قضایا تعمیم قضایای مشابه، از جبرهای باناخ به جبرهای موضعاً محدب ضربی تام دنباله ای می باشند.

کلید واژه ها: جبرهای موضعاً محدب ضربی – شبه جابجایی – جابجایی

Abstract

Commutativity criterions in locally m-convex algebras

Yoones Eskandari

In this dissertation we define the notions of semicommutativity and semicommutativity modulo a linear subspace and we prove some results on these notions for sequentially compelete m-convex algebras. These results are the extention of the similar commutativity criterions from Banach algebras to sequentially compelete m-convex algebras.

Key words: locally m-convex algebras,LMC, commutativity, semicommutativity.

مقدمه:

مبحث جابجایی روی جبرها به قدری اهمیت دارد که جبر را به دو گروه جبرجابجایی و جبرناجابجایی تقسیم کرده است. برقراری جابجایی در جبرهای باناخ با توجه به نتایج بسیار مهمی از قبیل زیرضربی و زیرجمعی بودن شعاع طیفی و نیز با توجه به بیشتر جبرهای باناخی که با آنها سروکار داریم و جابجایی هستند(همانند جبرتوابع)؛ بسیار اهمیت دارد. جبرهای موضعاً محدب ضربی تام (و تام دنباله ای) نزدیکترین خانواده به جبرهای باناخ هستند و بررسی شرایط جابجایی روی این جبرها نیزموضوع اصلی این پایان نامه است.

در جبرهای باناخ با استفاده از روابطی که مابین نرم حاصلضرب اعضا یا نرم هر عضو با شعاع طیفی آن عضو و... برقرار است،(که در همین پایان نامه در پایان فصل اول بیان میشوند) می توان جابجایی بودن جبر را نتیجه گرفت. اما در جبرهای موضعاً محدب ضربی به جای نرم؛ خانواده ای از شبه نرمهای زیرضربی و جداکننده داریم و اگر بخواهیم مشابه قضایای جابجایی در جبرهای باناخ را به این جبرها تعمیم دهیم روابط مربوط را باید با شبه نرمها بررسی کنیم. یکی از راه های تعمیم این قضایا به جبرهای موضعاً محدب ضربی استفاده از مفهوم شبه جابجایی نسبت به یک زیرفضا است که روش تحقیق ما نیز چنین است.

در این پایان نامه در فصل اول با نگاهی به گذشته، جبرهای توپولوژیکی را معرفی می کنیم و قضایای مورد استفاده در فصل های بعد و بخصوص قضایای جابجایی درجبرهای باناخ را که قرار است به جبرهای موضعاً محدب ضربی تعمیم دهیم، بیان می کنیم. در فصل دوم سعی می کنیم هر چه بیشتر با جبرهای موضعاً محدب ضربی تام و رابطه ی آن با جبر باناخ؛ همچنین مفاهیم طیف و شعاع طیفی، برد عددی و شعاع عددی در این جبرها آشنا شویم. سپس به طرح مفهوم شبه جابجایی و روابط بین شبه جابجایی و جابجایی می پردازیم. در فصل سوم نیز جابجایی در جبرهای موضعاً محدب ضربی تام دنباله ای بررسی می شود و نتایج متنوعی بدست می آید.

در این پایان نامه سعی شده است بیشتر از نمادهای مرسوم استفاده شود. شماره گذاری تعریف ها وقضایا و...در فصل۱ به ترتیب "فصل-بخش-شماره" ،و در فصل۲ و فصل۳ بصورت" فصل- شماره"است. در پایان اثبات قضایا نیز برای جلوگیری از تکرار جملاتی از قبیل "این همان بود که می خواستیم" و... از علامت $\triangle$ استفاده شده است. همچنین لازم به ذکر است این پایان نامه براساس مقاله [۴] تنظیم شده است.

فصل ۱ :

تعاریف و قضایای مقدماتی و پیش نیاز

در این فصل با بررسی کوتاهی از فضاهای برداری؛ فضاهای برداری توپولوژیکی را مطرح کرده؛ خواص مهم آنها را بررسی کرده و به معرفی اجمالی جبرهای نرمدار و جبرهای نرمدار تام (باناخ) می پردازیم. در نهایت قضایای مهم در مورد شرایط جابجایی در جبرهای نرمدار را بیان خواهیم کرد.لازم به ذکر است که تمامی تعاریف و قضایای این بخش بر اساس [۸] و [۲] گرداوری شده است.

۱-۱: فضای برداری

تعریف ۱-۱-۱: (Xو + و .) را که در آن X یک مجموعه؛ + عمل جمع و . عمل ضرب اسکالر نسبت به میدان (میدان مختلط) است، یک فضای برداری می گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

الف) برای هر سه عضو x, y, z در X داشته باشیم:

$$x+y=y+x \quad \text{و} \quad (x+y)+z=x+(y+z)$$

ب) عضوی چون $0 \in X$ باشد که برای هر $x \in X$ ؛ $x+0=x$.

ج) برای هر عضو $x \in X$ ؛ عضوی چون $-x \in X$ باشد که $x+(-x)=0$

د) برای هر $x \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \quad \text{و} \quad 1x=x$$ (که 1عنصر یکانی میدان است)

هـ) برای $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad \text{و} \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$

تعریف ۱-۱-۲:

$Y \subseteq X$ را یک زیر فضای برداری X می گوییم هرگاه Y با دو عمل فوق (ضرب اسکالر و جمع) خودش یک فضای برداری باشد. در این حالت کافیست Y نسبت به عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد؛ یعنی اگر برای $x, y \in Y$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ همیشه $\alpha x - Y$ عضو Y باشد.

تعریف ۱-۱-۳:

فرض کنیم (Xو + و .) یک فضای برداری باشد؛ $C \subseteq X$ را محدب گوییم هرگاه برای $0 \le t \le 1$و $x, y \in C$ داشته باشیم $tx+(1-t)y \in C$.

تعریف ۱-۱-۴:

الف) $B \subseteq X$ را بالانس گوییم هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ که $|\alpha| \le 1$: $\alpha B \subseteq B$

(قابل توجه است که $\alpha B = \{\alpha x \, , \, x \in B\}$)

ب) $U \subseteq X$ را متقارن می گوییم اگر برای هر λ که $|\lambda| = 1$ داشته باشیم $\lambda U = U$

تعریف ۱-۱-۵:

فضای برداری X را از بُعد متناهی گوییم هرگاه تعداد متناهی عضو مانند $x_1, \dots, x_n$ در آن یافت شود که هر عضو $x \in X$ را بتوان به صورت ترکیب خطی منحصر بفرد

$(\alpha_i \in \mathbb{C})$ $\quad x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ نوشت.

تعریف ۱-۱-۶:

اگر فضای برداری X از بعد متناهی نباشد، در این حالت X را از بُعد نامتناهی گوییم.

۱-۲: فضای برداری توپولوژیکی

تعریف ۱-۲-۱:

فرض کنیم روی فضای X توپولوژی τ گذاشته شده است.

الف) $E \subseteq X$ را بسته می گوییم هرگاه $E^c \subseteq X$ باز باشد یعنی $E^c \in \tau$

ب) $\overline{E}$ را اشتراک تمام مجموعه های بسته حاوی E تعریف می‌کنیم و به آن بستار E می‌گوییم.

ج) E^o را اجتماع زیر مجموعه های باز E می گیریم و به آن درون E می گوییم.

د) هر همسایگی نقطهٔ $p \in X$ یک مجموعهٔ باز حاوی p خواهد بود.

هـ) $K \subseteq X$ فشرده است اگر هر پوشش باز K دارای زیر پوشی متناهی باشد.

و) $\tau' \subseteq \tau$ را یک پایه برای توپولوژی τ می گوییم اگر هر عضو τ اجتماعی از اعضای τ' باشد.

ز) خانواده $\{U_\alpha\}$ را یک پایهٔ موضعی در نقطهٔ صفر می گوییم اگر U_α ها همسایگی های صفر و برای همسایگی صفر مانند V ؛ α ای باشد که $U_\alpha \subseteq V$

ح) دنبالهٔ $\{x_n\}$ را در فضای X همگرا می گوییم هرگاه $x \in X$ ای باشد که هر همسایگی x شامل همه جملات دنباله بجز شاید تعداد متناهی باشد.

نکته ۱-۲-۲:

اگر توپولوژی τ روی فضای برداری X چنان باشد که هر مجموعه تک عضوی بسته باشد و جمع و ضرب اسکالر پیوسته باشند به (X,τ) فضای برداری توپولوژیکی می‌گوییم. اگر چنین باشد توپولوژی τ هاسدورف نیز هست. پس در حالت کلی فضاهای برداری توپولوژیک را هاسدورف در نظر می گیریم.

تعریف ۱-۲-۳:

فرض کنید (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد.

الف) $E \subseteq X$ را کراندار می گوییم اگر برای هر همسایگی صفر مانند V ، $t > 0$ ی باشد که برای $s > t$ $E \subseteq sV$.

ب) X را موضعاً محدب می نامیم اگر یک پایهٔ موضعی با اعضای محدب در صفر داشته باشد.

ج) X را موضعاً کراندار می گوییم اگر صفر یک همسایگی کراندار داشته باشد.

د) X را متر پذیر گوییم اگر متر پایای $d: X \times X \to R$ باشد که توپولوژی τ را تولید کند.

لازم به یادآوری است که متر d را پایا می گوییم اگر برای هر $x,y,z \in X$ داشته باشیم:

$$d(x+z, y+z) = d(x,y)$$

هـ) X را یک فضای F (F-space) می نامیم اگر متر پذیر و تام باشد.

و) دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای توپولوژیک X را کوشی می گوییم اگر برای همسایگی صفر V؛ $n_0 \in N$ ای باشد که برای $m,n \geq n_0$ داشته باشیم $x_n - x_m \in V$ اگر در فضای X هر دنبالهٔ کوشی همگرا باشد به X فضای تام دنباله ای و اگر برای هر شبکه کوشی که در تعریف ۲- ۱۱بحث شده همگرا باشد به آن فضای تام می گوییم.

نکته ۱-۲-۴:

فرض کنید (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد.

به دلیل پیوستگی جمع و ضرب اسکالر ثابت می شود توابع M_λ, T_a که برای $a \in X$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ بصورت $T_a(x) = a + x$ و $M_\lambda(x) = \lambda x$ تعریف می شوند همیومورفیسم می باشند. پس در تعاریف بالا اگر در نقطهٔ صفر خاصیتی برقرار باشد در هر نقطهٔ $p \in X$ نیز برقرار خواهد بود. مثلاً اگر N یک همسایگی کراندار صفر باشد؛ $p + N$ همسایگی کراندار نقطهٔ p خواهد بود. پس همیشه کافیست پایهٔ موضعی و همسایگی ها را در صفر بررسی کرده و برای هر نقطهٔ دیگر بکار ببریم.

تعریف ۱-۲-۵:

فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد. تابع $p : X \to R$ را یک شبه نُرم روی X می گوییم هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in X$؛ $y \in X$

الف) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$

ب) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

لازم به ذکر است اگر از $p(x) = 0$ نتیجه شود $x = 0$ ؛ p را یک نُرم روی X می نامیم. در بیشتر اوقات با خانوادهای از شبه نرم ها مانند $\{p_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ سروکار داریم که در این پایان نامه آن را بصورت خلاصه (p_α) نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۲-۶:

فرض کنید $\|.\| : X \to R$ یک نُرم روی فضای X باشد. این نُرم می تواند توپولوژی ای روی X ایجاد کند، بدین صورت که برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعهٔ $\{x \in X; \|x\| < \varepsilon\}$ را درنظر می گیریم. این مجموعه ها یک پایهٔ موضعی در نقطهٔ صفر خواهند بود که X را به یک فضای برداری توپولوژیک تبدیل می کنند. در این صورت به X یک فضای نُرمدار می گوییم.

تعریف ۱-۲-۷:

اگر X فضای نُرمدار تامّی باشد به آن فضای باناخ می گوییم.

قضیه ۱-۲-۸:

اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد:

الف) $A \subseteq X \quad , \quad B \subseteq X \quad \Leftarrow \quad \overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B}$

ب) اگر $Y \subseteq X$ زیر فضای X باشد $\overline{Y}$ نیز چنین است.

ج) اگر $C \subseteq X$ محدّب باشد؛ C^o و $\overline{C}$ نیز چنین هستند.

د) اگر $E \subseteq X$ کراندار باشد $\overline{E}$ نیز چنین است.

هـ) هر همسایگی صفر شامل یک همسایگی بالانس صفر است.

و) هر همسایگی محدّب صفر شامل یک همسایگی محدّب و بالانس صفر است.

برهان: [۸] ص ۱۱ $\triangle$

نکته ۱-۲-۹:

از قسمت (و) تعریف قبل نتیجه می گیریم که فضاهای موضعاً محدب یک پایهٔ موضعی با اعضای محدّب و بالانس دارند.

تعریف ۱-۲-۱۰:

تابع $f : X \to Y$ را خطی گوییم اگر برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$$

تعریف ۱-۲-۱۱:

مجموعهٔ توابع خطی و پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{C}$ را با X^* نشان داده و به آن فضای دوگان X می گوییم.

قضیه ۱-۲-۱۲:

هر زیر فضای با بعد متناهی X بسته است.

قضیه ۱-۲-۱۳: اگر X یک فضای توپولوژیک برداری با پایهٔ موضعی شمارا باشد متریذیر است.

۱-۳ فضاهای موضعاً محدّب

تعریف ۱-۳-۱:

خانوادهٔ شبه نرم های (p_α) روی X را جدا کننده می گوییم اگر بـرای $x \neq 0$ αای یافـت شـود کـه $p_\alpha(x)$ مخالف صفر باشد.

تعریف ۱-۳-۲:

فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد. $A \subseteq X$ را جاذب گوییم اگـر بـرای هـر $x \in X$ ، $\lambda \in \mathbb{C}$ یافـت شود که $x \in \lambda A$. برای چنین مجموعه ای تابع $\mu_A : X \to R$ با $\mu_A(x) = \inf\{t > 0\,;\, x \in tA\}$ مـی شـود کـه آن را تابع مینکوفسکی روی A می نامیم. واضح است که همسایگی های صفر جاذب هستند.

قضیه ۱-۳-۳:

اگر p یک شبه نرم روی فضای برداری توپولوژیک X باشد؛

الف) $p(0) = 0$

ب) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) \qquad \forall x, y \in X$

ج) $p(x) \geq 0 \qquad \forall x \in X$

د) $\{x; p(x) = 0\}$ زیر فضای X است که با $Ker\ p$ نشان می دهیم.

هـ) $B = \{x; p(x) < 1\}$ همسایگی محدب و بالانس صفر است و $p = \mu_B$.

و) μ_A یک شبه نُرم روی X است اگر و فقط اگر A همسایگی محدب و بالانس صفر باشد.

برهان: [۸] $\triangle$

نکته ۱-۳-۴:

فرض کنیم X یک فضای موضعاً محدب با پایهٔ موضعی محدّب (U_α) در صفر باشد؛ بنابر قسمت (و) قضیهٔ ۱-۲-۸ مـی توانیم پایهٔ موضعی محدّب و بالانس (V_α) را داشته باشیم؛ تابع مینکوفسکی برای هر V_α یک شبه نرم خواهد بـود (قسـمت (و) قضیه ۱-۳-۳) و آن را با p_α نشان می دهیم. حـال اگـر $x \neq 0$ پس αای هـست کـه $x \notin V_\alpha$ زیـرا (V_α) پایـهٔ موضعی است. پس $1 \leq p_\alpha(x)$ (بنابه تعریف تابع مینکوفسکی)

لذا چون $p_\alpha(x)$ مخالف صفر شد پس خانوادهٔ (p_α) جدا کننده نیز می باشند. پس در صورت داشتن یـک فـضای موضـعاً محدّب خود به خود خانواده شبه نرم های جدا کننده روی آن فضا نظیر می شود. قضیهٔ بعدی برعکس این مطلب را نشان مـی دهد؛ بدین صورت که اگر روی فضای برداری X شبه نرم های جدا کنندهٔ (p_α) وجود داشته باشند؛ X موضعاً محدّب خواهد بود (با توپولوژی ای که توسط (p_α) ها روی X قرار می گیرد.)

قضیه ۱-۳-۵:

اگر (p_α) یک خانواده از شبه نرمهای جدا کننده روی فضای برداری X باشـند بـرای هـر α و $n \in \mathrm{N}$ مجموعـهٔ $V(p_\alpha,n)=\left\{x\in X;\ \ p_\alpha(x)<\dfrac{1}{n}\right\}$ را در نظر می گیـریم. اشـتراک هـای متنـاهی $V(p_\alpha,n)$ هـا یـک پایـهٔ موضعی در صفر است که X را به یک فضای موضعاً محدب تبدیل می کند.

نکته ۱-۳-۶ :

اگر $\boldsymbol{B}$ را مجموعه اشتراک های متناهی $V(p_\alpha,n)$ بگیـریم، هـر همـسایگی $x\in X$ را مـی تـوانیم بـصورت $x+N$ بنویسیم که N (همسایگی صفر) اجتماع دلخواهی از اعضای $\boldsymbol{B}$ است. پس بدین صورت روی X توپولوژی گذاشته مـی شـود. بـا توجه به این که اعضای $\boldsymbol{B}$ همسایگی های محدب صفرند، X به فضایی موضعاً محدب تبدیل می شود. بر عکس اگر $\boldsymbol{B}$ یـک پایـه موضعی با اعضای بالانس و محدب باشد، به آن با توجه به نکته ۱-۳-۴ خانواده ای از شبه نرم های جدا کننده نظیر مـی شـود. این شبه نرم ها با توجه به قضیه ۱-۳-۵ توپولوژی ای روی X می گذارند. در [۸] ص ۲۷ بحـث شـده کـه ایـن توپولـوژی بـا توپولوژی تولید شده توسط $\boldsymbol{B}$ یکی است.

نکته ۱-۳-۷:

با توپولوژی شرح داده شده در قضیهٔ قبل هر p_α پیوسته خواهد شد.

قضیه ۱-۳-۸:

اگر خانوادهٔ شبه نرم های جدا کنندهٔ (p_α) روی X شمارا باشند، X مترپذیر خواهد شد.

برهان:

کافیست
$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{-i}p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)}$$

را که (p_i) ها شبه نرم های شمارا می باشند در نظر بگیریم. $\triangle$

قضیه ۱-۳-۹:

فضای توپولوژیک برداری X نرم پذیر است اگر و فقط اگر موضعاً محدب و موضعاً کراندار باشد.

برهان:

اگر X نرم پذیر باشد و $\|.\|$ نُرم مورد نظر باشد $\{x\in X; \|x\|<r\}$ همسایگی محدب و کراندار صفر خواهد بود. (برای هر $r>0$) و برعکس اگر V همسایگی محدب و کراندار صفر باشد زیر مجموعهٔ محدب و بالانس U را خواهد داشت که مسلماً کراندار نیز هست؛

حال کافیست μ_U (تابع مینکوفسکی) را در نظر بگیریم که در تمام شرایط نُرم صدق می کند. $\triangle$

۱-۴: فضاهای خارج قسمتی برداری توپولوژیک

تعریف ۱-۴-۱:

فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. اگر N یک زیر فضای برداری X باشد؛ $\frac{X}{N}=\{x+N\ ;\ x\in X\}$ را که فضای خارج قسمتی X نسبت به N می نامیم. اگر $\wedge{:}X\to\frac{X}{N}$ نگاشت طبیعی خارج قسمتی $\hat{x}=x+N$ باشد، روی $\frac{X}{N}$ جمع و ضرب اسکالر را بصورت:

الف) $\hat{x}+\hat{y}=\widehat{x+y}$

ب) $\alpha\hat{x}=\widehat{\alpha x}$

تعریف می کنیم. اگر X فضای برداری توپولوژیک باشد و N زیرفضای برداری بسته آن باشد؛ $\frac{X}{N}$ همراه با جمع و ضرب اسکالر بالا یک فضای برداری توپولوژیک خواهد بود که فضای برداری توپولوژیک خارج قسمتی نامیده می شود. در این فضا مجموعهٔ E عضو توپولوژی روی $\frac{X}{N}$ است، اگر $\wedge^{-1}(E)$ عضو توپولوژی روی X باشد.

قضیه ۱-۴-۲:

اگر X فضای برداری توپولوژیک و $\frac{X}{N}$ فضای خارج قسمتی برداری توپولوژیکی آن باشد؛

الف) $\wedge : X \to \frac{X}{N}$ خطی پیوسته و باز است.

ب) خواص موضعاً محدّب؛ موضعاً کراندار؛ نُرم پذیر؛ مترپذیر و تامّ بودن از X به $\frac{X}{N}$ منتقل می شود.

برهان: [۸] ص۳۰ $\triangle$

تعریف ۱-۴-۳:

اگر X فضای نرمدار باشد طبق قضیهٔ قبل می دانیم $\frac{X}{N}$ نیز فضای نرمدار خواهد بود. اما نُرم در این فضا بصورت

$\|\hat{x}\| = \inf\{\|x - z\|, z \in N\}$ $\quad \forall x \in X$ تعریف می شود.

نکته۱-۱-۴:

فرض کنیم X فضای برداری توپولوژیکی و $p : X \to R$ یک شبه نُرم باشد. اگر $N = \{x; p(x) = 0\}$؛ طبق قسمت (د) قضیه۱-۳-۳ می دانیم N زیر فضای برداری X است. روی $\frac{X}{N}$ شبه نرم q را بصورت $q(\hat{x}) = p(x)$ تعریف می کنیم. q یک نرم روی $\frac{X}{N}$ خواهد شد زیرا اگر $q(\hat{x}) = 0$ یعنی $p(x) = 0$ و $x \in N$ خواهد بود و یعنی $\hat{x} = \hat{0}$.

تا کنون فضاهای برداری توپولوژیک اجمالاً معرفی شدند؛ اگر بجز جمع و ضرب اسکالر روی این فضاها عمل ضرب نیز بصورت $\begin{cases} \times : X \times X \to X \\ (a,b) \to ab \end{cases}$ تعریف شده باشد طبق شرایطی جبر توپولوژیکی خواهیم داشت. در قسمت بعدی به معرفی و خواص اینگونه جبرها می پردازیم.

۱-۵ : جبرهای توپولوژیکی

تعریف ۱-۵-۱:

فضای برداری $(X,+,\cdot)$ یک جبر است اگر عمل ضرب $\times : X \times X \to X$ نیز بصورت $(a,b) \to ab$ ؛ $\forall a,b \in X$ تعریف شده باشد که برای هر x,y,z در X:

الف) $x(yz) = (xy)z$

ب) $x(y+z) = xy + xz$

ج) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$

تعریف ۱-۵-۲:

تابع ضرب را در (a,b) پیوسته (همزمان) گویند اگر برای همسایگی W از ab ؛ همسایگی V از a و همسایگی U از b باشد که $V \times U \subseteq W$

تعریف ۱-۵-۳:

فضای توپولوژیک برداری $(X,+,.,\times)$ را که تابع ضرب در هر نقطه پیوسته باشد، جبر توپولوژیکی می گوییم.

تعریف ۱-۵-۴:

اگر A و B دو جبر باشند؛ $\varphi : A \to B$ را هومورفیسم می گوییم اگر φ خطی و $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ (برای هر $x, y \in A$). اگر φ یک به یک و پوشا باشد A و B را با هم ایزومورف می نامیم.

تعریف ۱-۵-۵:

جبر B را زیر جبر A می گوییم اگر B زیر مجموعهٔ نسبت به عمل ضرب بسته ی A باشد.

قضیه ۱-۵-۶:

اگر (p_α) یک خانواده از شبه نرمهای جدا کننده روی جبر X باشد که برای هـر α و $x,y \in X$ داشـته باشـیم $p_\alpha(xy) \le p_\alpha(x) p_\alpha(y)$ این شبه نرم ها توپولوژی ای روی X می گذارند که تابع ضرب را پیوسته می کنـد و X بـه جبر توپولوژیکی موضعاً محدّب تبدیل می شود. به شبه نرم دارای خاصیت فوق شبه نُرم جبری و به خاصیت فوق خاصیت زیـر ضربی می گوییم.

تعریف ۱-۵-۷:

جبر A را که نُرم با خاصیت $\|xy\| \le \|x\| \|y\|$ (زیر ضربی) روی آن تعریف شده است، جبر نرمدار می نامیم. اگـر علاوه بر این جبر نرمدار A تآم باشد به آن جبر باناخ می گوییم.

نکته ۱-۵-۸:

می دانیم دو جبر نرمدار A و B با هم ایزومورف هستند. هرگاه همومورفیـسم یـک بـه یـک و پوشـای $\varphi : A \to B$ وجود داشته باشد و حافظ نُرم نیز باشد یعنی $\|\varphi(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in A$. در این صورت مشاهده می شـود φ حافظ فاصله نیز هست زیرا اگر $x, y \in A$؛ داریم $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|\varphi(x-y)\| = \|x-y\|$.

قضیه ۱-۵-۹:

فرض کنیم $(A, \|.\|)$ یک جبر نرمدار باشد جبری باناخ مانند $(B, \|.\|_1)$ وجود دارد که $\overline{A} = B$ و تحدید $\|.\|_1$ بـه A برابر $\|.\|$ می باشد. B را کامل (تآم) شده A می نامیم.

برهان:

در [۱۲] برای فضاهای متری اثبات شده است و می توان با قرار دادن $d(x,y) = \|x-y\|$ برای فـضاهای نرمـدار آن را بررسی کرد.

$\triangle$