دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

حل معادله دیفرانسیل فازی
به سه روش رانگ – کوتا، تیلور و شبه– رانگ – کوتا

نگارش :

الهام شیخی

استاد راهنما:

دکتر بهمن غضنفری

استاد مشاور:

دکتر امیر قاسم غضنفری

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

۱۳۹۱

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی شمارش بر لحظه لحظه‌ی زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گسترده‌ی دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید.

تلاش های استاد فرهیخته و گرانمایه‌ام، آقای **دکتر بهمن غضنفری**، که صبورانه و با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق وا می‌داشتند و همچنین زحمات استاد مشاور ارجمندم، آقای **دکتر امیر قاسم غضنفری** را صمیمانه ارج می‌نهم.

از تمامی اساتید گرامی گروه محترم کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی که در حضور گرمشان افتخار شاگردی داشته ام و دارم، کمال تشکر و قدردانی می‌نمایم.

و همیشه مدیون زحمات بی‌دریغ **پدر و مادر عزیزم** هستم، که دعای خیرشان روشنی بخش مسیر زندگی‌ام بوده و همچنین ارج می‌نهم، زحمات **همسر بزرگوارم** را که صبر و تحملش در این راه یاریگرم بود.

الهام شیخی

۱۳۹۱

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم
و همچنین همسر گرامی ام
که مهرشان، دلگرمی و بهانه زندگی است.

چکیده

نام خانوادگی : شیخی **نام :** الهام

عنوان پایان‌نامه : حل معادله دیفرانسیل فازی به سه روش رانگ—کوتا، تیلور و شبه—رانگ—کوتا

استاد راهنما: دکتر بهمن غضنفری **استاد مشاور :** دکتر امیر قاسم غضنفری

درجه تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشتهٔ :** ریاضی کاربردی

محل تحصیل : دانشگاه لرستان **دانشکده :** علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی : ۱۳۹۱ **تعداد صفحه:**

کلید واژه ها: اعداد فازی، معادله دیفرانسیل فازی، روش های بسط شبه— رانگ —کوتا، جواب عددی، روش تیلور، روش رانگ — کوتا.

چکیده: در این پروژه ابتدا دو روش عددی برای حل مساله مقدار اولیه معادله دیفرانسیل مرتبه اول فازی بر اساس بسط فرمول رانگ — کوتا مرتبه چهارم و روش تیلور را به کار می بریم و به حل مثالی توسط این دو روش می‌پردازیم. در مرحله بعد روش عددی دیگری را بر مبنای بسط فرمول شبه — رانگ — کوتا مرتبه چهارم ارائه می‌کنیم. از مشتق seikkala برای حل این مسائل استفاده می‌شود. ما از بسط فرمول های شبه — رانگ — کوتا برای زیاد کردن مرتبه دقت این جواب ها با استفاده از f و مشتق آن به جای ارزیابی f تنها استفاده می‌کنیم و در نهایت با حل مثال توسط این روش ها، میزان دقت این سه روش را با هم مقایسه می‌کنیم.

فهرست مندرجات

۰—۱ تاریخچه ی مجموعه های فازی

منطق فازی، برای اولین بار در سال ۱۹۶۰ توسط دکتر لطفی زاده، استاد علوم کامپیوتری دانشگاه برکلی کالیفرنیا، ابداع شد.
مقاله کلاسیک پرفسور لطفی زاده درباره مجموعه فازی که در سال ۱۹۶۵ به چاپ رسید [?]، سرآغاز جهتی نوین در علوم مهندسی سیستم و کامپیوتر بود. پس از آن پرفسور لطفی زاده به پژوهش های خود در زمینه مجموعه فازی ادامه داد تا آنکه در سال ۱۹۷۳ طی یک مقاله کلاسیک دیگر تحت عنوان « شرحی بر دیدی نو در تجزیه و تحلیل سیستم های پیچیده و فرآیند های تصمیم گیری » مفهوم استفاده از متغیرهای زبانی را در سیستم های حافظه و کنترل مطرح کرد. این مقاله اساس تکنولوژی کنترل بر مبنای منطق فازی است که اثرات عمیقی در طراحی سیستم های کنترل هوشیار داشت.
منطق کلاسیک هر چیزی را بر اساس یک سیستم دوتایی نشان می‌دهد (راست یا دروغ، ۰ یا ۱، سیاه یا سفید) ولی منطق فازی درستی هرچیزی را با یک عدد که مقدار آن بین صفر و یک است نشان می‌دهد مثلا اگر رنگ سیاه را عدد صفر و رنگ سفید را عدد۱ نشان دهیم، رنگ خاکستری عددی نزدیک به صفر خواهد بود.
در سال ۱۹۶۵، دکتر لطفی زاده نظریه سیستم های فازی را معرفی کرد [?]. در فضایی که دانشمندان علوم مهندسی به دنبال روش‌های ریاضی برای شکست دادن مسائل دشوار تر بودند، نظریه فازی به گونه ای دیگر از مدل‌سازی، اقدام کرد.
منطق فازی معتقد است که ابهام در ماهیت علم است. بر خلاف دیگران که معتقدند باید تقریب ها را دقیق تر کرد تا بهره وری افزایش یابد، لطفی زاده معتقد است که باید به دنبال ساختن مدل هایی بود که ابهام را به عنوان بخشی از سیستم مدل کند.
در منطق ارسطویی، یک دسته بندی راست و دروغ وجود دارد. تمام گزاره‌ها راست یا دروغ هستند. بنابراین جمله « هوا سرد است » در مدل ارسطویی اساسا یک گزاره نمی‌باشد، چرا که مقدار سرد بودن برای افراد مختلف متفاوت است و این جمله اساسا همیشه راست یا همیشه دروغ نیست. در منطق فازی، جملاتی هستند که مقداری راست و مقداری دروغ هستند برای مثال، جمله « هوا سرد است »

یک گزاره منطقی فازی می باشد که راستی آن گاهی کم و گاهی زیاد است. گاهی همیشه راست و گاهی همیشه دروغ و گاهی تا حدودی راست است.

در اوائل دهه ۱۹۸۰ این زمینه از نقطه نظر تئوریک پیشرفت کندی داشت. در این مدت راه حل ها و مفاهیم جدید اندکی معرفی گردید چرا که هنوز افراد کمی روی آن کار می‌کردند. در واقع کاربردهای کنترل فازی بود که هنوزی تئوری فازی را سرپا نگاه داشته بود. مهندسان ژاپنی به سرعت دریافتند که کنترل کننده های فازی به سهولت قابل طراحی بوده و در مورد بسیاری مسائل می توان از آن ها استفاده کرد.

دهه ۱۹۷۰ تئوری فازی رشد پیدا کرد و کاربردهای عملی ظاهر گردید.

اگربگوییم پذیرفته شدن تئوری فازی به عنوان یک زمینه مستقل بواسطه کارهای برجسته پرفسور لطفی زاده بوده سخن به گزاف نگفته ایم. بسیاری از مفاهیم بنیادی تئوری فازی به وسیله زاده در اواخر دهه ۶۰ و اوائل دهه ۷۰ مطرح گردید.

واژه فازی در فرهنگ لغت به صورت مبهم، گنگ، نا دقیق، گیج، مغشوش، درهم و نامشخص تعریف شده است. دو توجیه برای تئوری سیستم های فازی وجود دارد.

۱) دنیای واقعی ما بسیار پیچیده تر از آن است که بتوان یک توصیف و تعریف دقیق برای آن به دست آورد. بنابراین باید یک توصیف تقریبی یا همان فازی که قابل تجزیه و تحلیل باشد برای یک مدل معرفی شود.

۲) با حرکت ما به سوی عصر اطلاعات دانش و معرفت بشری تئوری فازی بسیار اهمیت پیدا می کند بنابراین به فرضیه ای نیاز داریم که بتوان دانش بشری را به شکل سیستماتیک فرموله کرده و آن را به همراه سایر مدل های ریاضی در سیستم های مهندسی قرار داد.

چارچوب نظری مسائل مقدار اولیه فازی در چند سال اخیر گسترش چشم گیری داشته است. مفهوم مشتق فازی اولین بار توسط چنگ [1] و زاده [2] در سال ۱۹۷۲ بکار برده شد [?].

---

[1] Chang
[2] Zadeh

صورت کلی یا عمومی مسائل مقداراولیه فازی توسط بوکلی [۳] و فیورینگ [۴] در سال ۲۰۰۰ مشخص شده [۲] و همچنین جواب های متعدد مساله مقداراولیه فازی که ممکن بود با استفاده از تمایز مشتقات بدست آید با هم مقایسه کردند.

عباس بندی و الله ویرانلو در سال ۲۰۰۴ روش های رانگ – کوتا مرتبه چهار را برای مساله با یک مقدار اولیه فازی بکاربردند [?].

پالیگینس [۵] و پاپاجرجیو [۶] در سال ۲۰۰۹ همگرایی برای مراحل مختلف روش های رانگ – کوتا را مورد مطالعه قرار دادند [?].

پدرسون [۷] و سامبندهم [۸] روش های عددی برای معادلات دیفرانسیل فازی هیبریدی را با استفاده از روش های رانگ – کوتا و اویلر در سال ۲۰۰۷ و ۲۰۰۸ مورد مطالعه قرار دادند [?] و [?] که نشان دهنده ضرورت و انجام تحقیق امروزه در این زمینه است.

---

[۳] Buckely
[۴] Feuring
[۵] Palligkinis
[۶] Papageorgiou
[۷] Pederson
[۸] Sambandham

فصل ۱

مقدمات فازی

۱—۱ مقدمه

در منطق صریح و قطعی ارزش هر گزاره می تواند راست یا دروغ باشد، به عنوان مثال: ایران یک کشور است، یک گزاره و ارزش آن راست است. در رابطه با منطق گزاره ها، نظریه ی مجموعه ها نیز مطرح است و هر مجموعه با اعضایش به طور کامل مشخص می شود، یا به عبارتی یک مجموعه وقتی به طور کامل معرفی می شود، که بتوان هر عنصر را به طور قطعی عضو و یا خارج آن مجموعه دانست.
هر مجموعه یک صفت مشخص کننده به خود را دارد. معیار عضویت عناصر در مجموعه صفت مشخص کننده ی مجموعه است و هر عضو اگر دارای آن صفت باشد عضو مجموعه و در صورت دارا نبودن صفت، خارج از مجموعه شناخته می‌شود. این معیار عضویت را تابع مشخصه می نامیم و به صورت زیر بیان می شود.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

حال اگر روزهای هفته گذشته را در نظر بگیریم و مجموعه مفروض A را روزهای ابری قرار دهیم آیا می توان مقدار μ_{Sat} را مشخص نمود؟ مقدار آن صفر است یا یک؟ واضح است که اگر آسمان روز شنبه کاملا پوشیده از ابر باشد μ_{Sat} مقدار یک را خواهد داشت و اگر کاملا صاف باشد مقدار آن صفر خواهد بود. ولی اگر روز شنبه نیمی از آسمان را ابر گرفته باشد ۵۰٪ آسمان ابری است که این یک ارزش گذاری غیر صریح و فازی است. از این رو برای این نوع تابع عضویت، تابع جدیدی به نام $\mu_{\tilde{A}}(x)$ معرفی می‌کنیم که برد آن به جای مجموعه ۱و۰ بازه [۱و۰] می باشد.

$$\mu_{\tilde{A}} : R \rightarrow [۰, ۱]$$

۱—۲ مجموعه فازی

مجموعه $\tilde{\mathbf{A}}$ که به هر عضو x از R، عددی در بازه [۱و۰] را نسبت می دهد، یک زیر مجموعه فازی از R نامند.

تعریف ۱.۱ اگر X مجموعه ی مرجعی باشد که هر عضو آن را با x نمایش دهیم، مجموعه فازی $\tilde{\mathbf{A}}$ در X به وسیله زوج های مرتب به صورت زیر بیان می شود.

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | \, x \in X \}$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت یا درجه عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ می باشد که میزان تعلق x به این مجموعه را نشان می دهد. در تابع $\mu_{\tilde{A}}(x)$، نزدیکی بیشتر به یک نشان دهنده تعلق بیشتر به مجموعه $\tilde{A}$ و نزدیکی بیشتر به صفر نشان دهنده تعلق کمتر x به مجموعه $\tilde{A}$ است.

از لحاظ شهودی می توان $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x)$ را درجه پذیرش ما در قبول x به عنوان عضوی از مجموعه $\tilde{\mathbf{A}}$ در نظر گرفت. همچنین در حالت حدی چنانچه $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$ باشد، x کاملا در $\tilde{A}$ قرار دارد و چنانچه $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) = ۰$ باشد، x اصلا عضو $\tilde{\mathbf{A}}$ نمی باشد.
برد این تابع اعداد حقیقی غیر منفی است که یک مقدار ماکزیمم برای آن در نظر می‌گیریم و در حالت نرمال بصورت فاصله بسته صفر و یک، یعنی [۱و۰] می‌باشد.
در صورتی که برد این تابع {۱ ,۰} باشد، همان مجموعه صریح (قطعی) را خواهیم داشت.

الف) به وسیله فهرست کردن تک تک اعضای متعلق به مجموعه مرجع X، که تابع عضویت آن غیر صفر باشد. این اعضا را به صورت زوج مرتب $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱.۱ فرض کنیم یک بنگاه مسکن میزان راحتی و مناسب بودن منازل ارائه شده برای فروش را با تعداد اتاق خواب های آن می سنجد. و تعداد اتاق خوابهای آن یکی از اعضاء

مجموعه ی $X = \{۱, ۲, ..., ۱۰\}$ می باشد، مجموعه ی فازی «منازل راحت برای یک خانواده چهار نفری» به صورت زیر بیان می شود.

$$\tilde{A} = \{(۱, ۰/۲), (۲, ۰/۵), (۳, ۰/۸), (۴, ۱), (۵, ۰/۷), (۶, ۰/۳)\}$$

ب) بصورت تحلیلی و تعریف مشروط به شکل تابع.

مثال ۲.۱ مجموعه ی فازی «اعدادی که از ۱۰ خیلی بزرگترند» بصورت زیر بیان می شود.

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | \, x \in X\}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۱۰ \\ \frac{۱}{۱+(x-۱۰)^{-۲}} & x > ۱۰ \end{cases}$$

ج) اگر $\tilde{A}$ مجموعه ای گسسته باشد.

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_۱)}{x_۱} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_۲)}{x_۲} + ... + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n}$$

مثال ۳.۱ مجموعه ی $\tilde{\mathbf{A}} = \{$ اعداد طبیعی نزدیک به ۱۰ $\}$ این مجموعه را به صورت زیر نمایش می دهیم

$$\tilde{A} = \frac{۰/۱}{۷} + \frac{۰/۵}{۸} + \frac{۰/۸}{۹} + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۰/۸}{۱۱} + \frac{۰/۵}{۱۲} + \frac{۰/۱}{۱۳}$$

تعریف ۲.۱ دو مجموعه فازی $\tilde{\mathbf{A}}$ و $\tilde{B}$ را برابر گوییم اگر و تنها اگر

$$\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$$

تعریف ۳.۱ مجموعه فازی $\tilde{\mathbf{A}}$ را زیر مجموعه ی مجموعه فازی $\tilde{B}$ گوییم اگر و تنها اگر

$$\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$$

تعریف ۴.۱ مجموعه‌مرجع X و زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از آن را در نظر می‌گیریم. مجموعه ی عناصری از X را که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی $0 < r \leq 1$ باشد، r سطح A (مجموعه در سطح r از A) گوییم و با

$$A_r = \{x \in X | \, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq r\}$$

اصل گسترش یکی از مفاهیم اساسی تئوری مجموعه های فازی است که می‌تواند برای تعمیم مفاهیم ریاضی قطعی به مجموعه های فازی بکار گرفته شود. این اصل در شکل اولیه اش توسط زاده در سال ۱۹۶۵ارائه گردید [?] و بعدها توسط خود زاده، دوبوا، براد و دیگران اصلاح شد. این اصل به ویژه در تعمیم عملگرهای جبری و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی مفید است.

۱—۳ اصل گسترش

یک تابع معمولی $f: X \to Y$ را در نظر بگیرید. در این تابع X دامنه و Y برد نامیده می شود. این تابع به هر $x \in X$ عددی مانند $y \in Y$ را نسبت می دهد. حال می‌خواهیم تابع f را به گونه ای گسترش دهیم که به جای اینکه بر یک نقطه از X عمل کند بر یک زیر مجموعه ی فازی از آن عمل کند. در این صورت دامنه تابع f از مجموعه X به $\tilde{F}(x)$(مجموعه ی زیر مجموعه های فازی X) تعمیم داده می شود.آنچه مهم است تعریف مقدار حاصل از عمل f بر یک زیر مجموعه فازی از X مثل $\tilde{\mathbf{A}}$ است. مسلما انتظار می رود که $f(\tilde{\mathbf{A}})$ یعنی حاصل عمل f بر $\tilde{A}$ دیگر یک نقطه از Y نباشد، بلکه یک زیر مجموعه فازی از Y مانند $\tilde{B}$ باشد، اصل گسترش روش این تعمیم را بیان می‌کند.
برای درک بهتر اصل گسترش، ابتدا تعریف حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه فازی ارائه می‌گردد.

تعریف ۵.۱ زیر مجموعه‌های فازی $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_n$ از مجموعه‌های مرجع $X_1, ..., X_n$ را در نظر می‌گیریم. حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌های فازی $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_n$ مجموعه‌ای فازی در فضای حاصل ضرب $X_1 \times X_2 \times X_3 \times ... \times X_n$ با تابع عضویت زیر خواهد بود.

$$\mu_{(\tilde{A}_1 \times ... \times \tilde{A}_n)}(x_1, ..., x_n) = \min\{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i) x_i \in X_i\}$$

تعریف ۶.۱ حاصل ضرب دکارتی مجموعه های مرجع $X = (X_1 \times X_2 \times X_3 \times ... \times X_n)$, $X_1, ..., X_n$ و مجموعه‌های فازی $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_n$ از $X_1, ..., X_n$ را در نظر می گیریم. اگر f تابعی از مجموعه مرجع X به مجموعه مرجع Y $(y = f(x_1, ..., x_n))$ باشد در اینصورت طبق اصل گسترش مجموعه‌ی فازی $\tilde{B}$ در Y بصورت زیر تعریف می شود.

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) | \, y = f(x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n) \in X\}$$

درجه عضویت y ها در مجموعه فازی $\tilde{B}$ $(\mu_{\tilde{B}}(y))$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), ..., \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\} & if \quad f^{-1}(y) \neq \phi \\ (x_1 ..., x_n) \in f^{-1}(y) & \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱—۴ اعداد فازی

تعریف ۷.۱ عدد فازی $\tilde{u} = (a, b, c, d; r)$ به عنوان یک زیر فضای فازی از خط حقیقی R با تابع عضویت $\mu_{\tilde{u}}(x)$ تعریف می شود که دارای ویژگی‌های زیر است.

الف) $\mu_{\tilde{u}}$ یک تابع پیوسته از R به فاصله $[0, r]$ است که $0 \leq r \leq 1$

ب) $\mu_{\tilde{u}}(x) = 0$، $\forall x \in (-\infty, a]$

ج) $\mu_{\tilde{u}}$ در فاصله ی $[a, b]$ اکیدا صعودی است.

د) $\mu_{\tilde{u}}(x) = r$، $\forall x \in [b, c]$ که r عددی ثابت است و $0 \leq r \leq 1$

ر) $\mu_{\tilde{u}}$ در فاصله $[c, d]$ اکیدا نزولی است.

ز) $\mu_{\tilde{u}}(x) = 0$، $\forall x \in [d, +\infty)$

در عدد فازی $\tilde{u} = (a, b, c, d; r)$ اگر $r = 1$،عدد فازی $\tilde{u}$ یک عدد فازی ذوزنقه ای نرمال نامیده می شود که به صورت $\tilde{u} = (a, b, c, d)$ مشخص می شود.
اگر $b = c$، عدد را یک عدد فازی مثلثی گویند.

اگر $a = b$ و $c = d$، آنگاه عدد فازی $\tilde{u}$ یک فاصله یا بازه گفته می شود.

اگر $a = b = c = d$ ،آنگاه $\tilde{u}$ را یک عدد حقیقی نامند.

تعریف ۸.۱ شکل پارامتریک یک عدد فازی به صورت یک جفت $\tilde{u} = (\underline{u}(r), \bar{u}(r))$، که $0 \leq r \leq 1$ می‌باشد و در شرایط زیر صدق می کند.

۱) $\underline{u}(r)$ یک تابع صعودی پیوسته از چپ کراندار روی [۱ و ۰] است.

۲) $\bar{u}(r)$ یک تابع نزولی پیوسته از چپ کراندار روی [۱ و ۰] است.

۳) $\underline{u}(r) < \bar{u}(r)$ که $0 \leq r \leq 1$

یک عدد قطعی مانند α وجود دارد که $\underline{u}(r) = \bar{u}(r) = \alpha$ که $0 \leq r \leq 1$.

تعریف ۹.۱ یک عدد فازی، یک مجموعه فازی $\tilde{u} : R^n \to [0, 1]$ که در شرایط زیر صدق می‌کند

i) $\tilde{u}$ نرمال است هرگاه$\exists x_0 \in R^n$ بطوری که $\tilde{u}(x_0) = 1$

ii) $\tilde{u}$ یک مخروط فازی است به این معنی که برای هر $x, y \in R^n$ و $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\tilde{u}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y))$$

iii) $\tilde{u}$ نیم پیوسته بالایی باشد.

iv) $CL\{x \in R^n : \tilde{u}(x) > 0\}$ فشرده است.

فرض کنیم E^n مجموعه ای از همه زیر مجموعه هایی از R^n باشد که در شرایط (i) تا (iv) صدق می‌کند.

تعریف ۱۰.۱ یک نوع عام از اعداد فازی، اعداد فازی مثلثی $\tilde{u} = (a, c, b)$ با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{c-a} & a \leq x \leq c \\ \frac{x-b}{c-b} & c \leq x \leq b \end{cases}$$

می باشد که $c \neq b$ و $c \neq a$، برای اعداد مثلثی داریم

$$\bar{u}(r) = a + (c-a)r \quad \text{و} \quad \underline{u}(r) = b + (c-b)r$$

یک عدد فازی مثلثی $\tilde{u}$ به وسیله سه عدد $a < c < b$ تعریف می‌شود که گرافی از $\tilde{u}(x)$ است، تابع عضویت از عدد فازی $\tilde{u}$ یک مثلث با پایه روی بازه $[a, b]$ و راس در $x = c$ که آن را نیز می‌توان به صورت $(a/c/b)$ مشخص کنیم، که اگر $a > ۰$ آنگاه $\tilde{u} > ۰$، اگر $a \geq ۰$ آنگاه $\tilde{u} \geq ۰$ ، اگر $b < ۰$ آنگاه $\tilde{u} < ۰$ و اگر $b \leq ۰$ آنگاه $\tilde{u} \leq ۰$.

تعریف ۱۱.۱ اگر $u \in E^n$، مجموعه در سطح r به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[u]_r = \{s \,|u(s) \geq r\}, ۰ \leq r \leq ۱, s \in R^n$$

این یک بازه بسته کراندار است که به وسیله $[u]_r = [u_۱(r), u_۲(r)]$ مشخص می شود. که

$$u_۱(r) = \min\{s \,|s \in [u]_r\}$$

$$u_۲(r) = \max\{s \,|s \in [u]_r\}$$