وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

کوهمولوژی موضعی و زیرکاتگوری سر از کاتگوری مدول‌ها

پژوهشگر

عباس علیلو

استاد راهنما

۱– دکتر منیره صدقی
۲– دکتر جعفر امجدی

استاد مشاور

دکتر سیدمحمود شیخ‌الاسلامی

شهریور ۱۳۸۸

تبریز– ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

تشکر و قدردانی

اکنون که این رساله به اتمام رسیده است، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.
اساتید محترم سرکار خانم دکتر منیره صدقی و جناب آقای دکتر جعفر امجدی که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا در انجام این پروژه همراهی کردند.
جناب آقای دکتر رضا نقی‌پور و دکتر شهرام رضاپور که داوری این پروژه را پذیرفتند.
سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.
خانواده عزیزم و به خصوص پدر و مادر گرامی که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند.
برای تمام این عزیزان، سربلندی و موفقیت و سلامتی در تمام مراحل زندگی آرزو می‌کنم.
عباس علیلو

فهرست مندرجات

چکیده

در این رساله مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H^n_{\mathfrak{a}}(M)$ از $R-$ مدول M در یک زیرکاتگوری سر از کاتگوری $R-$ مدول‌ها از پایین $(i < n)$ و از بالا $(i > n)$ مطالعه می‌شوند. در حالت کلی عمق و رشته‌های منظم تعریف می‌شوند. رابطهٔ آن‌ها با کوهمولوژی موضعی نشان می‌دهد که مطالعهٔ مدول‌های کوهمولوژی موضعی یک $R-$ مدول متناهی مولد از بالا در یک زیرکاتگوری سر از کاتگوری $R-$ مدول‌ها فقط به تکیه‌گاه مدول بستگی دارد.

واژه‌های کلیدی: کوهمولوژی موضعی، زیرکاتگوری سر، $S-$ رشتهٔ منظم، $S-$ عمق

پیشگفتار

در این رساله به بررسی کوهمولوژی موضعی و زیرکاتگوری سر از کاتگوری $R-$ مدول‌ها می‌پردازیم. این رساله شامل سه فصل است. در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه را که در فصل‌های بعدی استفاده می‌شوند را بیان می‌کنیم. در فصل دوم به مطالعهٔ کوهمولوژی موضعی از پایین و $S-$ عمق‌ها می‌پردازیم. در فصل سوم به مطالعهٔ کوهمولوژی موضعی از بالا، $\mathfrak{a}-$ هم‌متناهی‌ها و ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته از مدول‌های کوهمولوژی موضعی می‌پردازیم. R حلقهٔ جابه‌جایی و نوتری فرض شده است. برای اصطلاحات توضیح داده نشده به [۵] و [۸] مراجعه شود. در فصل دوم سوال زیر را بررسی می‌کنیم:

فرض کنید S یک زیرکاتگوری سر از کاتگوری $R-$ مدول‌ها و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R و M یک $R-$ مدول باشند. تحت چه شرایطی برای هر $i<n$، $H^i_{\mathfrak{a}}(M)\in S$؟

ما موقعی به این سوال جواب می‌دهیم که S تحت پوشش انژکتیو بسته باشد یا در حالت کلی موقعی که S در شرط مشخصی صدق کند که ما آن را $C_{\mathfrak{a}}$ می‌نامیم. این شرط می‌گوید که اگر $(0:_M \mathfrak{a})\in S$ و $Supp_R(M)\subset V(\mathfrak{a})$، آنگاه $M\in S$. این شرط در بحث‌های استقرایی (قضیهٔ ۲—۱—۷ [۵]) مناسب است. ما به سوال بالا در قضیهٔ ۱.۱.۲ جواب می‌دهیم. موقعی که S در شرط $C_{\mathfrak{a}}$ صدق می‌کند، ما می‌توانیم نشان دهیم که اگر M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد به طوری که $M/\mathfrak{a}M\notin S$، آنگاه $S-$ رشته‌های ماکسیمال در $\mathfrak{a}$ دارای طول یکسان می‌باشند. این طول مشترک را با $S-depth_{\mathfrak{a}}(M)$ نشان می‌دهیم. کوهمولوژی موضعی توسط گروتندیک معرفی شده است. آن‌ها به عنوان فانکتورهای مشتق شدهٔ راست از فانکتور دقیق چپ $\Gamma_{\mathfrak{a}}(Hom_R(N,-))$ تعریف کرده بودند که در آن N یک

$R-$ مدول متناهی مولد است. همچنین آن‌ها توانستند نشان دهند که اگر M یک $R-$ مدول دلخواه باشد، آنگاه $H_{\mathfrak{a}}^i(N,M) = \varinjlim_{\alpha\in N} Ext_R^i(N/\mathfrak{a}^\alpha N, M)$. اگر $Supp_R(M) \subset V(\mathfrak{a})$ آنگاه برای هر i، $H_{\mathfrak{a}}^i(N,M) = Ext_R(N,M)$. در بخش اول فصل سوم به سوال زیر جواب می‌دهیم:

تحت چه شرایطی برای هر $i > n$، $H_{\mathfrak{a}}^i(M) \in S$؟ در این بخش M یک $R-$ مدول متناهی مولد فرض شده است. در قضیهٔ ۱.۱.۳ که به این سوال جواب داده شده است نشان می‌دهد که مطالعهٔ کوهمولوژی موضعی از بالا فقط به تکیه‌گاه مدول بستگی دارد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف

در این بخش تعاریفی را می‌آوریم که در فصل‌های بعدی استفاده می‌شوند. در این بخش R یک حلقهٔ جابه‌جایی و یکدار است.

تعریف ۱.۱.۱ $R-$ مدول M را یک $R-$ مدول پروژکتیو می‌گویند هرگاه فانکتور $Hom_R(M,-)$ یک فانکتور دقیق باشد.

تعریف ۲.۱.۱ $R-$ مدول N را یک $R-$ مدول انژکتیو می‌گویند هرگاه فانکتور $Hom_R(-,N)$ یک فانکتور دقیق باشد.

تعریف ۳.۱.۱ $R-$ مدول M' را توسیع $R-$ مدول M می‌نامیم هرگاه M زیرمدولی از M' باشد. اگر M زیرمدول سره از M' باشد، M' توسیع سره از M نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید N یک $R-$ مدول و M توسیعی از آن باشد. می‌گوییم M توسیع اساسی N است، اگر به ازای هر زیرمدول غیرصفر مثل K از M، $N \bigcap K \neq 0$.

تعریف ۵.۱.۱ $R-$ مدول M را باوفا می‌نامیم هرگاه $Ann_R(M) = 0$.

اگر $\mathfrak{a} = Ann_R(M)$ باشد، آنگاه واضح است که M به عنوان $R/\mathfrak{a}-$ مدول باوفاست.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید M و E دو $R-$ مدول باشند. $R-$ مدول E را پوشش انژکتیو M می‌نامیم، هرگاه E در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند.

۱) E توسیع اساسی و انژکتیو M است.

۲) E توسیع اساسی ماکسیمال M است.

۳) E توسیع انژکتیومینیمال M است.

تعریف ۷.۱.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقهٔ جابه‌جایی و M یک $R-$ مدول باشند. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را ایده‌آل اول وابسته از M می‌نامیم، هرگاه $0 \neq m \in M$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{p} = (0 :_R m)$.

مجموعهٔ همه ایده‌آل‌های اول وابسته از M را با $Ass_R(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقهٔ جابه‌جایی و M یک $R-$ مدول باشند. تکیه‌گاه M را با $Supp_R(M)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Supp_R(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم $x_1,\ldots,x_n\in R$. تعریف می‌کنیم $K_0=R$ و برای هر $1\leq p\leq n$، $K_p=\bigoplus Re_{i_1,\ldots,i_p}$ که در آن $1\leq i_1<i_2<\ldots<i_p\leq p$. K_p یک $R-$ مدول آزاد با پایهٔ $B_p=\{e_{i_1,\ldots,i_p}|1\leq i_1<i_2<\ldots<i_p\leq p\}$ و $K_p=0$ برای هر $p>n$ یا $p<0$. برای هر $1\leq p\leq n$، نگاشت $d_p:K_p\longrightarrow K_{p-1}$ را با ضابطهٔ $d_p(e_{i_1,\ldots,i_p})=\sum\limits_{r=1}^{p}(-1)^{r-1}x_{i_r}e_{i_1,\ldots,\hat{i}_r,\ldots,i_p}$ تعریف می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که d_p یک $R-$ هممورفیسم بوده و برای هر $1\leq p\leq n$، $d_{p-1}d_p=0$. در نتیجه رشتهٔ $0\longrightarrow K_n\longrightarrow K_{n-1}\longrightarrow\ldots\longrightarrow K_p\longrightarrow K_{p-1}\longrightarrow\ldots\longrightarrow K_1\longrightarrow K_0\longrightarrow 0$ یک همبافت از $R-$ مدول‌ها و $R-$ هممورفیسم‌هااست. این همبافت را همبافت کزول می‌گویند و با $K.(x_1,\ldots,x_n)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض می‌کنیم $M.$ و $L.$ به ترتیب:

$$\ldots\longrightarrow M_{p+1}\xrightarrow{\mu_{p+1}}M_p\xrightarrow{\mu_p}M_{p-1}\longrightarrow\ldots$$

$$\ldots\longrightarrow L_{p+1}\xrightarrow{\eta_{p+1}}L_p\xrightarrow{\eta_p}L_{p-1}\longrightarrow\ldots$$

دو همبافت از $R-$ مدول‌ها و $R-$ هممورفیسم‌ها باشند. حاصلضرب تانسوری این دو همبافت را با $M.\otimes_R L.$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر n، $(M.\otimes_R L.)_n=\bigoplus\limits_{p+q=n}(M_p\otimes_R L_q)$. همچنین برای هر n، $d_n:(M.\otimes_R L.)_n\longrightarrow(M.\otimes_R L.)_{n-1}$ را با ضابطهٔ $d_n(x\otimes_R y)=\mu_p(x)\otimes_R y+(-1)^p x\otimes_R\eta_q(y)$ برای هر $(x\otimes_R y)\in(M.\otimes_R L.)_n$ تعریف می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که برای هر n، d_n یک $R-$ هممورفیسم بوده و $M.\otimes_R L.$ یک همبافت از $R-$ مدول‌ها و $R-$ هممورفیسم‌ها است.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقه و $x_1,\ldots,x_n\in R$. به ازای هر همبافت $C.$ از $R-$ مدول‌ها و $R-$ هممورفیسم‌ها تعریف می‌کنیم:

$C_.(x_1,\ldots,x_n) = C_. \bigotimes_R K_.(x_1,\ldots,x_n)$. همچنین برای هر $R-$ مدول M تعریف می‌کنیم:
$K_.(x_1,\ldots,x_n;M) = Hom_R(K_.(x_1,\ldots,x_n),M)$.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقه و $x_1,\ldots,x_n \in R$. $p-$ امین مدول همولوژی همبافت کزول $K_.(x_1,\ldots,x_n;M)$ را با $H^p(x_1,\ldots,x_n;M)$ یا $H^p(K_.(x_1,\ldots,x_n;M))$ نشان می‌دهیم.

به‌سادگی می‌توان نشان داد که $H^n(x_1,\ldots,x_n;M) = M/(x_1,\ldots,x_n)M$ و
$H^\circ(x_1,\ldots,x_n;M) = (\circ :_M (x_1,\ldots,x_n))$.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید R یک حلقهٔ نوتری و $\mathfrak{a} = (x_1,\ldots,x_n)$ ایده‌آلی از آن باشد. همچنین فرض کنید M یک $R-$ مدولی باشد به طوری که $Supp_R(M) \subset V(\mathfrak{a})$. اگر M در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند، آنگاه M یک $R-$ مدول $\mathfrak{a}-$ هم‌متناهی است.

۱) برای هر $i \geq \circ$، $Ext^i_R(R/\mathfrak{a},M)$ یک $R-$ مدول متناهی مولد است.

۲) برای هر $i \geq \circ$، $Tor^R_i(R/\mathfrak{a},M)$ یک $R-$ مدول متناهی مولد است.

۳) برای هر $i = \circ,\ldots,n$، $H^i(x_1,\ldots,x_n;M)$ یک $R-$ مدول متناهی مولد است.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض می‌کنیم M یک $R-$ مدول باشد. $x_1,\ldots,x_n \in R$ یک $M-$ رشتهٔ ضعیف است هرگاه : برای هر $i = 1,\ldots,n$، $x_i \notin zd_R(M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M)$.

واضح است که $x_1,\ldots,x_n$ یک $M-$ رشتهٔ ضعیف است هرگاه:

$$\forall i = 1,\ldots,n \quad \forall \mathfrak{p} \in Ass_R(M/(x_1,\ldots,x_{i-1})M) \quad x_i \notin \mathfrak{p}.$$

$x \in R$ یک $M-$ منظم است هرگاه: $x \notin zd_R(M)$.

$x_1,\ldots,x_n$ یک $M-$ رشته($M-$ رشته منظم) است هرگاه : $x_1,\ldots,x_n$ یک $M-$ رشتهٔ ضعیف بوده و $(x_1,\ldots,x_n)M \neq M$.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض می‌کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی و M یک $R-$ مدول باتولید متناهی باشند. $x_1,\dots,x_n \in m$ یک $M-$ رشتهٔ فیلتر منظم است هرگاه :

$$\forall i = 1,\dots,n \quad \forall \mathfrak{p} \in Ass_R(M/(x_1,\dots,x_{i-1})M) \setminus \{\mathfrak{m}\} \quad x_i \notin \mathfrak{p}.$$

$x \in \mathfrak{m}$ یک $M-$ فیلتر منظم است هرگاه:

$$\forall \mathfrak{p} \in Ass_R(M) \setminus \{\mathfrak{m}\} \quad x \notin \mathfrak{p}.$$

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض می‌کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی و M یک $R-$ مدول باتولید متناهی باشند. $x_1,\dots,x_n \in \mathfrak{m}$ یک $M-$ رشتهٔ تعمیم یافته منظم است هرگاه :

$$\forall i = 1,\dots,n \quad \forall \mathfrak{p} \in Ass_R(M/(x_1,\dots,x_{i-1})M) \text{ و } \dim_R(R/\mathfrak{p}) > 1 \quad x_i \notin \mathfrak{p}.$$

$x \in \mathfrak{m}$ یک عنصر $M-$ تعمیم یافته منظم است هرگاه :

$$\forall \mathfrak{p} \in Ass_R(M) \text{ و } \dim_R(R/\mathfrak{p}) > 1 \quad x \notin \mathfrak{p}.$$

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض می‌کنیم M یک $R-$ مدول و $s > 0$. $x_1,\dots,x_n \in R$ یک $M-$ رشتهٔ ضعیف با $\dim_R > s$ است هرگاه : برای هر $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ که $\dim_R(R/\mathfrak{p}) > s$، $x_1/1,\dots,x_n/1$ یک $M_\mathfrak{p}-$ رشتهٔ ضعیف در $R_\mathfrak{p}$ باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱ کلاس S از $R-$ مدول‌ها یک زیرکاتگوری سر از کاتگوری $R-$ مدول هاست هرگاه: S تحت زیرمدول‌ها، خارج قسمت‌ها و توسیع مدول‌ها بسته باشد .

۲.۱ قضایا، لم‌ها و نتایج مقدماتی

در این بخش قضایا، لم‌ها و نتایجی را می‌آوریم که در فصل‌های بعدی استفاده می‌شوند.

قضیه ۱.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از آن باشد. همچنین فرض کنید M یک $R-$ مدولی باشد به طوری که $Supp_R(M) \subset V(\mathfrak{a})$. M یک $R-$ مدول آرتینی و $\mathfrak{a}-$ هم متناهی است اگر و تنها اگر $\ell(\circ :_M \mathfrak{a}) < \infty$. همچنین اگر $x \in \mathfrak{a}$ موجود باشد به طوری که $(\circ :_M x)$ آرتینی و $\mathfrak{a}-$ هم‌متناهی باشد، آنگاه M نیز $R-$ مدول آرتینی و $\mathfrak{a}-$ هم‌متناهی است.

برهان. به (گزاره ۱—۴ [۱۰]) مراجعه شود. ■

لم ۱.۲.۱ فرض کنید T و U فانکتورهای جمعی از کاتگوری $R-$مدول‌ها به کاتگوری $R-$ مدول‌ها و S یک زیرکاتگوری سر ازکاتگوری $R-$ مدول‌ها باشند به طوری که برای هر دنبالهٔ دقیق و کوتاه $\circ \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow x" \longrightarrow \circ$ دنبالهٔ زیر دقیق باشد :

$$U(X') \longrightarrow U(X) \longrightarrow U(x") \longrightarrow T(X') \longrightarrow T(X) \longrightarrow T(x").$$

اگر $f : M \longrightarrow N$ یک $R-$ هومورفیسم باشد به طوری که $T(Kerf)$ و $U(Cokerf)$ در S باشند، آنگاه $KerT(f)$ و $CokerU(f)$ در S می‌باشند.

برهان. به (لم ۱—۳ [۱۰]) مراجعه شود. ■

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد و باوفا باشند. اگر L یک R دلخواه باشد، آنگاه زنجیری از زیرمدول‌های L چون $L = L_\circ \supset L_۱ \supset \ldots \supset L_t = \circ$ موجود است به طوری که برای هر $i = ۱, \ldots, t$، $L_{i-۱}/L_i$ تصویرهمومورفیسمی‌ازجمع مستقیم تعداد متناهی از کپی‌های M است.

برهان. به (قضیه ۱—۴ [۱۲]) مراجعه شود. ■

لم ۲.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از آن باشد. همچنین فرض کنید M یک $R-$ مدول و n عدد صحیح و مثبت باشند. هومورفیسم طبیعی $f : Ext_R^n(R/\mathfrak{a}, M) \longrightarrow Hom_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^n(M))$ را در نظر می‌گیریم، آنگاه عبارات زیر برقرارند:

۱) اگر برای هر $j < n$، $Ext_R^{n-j}(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^j(M)) = ۰$، آنگاه:

$$Ass_R(H_{\mathfrak{a}}^n(M)) \subset Ass_R(Ext_R^n(R/\mathfrak{a}, M)) \bigcup Ass_R(Cokerf)).$$

۲) اگر برای هر $j < n$، $Ext_R^{n+۱-j}(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^j(M)) = ۰$، آنگاه:

$$Ass_R(H_{\mathfrak{a}}^n(M)) \subset Ass_R(Ext_R^n(R/\mathfrak{a}, M)) \bigcup \mathrm{supp}_R(Kef)).$$

۳) اگر برای هر $j < n$ و $t = n, n + ۱$، $Ext_R^{t-j}(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^j(M)) = ۰$، آنگاه:

$$Ass_R(Ext_R^n(R/\mathfrak{a}, M)) = Ass_R(H_{\mathfrak{a}}^n(M)).$$

برهان. به (نتیجه ۵−۲ [۱]) مراجعه شود. ■

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از آن باشد. همچنین فرض کنید M یک $R-$ مدول و n عدد صحیح و مثبت و S یک زیرکاتگوری سر از کاتگوری $R-$ مدول‌ها باشند. هومورفیسم طبیعی $f : Ext_R^n(R/\mathfrak{a}, M) \longrightarrow Hom_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^n(M))$ را در نظر می‌گیریم، آنگاه عبارات زیر برقرارند:

۱) اگر برای هر $j < n$، $Ext_R^{n-j}(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^j(M)) \in S$، آنگاه $Kerf \in S$.

۲) اگر برای هر $j < n$، $Ext_R^{n+۱-j}(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^j(M)) \in S$، آنگاه $Cokerf \in S$.

۳) اگر برای هر $j < n$ و $t = n, n+۱$، $Ext_R^{t-j}(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^j(M)) \in S$، آنگاه $Kerf \in S$ و $Kerf \in S$.

بنابراین $Ext_R^n(R/\mathfrak{a}, M) \in S$ اگر و تنها اگر $Hom_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^n(M)) \in S$.

برهان. به (گزاره ۱−۲ [۱]) مراجعه شود. ■

لم ۳.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشند. در این صورت برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{supp}_R(M)$، یک $R-$ همومورفیسم غیرصفر چون $f : M \longrightarrow R/\mathfrak{p}$ موجود است.

برهان. به (گزاره ۲۰−۴−۲ [۲]) مراجعه شود. ■

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقهٔ موضعی و نوتری و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از آن باشد به طوری که $\dim R/\mathfrak{a} = ۱$. اگر M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد، آنگاه برای هر i، $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ یک $R-$ مدول، $\mathfrak{a}-$ هم متناهی است.

برهان. به (قضیه ۱−۱ [۱۳]) مراجعه شود. ■

لم ۴.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از آن باشد. همچنین فرض کنید همچنین فرض کنید M یک $R-$ مدولی باشد به طوری که $Supp_R(M) \subset V(\mathfrak{a})$. در این صورت M یک $R-$ مدول آرتینی و $\mathfrak{a}-$ هم‌متناهی است اگر و تنها اگر $(\circ :_M \mathfrak{a})$ یک $R-$ مدول با طول متناهی باشد.

برهان. به (گزاره ۱−۴ [۱۱]) مراجعه شود. ■

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و $\mathfrak{a} = (x_۱, \ldots, x_n)$ باشد. همچنین فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد به طوری که $\circ \longrightarrow M \longrightarrow E^\circ \longrightarrow E^۱ \longrightarrow \ldots$ یک انژکتیو رزولوشن می‌نیمال آن است. در این صورت عبارات زیر معادلند.

۱) برای هر $i < n$، $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$، $R-$ مدول آرتینی است.

۲) برای هر $i < n$، $Ext^i_R(R/\mathfrak{a}, M)$، $R-$ مدول آرتینی است.

۳) برای هر $i < n$، $\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^i)$، $R-$ مدول آرتینی است.

(۴) $\sum = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}, \quad \mu^i(\mathfrak{p}, M) \neq 0$ برای برخی $i < n\}$ یک زیرمجموعهٔ متناهی از ایده‌آل‌های ماکسیمال R است.

(۵) برای هر $i < n$، $H^i(x_1, \ldots, x_n; M)$، $R-$ مدول آرتینی است.

برهان. به (قضیه ۵—۵ [۱۱]) مراجعه شود. ■

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از آن باشد. همچنین فرض کنید M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد. اگر $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{a}$ یک $M-$ رشتهٔ فیلتر منظم باشد، آنگاه برای هر $i < n$، $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$، $R-$ مدول آرتینی و $\mathfrak{a}-$ هم‌متناهی است.

برهان. به (قضیه ۴—۶ [۱۱]) مراجعه شود. ■

لم ۵.۲.۱ فرض کنید $C_.$ یک همبافت از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همومورفیسم باشد. گیریم $x \in R$. در این صورت یک رشتهٔ دقیق از همبافت‌ها و تبدیلات بین آن‌ها به صورت :

$$0 \longrightarrow C_\circ \longrightarrow C_\circ(x) \longrightarrow C'_\circ \longrightarrow 0$$

حاصل می‌شود که در آن $C'_.$ هم‌بافتی است که از پایین آوردن یک واحد از اندیس جملات هم‌بافت $C_.$ حاصل می‌شود. همچنین اگر $x \in R$، آنگاه برای هر p، $xH^p(C_.(x)) = 0$.

برهان. به (قضیه ۴—۱۶ [۹]) مراجعه شود. ■

قضیه ۷.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه و $x_1, \ldots, x_n \in R$ و M یک $R-$ مدول باشند. گیریم $x = (x_1, \ldots, x_n)$. در این صورت برای هر p، $xH^p(x_1, \ldots, x_n; M) = 0$.

برهان. فرض می‌کنیم $C_. = K_.(x_1, \ldots, x_{n-1}; M)$. در این صورت طبق لم ۵.۲.۱ برای هر p، $x_n H^p(C_.(x_n)) = 0$. لذا برای هر p، $x_n H^p(K_.(x_1, \ldots, x_n; M)) = 0$. حال

فرض می‌کنیم $C_. = K_.(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n; M)$. در این صورت طبق لم ۵.۲.۱ برای هر p، $x_{n-1}H^p(C_.(x_{n-1})) = 0$. لذا برای هر p، $x_{n-1}H^p(K_.(x_1, \ldots, x_n; M)) = 0$. با ادامهٔ این روند نتیجه می‌شود که برای هر p و هر $1 \leq i \leq n$، $x_iH^p(K_.(x_1, \ldots, x_n; M)) = 0$. لذا برای هر p، $xH^p(x_1, \ldots, x_n; M) = 0$. ■

قضیه ۸.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد و ناصفر باشند. در این صورت زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M چون، $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ موجود است به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ که در آن $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$.

برهان. چون M یک $R-$ مدول متناهی مولد و ناصفراست، لذا $Ass_R(M) \neq \emptyset$. گیریم $\mathfrak{p}_1 \in Ass_R(M)$. لذا زیرمدولی چون M_1 از M موجود است به طوری که $M_1 \cong R/\mathfrak{p}_1$. اگر $M = M_1$ آنگاه حکم تمام است. لذا فرض می‌کنیم $M \neq M_1$. بنابراین $Ass_R(M/M_1) \neq \emptyset$. گیریم $\mathfrak{p}_2 \in Ass_R(M/M_1)$. لذا زیرمدولی چون M_2 از M شامل M_1 موجود است به طوری که $M_2/M_1 \cong R/\mathfrak{p}_2$. با ادامهٔ این روند زنجیر صعودی، $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_i \subset \ldots$ حاصل می‌شود. چون M یک $R-$ مدول متناهی مولد است، لذا زنجیر فوق ایستا است.. لذا عددصحیح و مثبت چون n موجود است به طوری که $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$. ■

قضیه ۹.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد و ناصفر باشند. در این صورت $Ass_R(M)$ یک مجموعهٔ متناهی است.

برهان. چون R یک حلقهٔ جابه‌جایی و نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد و ناصفر است، طبق قضیهٔ ۸.۲.۱ زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M چون، $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ موجود است به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ که در آن $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$. برای هر $1 \leq i \leq n$، دنبالهٔ زیر دقیق است:

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i/M_{i-1} \longrightarrow 0$$

اگر $i = 1$، آنگاه $M_1 \cong R/\mathfrak{p}_1$، لذا $Ass_R(M_1) = \{\mathfrak{p}_1\}$. به ازای $i = 2$ دنبالهٔ زیر دقیق است:

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_2/M_1 \longrightarrow 0$$

لذا $Ass_R(M_2) \subseteq Ass_R(M_1) \bigcup Ass_R(M_2/M_1) \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$. با ادامه این روند نتیجه می‌شود که $Ass_R(M) \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$. لذا $Ass_R(M)$ یک مجموعهٔ متناهی است. ■

فصل ۲

مطالعه کوهمولوژی موضعی از پایین و $S-$ عمق

۱.۲ مطالعه کوهمولوژی موضعی از پایین

فرض می‌کنیم $\mathfrak{a}$ یک‌ایده‌آل از حلقهٔ جابه‌جایی و نوتری R و M یک $R-$ مدول باشد.

تعریف ۱.۱.۲ فرض می‌کنیم S یک زیرکاتگوری سر از کاتگوری $R-$ مدول ها باشد. می‌گوییم که S در شرط $C_{\mathfrak{a}}$ صدق می‌کند هرگاه از $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$ و $(\circ :_M \mathfrak{a}) \in S$ نتیجه شود $M \in S$.

لم ۱.۱.۲ فرض کنید S یک زیرکاتگوری سر از کاتگوری $R-$ مدول‌ها باشد. اگر S تحت پوشش انژکتیو بسته باشد آنگاه S در شرط $C_{\mathfrak{a}}$ صدق می کند.

برهان. فرض می‌کنیم $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$ و $(\circ :_M \mathfrak{a}) \in S$. ثابت می‌کنیم $M \in S$. چون M یک $R-$ مدول است لذا دارای پوشش انژکتیو هست. فرض می‌کنیم $E(M)$ یک پوشش انژکتیو برای M باشد. لذا داریم : $(\circ :_M \mathfrak{a}) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M \subseteq E(M)$. لذا $E(M)$ پوشش انژکتیو برای $(\circ :_M \mathfrak{a})$ نیز