دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر
((گروه ریاضی))

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

موضوع:

تحلیل حساسیت در مسایل برنامه ریزی خطی چند هدفی

نگارش:
الهام فرزانه

استاد راهنما:
دکتر محمد رضا صافی

استاد مشاور:
دکتر جواد دمیرچی

مهر ۱۳۹۱

تقدیم به پدر و مادر مهربانم که در تمامی لحظات زندگی‌ام حضور گرمشان همواره نویدبخش راهی تازه است.

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی، به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است، به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند، سپاس گذار این مهربانان هستم.

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر صافی که با سخاوتی چون خورشید ، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی های کار ساز و سازنده، بارور ساختند، تقدیر و تشکر نمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر دمیرچی، استاد مشاورم، به جهت راهنمایی های سازنده شان در انجام این پایان نامه سپاس گذاری می کنم.

در پایان از اساتید بزرگوار، جناب آقای دکتر عفتی و جناب آقای دکتر عباسی مولایی به سبب قبول زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه تشکر و قدردانی می نمایم.

چکیده پایان نامه

با استفاده از تحلیل حساسیت می توانیم جواب بهینه مسئله را بدون اینکه مجبور باشیم هزینه های گران حل مجدد مسئله را از ابتدا بپردازیم، پیدا نماییم. در این پایان نامه به انواع مختلف تحلیل حساسیت از جمله تحلیل آشفتگی، تحلیل تلرانس و تحلیل پس بهینگی در مسایل برنامه ریزی خطی یک هدفی و چند هدفی قطعی و فازی پرداخته شده است. الگوریتم هایی برای حفظ جواب بهینه مسایل برنامه ریزی خطی یک هدفی به گونه ای بیان شده اند که بزرگترین محدوده تغییرات مجاز برای یک تغییر یا تغییرات همزمان مؤلفه های سمت راست قیود و ضرایب متغیرهای تصمیم در تابع هدف را می دهد. علاوه بر آن، به بیان الگوریتم خیمنز[1] و بیلبائو[2] در مسایل برنامه ریزی خطی فازی چند هدفی می پردازیم که تغییرات مجاز ضرایب توابع هدف را به گونه ای به دست می دهد که جواب کارای فازی تغییر نکند.

واژه های کلیدی:

تحلیل حساسیت، تحلیل آشفتگی، تحلیل تلرانس، تحلیل پس بهینگی، برنامه ریزی خطی فازی چند هدفی.

---

[1] *Jimenez*

[2] *Bilbao*

پیشگفتار

در بسیاری از مسایل عملی نه تنها یافتن جواب بهینه یک مسئله برنامه ریزی خطی اهمیت دارد بلکه میزان تغییرات در جواب بهینه هنگامی که پارامترهای مسئله تغییر می کنند نیز حائز اهمیت است. تغییرات پارامترهای یک مسئله برنامه ریزی خطی از دو نوع مجزا و پیوسته است. مطالعه تأثیر تغییرات مجزا و پیوسته پارامترها بر جواب بهینه به ترتیب تحلیل حساسیت و تحلیل پارامتری نام دارد که از جمله موضوعات مهم در تحقیق در عملیات است.

یک راه برای تعیین تأثیر تغییرات در پارامترهای مسئله آن است که به حل مسئله جدید پس از اعمال تغییرات پرداخته شود که از نقطه نظر محاسباتی ناکارامد است. در این زمینه تکنیک های مفید و کارامد تحلیل حساسیت وجود دارد که در این پایان نامه به آنها پرداخته ایم.

این پایان نامه مشتمل بر پنج فصل است. در فصل اول تعاریف و روش های مورد نیاز از جمله مفاهیم برنامه ریزی فازی و روش های حل مسایل برنامه ریزی خطی چند هدفی قطعی مانند روش وزنی، قیدی و ماکس-مین وزنی و روش های حل مسایل برنامه ریزی خطی چند هدفی فازی مانند روش زیمرمن، لبرلینگ و زیمرمن بهبود یافته ارایه می گردد.

فصل دوم به تحلیل آشفتگی ضرایب تابع هدف و مؤلفه های سمت راست مسایل برنامه ریزی خطی یک هدفی قطعی پرداخته می شود. الگوریتم هایی ارایه می گردند که در آنها نواحی حساسیت کلی برای پارامترهای فوق به گونه ای یافت می شود که جواب بهینه مسئله، بهینگی خود را حفظ کند.

در فصل سوم به مطالعه و محاسبه تلرانس جمعی و ضربی در مسایل برنامه ریزی خطی چند هدفی قطعی می پردازیم. تلرانس جمعی، شعاع همسایگی مشترک برای تمامی ضرایب توابع هدف است که در آن همسایگی یک جواب کارا، کارایی خود را حفظ می کند. اگر در یک مسئله برنامه ریزی خطی چند هدفی قطعی برای هر ضریب توابع هدف، شعاع همسایگی متفاوتی در نظر گرفته شود، در این صورت میزان گستردگی این شعاع های همسایگی متفاوت، تلرانس ضربی نام دارد که در آن همسایگی ها ضرایب توابع هدف به گونه ای تغییر می کنند که یک جواب کارا، کارا باقی می ماند.

فصل چهارم به بیان تحلیل حساسیت در مسایل برنامه ریزی خطی یک هدفی فازی می پردازد. در این فصل از تکنیک های تحلیل حساسیت و الگوریتم سیمپلکس دوگان برای تحلیل تغییر در پارامترهای مختلف مسئله در صورتی که

جواب بهینه جاری، بهینه باقی می ماند یا تغییر می کند، استفاده می کنیم.

سرانجام، در فصل پنجم به تحلیل پس بهینگی مسایل برنامه ریزی خطی چند هدفی فازی می پردازیم. تحلیل پس بهینگی به مطالعه حالت هایی در مسایل برنامه ریزی خطی چند هدفی قطعی و فازی می پردازد که به ترتیب، یک جواب کارا، کارایی خود و یک جواب کارای فازی، کارایی فازی خود را حفظ می کند. در این فصل قضایا و الگوریتمی را بیان می کنیم که در صورت پارامتری شدن یک ضریب در توابع هدف و حذف یا اضافه شدن یک تابع هدف یک جواب کارای فازی، کارایی فازی خود را حفظ می کند.

فهرست مطالب

فصل ۱

مروری بر نظریه مجموعه های فازی و برنامه ریزی خطی فازی

۱.۱ نظریه مجموعه های فازی

نظریه مجموعه های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسگرزاده[۱] ارایه شد. این نظریه از زمان ارایه آن تاکنون گسترش و تعمیق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه های مختلف پیدا کرده است [۴]. در واقع این نظریه، نظریه کار در شرایط عدم اطمینان و شرایط مبهم می باشد. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و دستگاه هایی که نادقیق هستند را صورت بندی ریاضی بخشیده و زمینه را برای استدلال، کنترل و تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان، نادقیق یا مبهم فراهم آورد. مفاهیمی مانند زیبایی، بلند بودن، تقریبا کم، خیلی زیاد و ... در نظریه مجموعه های معمولی قابل استفاده نیستند ولی می توان آنها را در نظریه مجموعه های فازی به زبان ریاضی درآورد. یک مجموعه صریح معمولا به صورت تعدادی عضو که قابل شمارش و یا غیر قابل شمارش باشند تعریف می شود. معیار عضویت هر عنصر در یک مجموعه، صفت مشخص کننده مجموعه است. هر عنصری که دارای آن صفت باشد، عضو مجموعه و در غیر این صورت خارج از مجموعه است. این معیار عضویت را تابع مشخصه می نامند و به

---

[۱] $Zadeh$

صورت زیر نشان داده می شود:

$$\chi_A(x) \;=\; \begin{cases} ۱ & x \in A, \\ ۰ & x \notin A, \end{cases}$$

که در آن $x \in X$ (X مجموعه مرجع) و برد آن مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ و دامنه آن X است.

حال اگر برد تابع مشخصه از مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به بازه $[۰, ۱]$ توسعه یابد، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X عددی را از بازه $[۰, ۱]$ نسبت می دهد. این تابع را تابع عضویت A می گویند. اکنون A یک مجموعه صریح و معمولی به شمار نمی آید. آن را به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۱.۱. اگر X مجموعه مرجع باشد، $\tilde{A}$ را زیر مجموعه فازی X می نامند، هر گاه $\tilde{A}$ مجموعه ای از زوج های مرتبی باشد که مؤلفه اول آن $x \in X$ و مؤلفه دوم آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ عددی از بازه $[۰, ۱]$ باشد. این مجموعه به طور یکتا توسط تابع عضویتش که به فرم $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نشان داده می شود، مشخص می شود.

مثال ۱.۱.۱. فرض کنیم $X = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ در X اعداد صحیح تقریبا برابر با ۲ باشد. چنین مجموعه فازی ای را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\tilde{A} = \{(۰, ۰/۳), (۱, ۰/۸), (۲, ۱), (۳, ۰/۹), (۴, ۰/۲), (۵, ۰)\}.$$

مثال ۲.۱.۱. فرض کنیم $X = [۰, ۲۰۰۰]$ یک زیر مجموعه فازی از X که نشان دهنده ویژگی « اعداد نزدیک ۱۰۰۰ » باشد می تواند توسط تابع عضویت زیر تعریف شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x}{۱۰۰۰} & x \leqslant ۱۰۰۰, \\ \\ \dfrac{۲۰۰۰ - x}{۱۰۰۰} & x > ۱۰۰۰. \end{cases}$$

در این حالت مثلا داریم $\mu_{\tilde{A}}(۳۰۰) \;=\; \mu_{\tilde{A}}(۱۷۰۰) \;=\; ۰/۳$، و این یعنی اعداد ۳۰۰ و ۱۷۰۰ هر دو با درجه عضویت ۰/۳ به مجموعه فازی $\tilde{A}$ تعلق دارند.

مشابه مجموعه های معمولی، مفاهیم اجتماع، اشتراک، متمم، زیرمجموعه و تساوی را می توان برای دو مجموعه فازی تعریف کرد. در اینجا تعاریفی که زاده بیان نموده است، ارایه می شوند.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو زیرمجموعه فازی در X باشند. در این صورت:

۱) (تساوی) $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \Longleftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B} \ \ , \ \ \forall x \in X$،

۲) (زیرمجموعه) $\mu_{\tilde{A}}(x) \leqslant \mu_{\tilde{B}}(x) \Longleftrightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \ \ , \ \ \forall x \in X$،

۳) (متمم) $\tilde{A}'$ متمم $\tilde{A}$ است، $\Longleftrightarrow \mu_{\tilde{A}'}(x) = ۱ - \mu_{\tilde{A}}(x) \ \ , \ \ \forall x \in X$

۴) (اشتراک) $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \ \ , \ \ \forall x \in X$،

۵) (اجتماع) $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \ \ , \ \ \forall x \in X$.

یکی از مفاهیم مهم در نظریه مجموعه های فازی، α-برش یا همان مجموعه های تراز یک مجموعه فازی است که یکی از پرکاربردترین ابزار برای بررسی خواص چنین مجموعه هایی است.

تعریف ۳.۱. زیرمجموعه ای (معمولی) از X که درجه عضویت آن در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α باشد ($۰ < \alpha \leqslant ۱$)، یک α-برش مجموعه فازی $\tilde{A}$ نام دارد و با $\tilde{A}_\alpha$ نمایش داده می شود. لذا داریم:

$$\tilde{A}_\alpha = \{ \ x \ : \ \mu_{\tilde{A}}(x) \geqslant \alpha, \ \alpha \in (۰, ۱] \},$$

و برای $\alpha = ۰$

$$\tilde{A}_۰ = \overline{\{x \ : \ \mu_{\tilde{A}}(x) > ۰\}},$$

که در آن منظور از $\overline{\{.\}}$، بستار مجموعه است.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم $\tilde{A}$ یک زیر مجموعه فازی از مجموعه مرجع باشد. در این صورت مجموعه نقاطی از X که برای آنها $\mu_{\tilde{A}}(x) > ۰$ است را تکیه گاه $\tilde{A}$ می نامند و به صورت زیر نمایش می دهند:

$$supp \ \tilde{A} = \{ \ x \in X \ : \ \mu_{\tilde{A}}(x) > ۰ \}.$$

تعریف ۵.۱. ارتفاع یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ را با $Hgt\ \tilde{A}$ نمایش می دهند و برابر است با:

$$Hgt\ \tilde{A} = \sup_{x \in X}\ \mu_{\tilde{A}}(x).$$

تعریف ۶.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نرمال گوییم هرگاه $Hgt\ \tilde{A} = ۱$.

تعریف ۷.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ را تهی گوییم اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۰$.

تعریف ۸.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ را تام گوییم هر گاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$.

تعریف ۹.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است هر گاه برای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو X و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}}\ \big(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲\big) \geqslant \min \big(\mu_{\tilde{A}}(x_۱)\ ,\ \mu_{\tilde{A}}(x_۲)\big).$$

حال تقریبا با تمام ابزار لازم برای تعریف یک عدد فازی آشنایی داریم. ولی قبل از تعریف دقیق آن ابتدا اصل گسترش را مطرح می کنیم. در واقع با کمک اصل گسترش می توانیم مفاهیم تعریف شده روی مجموعه های قطعی را به مجموعه های فازی تعمیم دهیم.

تعریف ۱۰.۱. (اصل گسترش) فرض کنید f نگاشتی از مجموعه قطعی X به مجموعه قطعی Y باشد. اگر $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از X باشد در این صورت با استفاده از اصل گسترش می توانیم $f(\tilde{A})$ را به عنوان یک زیرمجموعه فازی از Y به صورت زیر به دست آوریم:

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) \ = \ \begin{cases} \sup_{f(x)=y}\ \ \mu_{\tilde{A}}(x) & f^{-۱}(y) \neq \emptyset, \\ ۰ & f^{-۱}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

که در آن $f^{-۱}(y)\ = \{x \in X\ :\ f(x) = y\}$.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید $X_۱\ ,...,X_n$، n مجموعه مرجع و $X = X_۱\ \times ... \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی آنها باشد. همچنین $\tilde{A}_۱, ..., \tilde{A}_n$، n زیر مجموعه فازی به ترتیب از $X_۱, ..., \tilde{X}_n$ باشند. در این صورت حاصل ضرب دکارتی

$\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_n$ به صورت یک مجموعه فازی از X تعریف می شود که برای آن داریم:

$$\mu_{(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_n)}\left(X_1, ..., X_n\right) \; = \; \min\left\{\mu_{\tilde{A}_1}\left(X_1\right), ..., \mu_{\tilde{A}_n}\left(X_n\right)\right\}.$$

۱.۱.۱ اعداد فازی

برای اعداد فازی، مؤلفان مختلف، تعاریف متفاوتی عرضه کرده اند. تعریف زیر از مرجع [۱۲] آورده شده است.

تعریف ۱.۱۲. یک عدد فازی، یک مجموعه فازی نرمال محدب مانند $\tilde{A}$ از اعداد حقیقی است به طوری که:

۱) $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تک نمائی باشد. یعنی دقیقا یک $x \in \Re$ وجود داشته باشد که $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$. x را مقدار متوسط $\tilde{A}$ می نامند.

۲) $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابعی قطعه قطعه پیوسته باشد.

مجموعه همه اعداد فازی نرمال را با $F(\Re)$ نمایش می دهند.

برخی نویسندگان به جای شرط (۱) فقط نرمال بودن و به جای (۲) تنها شرط نیمه پیوسته بالایی بودن[۱] [۳۳] را لازم می دانند [۱۹]. به عبارت دیگر می توانیم تعریف زیر را برای یک عدد فازی داشته باشیم.

تعریف ۱.۱۳. عدد فازی $\tilde{A}$ یک مجموعه نرمال محدب بر روی اعداد حقیقی $\Re$ است که تابع عضویت آن، $\mu_{\tilde{A}}(x)$، نیمه پیوسته بالائی می باشد.

تعریف ۱.۱۴. عدد فازی $\tilde{A}$ نامنفی است اگر برای هر $x < 0$ داشته باشیم $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$.

تعریف ۱.۱۵. فرض کنیم $\tilde{\alpha_1}, ..., \tilde{\alpha_n}$ اعداد فازی نرمال با توابع عضویت $\mu_{\tilde{\alpha_i}}(x_i)$، $i = 1, ..., n$، باشند. در این صورت یک n تایی مرتب فازی به صورت $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha_1}, ..., \tilde{\alpha_n})$ نشان داده می شود و تابع عضویت آن با توجه به تعریف (۱.۱۱) برابر است با:

$$\mu_{\tilde{\alpha}}(\mathbf{x}) = \min\left\{\mu_{\tilde{\alpha}_1}(x_1), ..., \mu_{\tilde{\alpha}_n}(x_n)\right\}.$$

که در آن $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \Re^n$. مجموعه همه n تایی های مرتب فازی را با $(F(\Re))^n$ نمایش می دهند.

[۱] *Upper Semi Continuous*

تعریف ۱.۱۶. ماتریس $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ را یک ماتریس فازی می نامند هرگاه هر عنصر $\tilde{A}$ یک عدد فازی باشد. $\tilde{A}$ را یک ماتریس مثبت (منفی) گویند هر گاه هر عنصر آن مثبت (منفی) باشد.

تذکر ۱.۱.۱. اگر $\tilde{A}$ یک عدد فازی باشد، آنگاه فرم پارامتریک آن به صورت $\tilde{A} = \Big(\underline{A}(\alpha)\ ,\ \overline{A}(\alpha)\Big)$ نشان داده می شود که در آن $\underline{A}(\alpha)$ و $\overline{A}(\alpha)$ توابعی روی اعداد حقیقی هستند که در شرایط زیر صدق می کنند:

۱) $\underline{A}(\alpha)$ تابعی به طور یکنواخت صعودی و از چپ پیوسته است،

۲) $\overline{A}(\alpha)$تابعی به طور یکنواخت نزولی و از راست پیوسته است،

۳) $0 < \alpha < 1 \quad , \quad \underline{A}(\alpha) \leqslant \overline{A}(\alpha)$،

۴)$\alpha \leqslant 0\ , \alpha \geqslant 1 \quad , \quad \underline{A}(\alpha) = \overline{A}(\alpha) = 0$.

برای این که بتوانیم محاسباتمان را بر روی اعداد فازی، آسان تر انجام دهیم مفهوم جدیدی از عدد فازی به نام عدد فازی L_R را معرفی می کنیم.

تعریف ۱.۱۷. عدد فازی $\tilde{A}$ را یک عدد فازی L_R یا عدد فازی نرمال گویند هرگاه:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \;=\; \begin{cases} L(\dfrac{m-x}{\alpha}) & x \leqslant m\ ,\ \alpha > 0, \\ R(\dfrac{x-m}{\beta}) & x \geqslant m\ ,\ \beta > 0, \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از $\Re^+$ به $[0,1]$ هستند و رابطه $R(0) = L(0) = 1$ برقرار است. در این حالت m را مقدار میانه و α و β را به ترتیب پهنای راست و چپ می نامند. در این صورت $\tilde{A}$ به شکل $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{L\_R}$ نشان داده می شود. مجموعه همه اعداد فازی نرمال را با $F(\Re)$ نمایش می دهند.

تعریف ۱.۱۸. مانند عدد فازی L_R، بازه فازی L_R نیز یک مجموعه فازی با تابع عضویتی به فرم زیر می باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \;=\; \begin{cases} L(\dfrac{A^L-x}{\alpha}) & x \leqslant A^L, \\ R(\dfrac{x-A^U}{\beta}) & x \geqslant A^U, \\ 1 & otherwise, \end{cases} \tag{۱.۱}$$

که در آن L و R همان توابع تعریف شده در عدد فازی نرمال هستند. به علاوه A^L و A^U دو عدد حقیقی هستند که

در رابطه $A^L \leqslant A^U$ صدق می کنند. در این حالت بازه فازی $\tilde{A}$ را به فرم $\tilde{A} = (A^L, A^U, \alpha, \beta)_{L\_R}$ نشان می دهند.

تذکر ۲.۱.۱. اگر در تعریف عدد فازی L_R، توابع L و R توابعی خطی باشند، عدد فازی حاصل را عدد فازی مثلثی می نامند و مجموعه همه اعداد فازی مثلثی را با $FT(\Re)$ نمایش می دهند. معمولا عدد فازی مثلثی را به شکل $\tilde{A} = (a, \alpha\ ,\ \beta)$ نشان می دهند و دارای تابع عضویتی به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \;=\; \begin{cases} ۱ - (\dfrac{a-x}{\alpha}) & a - \alpha \leqslant x \leqslant a, \\ ۱ - (\dfrac{x-a}{\beta}) & a \leqslant x \leqslant \beta + a. \end{cases}$$

تذکر ۳.۱.۱. اگر در تعریف بازه فازی L_R کلی توابع L و R توابعی خطی باشند و اختلاف A^L و A^U ناچیز باشد، بازه فازی حاصل را عدد فازی ذوزنقه ای می نامند. معمولا عدد فازی ذوزنقه ای را به شکل $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ نشان می دهند و دارای تابع عضویتی به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \;=\; \begin{cases} (\dfrac{x-a}{b-a}) & a \leqslant x \leqslant b, \\ ۱ & b \leqslant x \leqslant c, \\ (\dfrac{d-x}{d-c}) & c \leqslant x \leqslant d. \end{cases}$$

تذکر ۴.۱.۱. عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ ($\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)$) را یک عدد فازی مثبت گوئیم هر گاه $a \geqslant ۰$ ($a - \alpha \geqslant ۰$). در واقع باید انحراف چپ آن عددی مثبت باشد.

تعریف ۱۹.۱. فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی نرمال با توابع عضویت پیوسته و $\divideontimes : \Re \times \Re \longrightarrow \Re$ یک عملگر دوتایی بر روی اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم $\divideontimes$ را برای عدد فازی با $\circledast$ نشان دهیم، آنگاه با استفاده از اصل گسترش حاصل $\tilde{A} \circledast \tilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{(\tilde{A} \circledast \tilde{B})}(Z) \;=\; \sup_{Z = x \divideontimes y} \; \min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x)\ ,\ \mu_{\tilde{B}}(y)\right\}.$$

۲.۱.۱ عملگرهای جبری بر ای اعداد فازی نرمال

فرض کنید $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{L\_R}$ و $\tilde{B} = (n, \delta, \gamma)_{L\_R}$ دو عدد فازی نرمال بوده و λ عددی حقیقی باشد، در این صورت تعاریف زیر را داریم [۳۵]:

$$۱)\ \lambda \circledast \tilde{A} = \begin{cases} (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{L\_R} & \lambda \geqslant ۰, \\ (\lambda m, -\lambda\beta, -\lambda\alpha)_{L\_R} & \lambda < ۰, \end{cases} \tag{۲.۱}$$

$$۲)\ -\tilde{A} = (-m, \beta, \alpha)_{L\_R}, \tag{۳.۱}$$

$$۳)\ \tilde{A} \oplus \tilde{B} = (m+n, \alpha+\delta, \beta+\gamma)_{L\_R}, \tag{۴.۱}$$

$$۴)\ \tilde{A} \ominus \tilde{B} = (m-n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{L\_R}. \tag{۵.۱}$$

۲.۱ مرتب کردن اعداد فازی

مرتب سازی اعداد فازی و مقایسه آنها نقشی کلیدی در روند تصمیم گیری بازی می کند و تحقیقات فراوانی در این مورد منتشر شده است. مرتب سازی اعداد فازی در زمینه های مختلف از قبیل کنترل فازی، بهینه سازی سیستم های اقتصادی- اجتماعی، تحلیل پوششی داده ها، هوش مصنوعی و ... ظاهر می شود. وقتی شخص با موقعیت های مختلف در یک محیط مبهم رو به رو می شود آنها را با متغیرهای زبانی معرفی می کند و لازم است بعد از مرتب سازی آنها تصمیم نهایی را اتخاذ نماید.

روش مرتب سازی اعداد فازی ابتدا توسط جین[۱] در سال ۱۹۷۶ پیشنهاد شد و پس از آن محققین بسیاری به طرح توابع مرتب کننده مختلف مبادرت کردند و به این ترتیب روش های گوناگونی برای مقایسه اعداد فازی با توابع مرتب کننده متفاوتی به وجود آمدند. بعضی از این روش ها می تواند فقط در محیط های خاص استفاده شود و بعضی دیگر تنها وقتی که توابع عضویت ویژگی خاصی از قبیل نرمال بودن، مثلثی، ذوزنقه ای بودن و ... دارند، استفاده می شود. اولین بازبینی و بحث در مورد این روش ها توسط بورتلن[۲] و دگانی[۳] داده شده است. محققان دیگری نیز مرتب سازی

---

[۱] $Jain$

[۲] $Bortolon$

[۳] $Degani$

اعداد فازی را بر اساس مختصات مرکز جرم پیشنهاد داده اند. یاگر[۱] اولین پژوهشگری بود که از مفهوم مرکز جرم در مرتب سازی اعداد فازی استفاده کرد. او چهار شاخص را برای مقایسه اعداد فازی به کمک توابع مرتب کننده بیان کرد. پس از آن کافمن[۲] و گوپتا[۳] در سال ۱۹۸۵ و گونزالز[۴] در سال ۱۹۸۹ روش هایی را برای مقایسه اعداد فازی پیشنهاد کردند. همچنین لیو[۵] و وانگ[۶] در سال ۱۹۹۲ با استفاده از مفهوم انتگرال یک شاخص را ارایه کردند. چنگ[۷] در سال ۱۹۹۸ با به کار گیری مفهوم فاصله، مدرس[۸] و سعدی نژاد[۹] در سال ۲۰۰۱ به وسیله اندازه گیری نقطه به نقطه اعداد فازی، چو[۱۰] و تسائو[۱۱] در سال ۲۰۰۲ با مقایسه مساحت بین مرکز جرم عدد فازی و مبدأ، ژانگ[۱۲]، وو[۱۳] و لیانگ[۱۴] در سال ۲۰۰۶ نیز از طریق مفهوم مرکز جرم، شاخص هایی را برای مقایسه و مرتب سازی اعداد فازی پیشنهاد کرده اند.

با دقت در روش های موجود در می یابیم که توابع مرتب کننده معمولا بر پایه سه مفهوم اصلی بررسی و به دست آمده اند که سایر روش ها به دنبال بسط و توسعه این حالت ها ایجاد می شوند.

۱) مفهوم مساحت محدود به تابع عضویت یک عدد فازی،

۲) مفهوم اندازه و فاصله اعداد فازی،

۳) مفهوم توزیع امکان یک عدد فازی.

برخی از روش های مرتب کردن، شامل مرتب کردن بازه های فازی نیز می شوند. این روش ها را می توان کلا" به دو دسته تقسیم کرد:

الف) روش های مشتمل بر مرتب کردن اعداد فازی با استفاده از روابط معمولی (غیر فازی). در این روش ها، یک تابع حقیقی مقدار روی هر عدد فازی تعریف می شود که ترتیب اعداد فازی بر اساس مقادیر آن تابع صورت می گیرد.

ب) روش هایی که با ارایه یک شاخص مقایسه، برای هر زوج عدد فازی به مقایسه آنها می پردازد.

یک ابزار بسیار مفید و مناسب برای مرتب کردن اعداد فازی به یکی از دو روش بالا، توابع مرتب کننده هستند که به صورت زیر تعریف می شوند.

تعریف ۲۰.۱. یک تابع مرتب کننده تابعی مانند $R : F(\Re) \longrightarrow \Re$ است که هر عدد فازی را به عددی بر روی

---

[۱] $Yager$ [۲] $Kaufmann$ [۳] $Gupta$ [۴] $Gonzalez$ [۵] $Liou$ [۶] $Wang$ [۷] $Cheng$ [۸] $Modarres$ [۹] $Sadi-Nezhad$
[۱۰] Chu [۱۱] $Tsao$ [۱۲] $Zhang$ [۱۳] Wu [۱۴] $Liang$

محور اعداد حقیقی ($\Re$) می نگارد. به این ترتیب اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی باشند داریم:

$$۱)\ \tilde{A} \succ \tilde{B} \iff R(\tilde{A}) > R(\tilde{B}),$$

$$۲)\ \tilde{A} \prec \tilde{B} \iff R(\tilde{A}) < R(\tilde{B}),$$

$$۳)\ \tilde{A} \simeq \tilde{B} \iff R(\tilde{A}) = R(\tilde{B}),$$

$$۴)\ \tilde{A} \succsim \tilde{B} \iff R(\tilde{A}) \geqslant R(\tilde{B}),$$

$$۵)\ \tilde{A} \precsim \tilde{B} \iff R(\tilde{A}) \leqslant R(\tilde{B}),$$

که منظور از « $\precsim$ » حالت فازی «$\leqslant$ » و منظور از «$\succsim$» حالت فازی «$\geqslant$» است [۲۴].

تعریف ۲۱.۱. دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)$ و $\tilde{B} = (b, \gamma, \lambda)$ را برابر گوییم اگر و تنها اگر $a = b$، $\alpha = \gamma$ و $\beta = \lambda$ [۲۲].

تعریف ۲۲.۱. تابع مرتب کننده $R : F(\Re) \longrightarrow \Re$ را خطی گوییم هرگاه:

$$۱)\ \ R(\tilde{A} + \tilde{B}) = R(\tilde{A}) + R(\tilde{B}),$$

$$۲)\ \ R(k\tilde{A}) = kR(\tilde{A}) \quad k \in \Re,$$

و همچنین آن را محملی گوییم هرگاه:

$$R(\tilde{A}) \in \overline{\{x | \mu_{\tilde{A}}(x) > ۰\}}.$$

تذکر ۱.۲.۱. برای اعداد فازی $\tilde{A}$، $\tilde{B}$، $\tilde{C}$ و $\tilde{D}$ داریم [۴۰]:

$$۱)\ \ \tilde{A} \succ \tilde{B} \implies \tilde{A} \oplus \tilde{C} \succ \tilde{B} \oplus \tilde{C},$$

$$۲)\ \ \tilde{A} \succ \tilde{B} \implies \tilde{A} \ominus \tilde{C} \succ \tilde{B} \ominus \tilde{C},$$

$$۳)\ \tilde{A} \simeq \tilde{B} \implies \tilde{A} \simeq \tilde{C} \succ \tilde{B} \simeq \tilde{C},$$

$$۴)\ \tilde{A} \succ \tilde{B}\ ,\ \tilde{C} \simeq \tilde{D} \implies \tilde{A} \oplus \tilde{C} \succ \tilde{B} \oplus \tilde{C},$$

که منظور از « $\simeq$ » حالت تساوی فازی است.

لم ۱.۲.۱. برای هر تابع مرتب کننده خطی $R\ :\ F(\Re) \longrightarrow \Re$ داریم:

$$\tilde{A} \succsim \tilde{B} \iff \tilde{A} - \tilde{B} \succsim ۰ \iff -\tilde{B} \succsim -\tilde{A}.$$

۱.۲.۱ مرتب کننده یاگر

در این قسمت با استفاده از مفهوم α-برش و مساحت ناحیه حاصل از α-برش یک عدد فازی، روشی برای مرتب کردن اعداد فازی بیان می کنیم.

فرض کنید $\tilde{a}$ یک عدد فازی باشد. در این صورت مرتب کننده یاگر [۴۲] به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(\tilde{a}) = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} (\inf \tilde{a}_\alpha + \sup \tilde{a}_\alpha) d\alpha.$$

برای عدد فازی ذوزنقه ای $\tilde{a} = (a_۱, b_۱, c_۱, d_۱)$ با این مرتب کننده داریم:

$$R(\tilde{a}) = \frac{۱}{۲}(a_۱ + b_۱) + \frac{۱}{۴}(d_۱ - c_۱).$$

فرض کنیم $\tilde{a} = (a_۱, b_۱, c_۱, d_۱)$ و $\tilde{b} = (a_۲, b_۲, c_۲, d_۲)$ دو عدد فازی ذوزنقه ای باشند. در این صورت مرتب کننده یاگر، $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ را به صورت زیر مقایسه می کند:

$$\tilde{a} \succeq \tilde{b} \iff \frac{۱}{۲}(a_۱ + b_۱) + \frac{۱}{۴}(d_۱ - c_۱) \geqslant \frac{۱}{۲}(a_۲ + b_۲) + \frac{۱}{۴}(d_۲ - c_۲).$$