بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ساخت قاب‌ها برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی

سخنران: جواد حسین‌آبادی

زمان: دوشنبه ۲ /۱۱ /۹۱ ساعت ۲ بعدازظهر

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر فرید بهرامی

۲– دکتر محمدرضا کوشش

۳– دکتر محمدتقی جهاندیده

۴– دکتر مهدی نعمتی

چکیده:

در این پایان‌نامه به ساخت قاب‌ها برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی، به کمک روش تجزیه مقدار تکین عملگر ترکیب(پیش‌قابی)، می‌پردازیم. همچنین نشان می‌دهیم با استفاده از نظریه احاطه‌سازی در بعد متناهی می‌توان قاب‌هایی با ویژگی نرم‌های معین ساخت. در پایان با ارائه مفهوم جدید پتانسیل قاب، روش ساخت قاب‌هایی با ویژگی پتانسیل قاب معین را مشخص می‌سازیم.

کلمات کلیدی: قاب، فضای هیلبرت با بعد متناهی، تجزیه مقدار تکین، عملگر ترکیب(پیش‌قابی)، احاطه‌سازی، پتانسیل قاب

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

ساخت قاب‌ها برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

جواد حسین آبادی

استاد راهنما

دکتر فرید بهرامی

بهمن ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض آقای جواد حسین‌آبادی
تحت عنوان

ساخت قاب‌ها برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی

در تاریخ ۲ /۱۱/ ۹۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر فرید بهرامی
۲– استاد مشاور	دکتر محمدرضا کوشش
۳– استاد داور۱	دکتر محمدتقی جهاندیده
۴– استاد داور۲	دکتر مهدی نعمتی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

حمد و سپاس بی قیاس ملک العرش را سزاست که از الطاف بی منتها تاج عزت بر سر انسان نهاده و بنی آدم را بر سایر خلایق برتری داده و نعمت اندیشیدن و علم آموزی را نصیب او نموده است.

اکنون که در پرتو لطف و عنایت پروردگار سبحان انجام این پژوهش میسر گردید، شایسته است از تمام عزیزانی که لطف و مهربانی خود را همواره بی هیچ منت و ادعایی ارزانیم داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

از مادر عزیزم که سرچشمه عشق و بزرگترین معلم فداکاری بوده صمیمانه متشکرم.

از همسرم که همواره مشوق من بوده و حضور گرمش مایه دلگرمی و آرامش بخش زندگیم بوده است.

از فرزند دلبندم و کلیه عزیزانی که دعای خیرشان گره گشای کارهایم بوده است.

و از استاد ارجمند جناب آقای دکتر فرید بهرامی که افتخار شاگردی در محضر علم ، اندیشه و اخلاق ایشان را داشتم و زحمت راهنمایی این پایان نامه را با سعه ی صدر و دقت تمام تقبل نمودند صمیمانه سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر محمدرضا کوشش استاد مشاور پایان نامه و نیز آقایان دکتر محمد تقی جهاندیده و دکتر مهدی نعمتی که زحمت بازخوانی و داوری پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تقدیر و تشکر را دارم.

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به روح پاک پدرم

از خودگذشتگی و فداکاری مادرم

صبر و همراهی، همسر مهربان و فرزند دلبندم

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه به ساخت قاب‌ها برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی، به کمک روش تجزیه مقدار تکین عملگر ترکیب(پیش‌قابی)، می‌پردازیم. همچنین نشان می‌دهیم با استفاده از نظریه احاطه‌سازی در بعد متناهی می‌توان قاب‌هایی با ویژگی نرم‌های معین ساخت. در پایان با ارائه مفهوم جدید پتانسیل قاب، روش ساخت قاب‌هایی با ویژگی پتانسیل قاب معین را مشخص می‌سازیم.

کلمات کلیدی: قاب، فضای هیلبرت با بعد متناهی، تجزیه مقدار تکین، عملگر ترکیب(پیش‌قابی)، احاطه‌سازی، پتانسیل قاب

فصل ۱

مقدمه

یکی از مفاهیم بسیار مهم در مطالعه فضاهای برداری، مفهوم پایه می‌باشد. یافتن پایه برای یک فضای برداری این امکان را به ما می‌دهد که تمام اعضای آن‌را به‌طور دقیق توصیف و تشریح کنیم. به نحو مشابه در یک فضای هیلبرت H، مفهوم پایه‌ی هیلبرتی از اهمیت زیادی برخوردار است. اگر $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه‌ی هیلبرتی برای H باشد آن‌گاه هر $h \in H$ را می‌توان به‌صورت

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

نمایش داد که ضرایب c_k در آن یکتا هستند. همگرایی سری بالا به این معنی است که

$$\lim_{n\to\infty} \|h - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\| = 0.$$

نرم به‌کار رفته در رابطه بالا، نرم حاصل از ضرب داخلی فضای هیلبرت H است. اما با تمام فوایدی که پایه‌ها دارا هستند، شرایط محدودکننده و تقریباً سخت پایه، زمینه را برای مفهوم جدیدی به‌نام مفهوم قاب فراهم می‌کند.

مفهوم قاب‌ها در فضاهای هیلبرت نخستین بار در سال ۱۹۵۲ میلادی به‌وسیله دافین و شیفر با مطالعه بر روی سری‌های فوریه غیرهارمونیکی آغاز گردید. در واقع ایشان قاب‌ها را به عنوان ابزاری برای مطالعه دنباله‌هایی از نوع $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ که $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از اعداد حقیقی یا مختلط هستند، مورد استفاده قرار دادند. بنا به دلایلی کارهای دافین و شیفر تا سال ۱۹۸۶ ادامه پیدا نکرد. اما در سال ۱۹۸۶ کارهایی که توسط دابیچز، گراسمن و مِیِر روی قاب‌ها انجام شد باعث زنده شدن دوباره این تئوری گردید. در سال ۱۹۸۹ گروچنیگ قاب‌ها را به فضاهای باناخ تعمیم داد. سال ۲۰۰۲ کاسازا و لئون در یک حالت خاص، قاب‌ها را برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی تعریف کردند. در سال ۲۰۰۵ رولی به کمک روش تجزیه مقدار تکین عملگر قاب، ساخت قاب‌ها برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی را معرفی کرد. همچنین ساخت قاب‌ها با ویژگی نرم‌های معین برای بردارهای قاب را با استفاده از نظریه احاطه‌سازی ارائه کرد.

در واقع قاب‌ها برای یک فضای هیلبرت، این امکان را فراهم می‌کنند که هر بردار در این فضا را به‌صورت ترکیب خطی نامتناهی از اعضای قاب نمایش دهند ولی مستقل خطی بودن این اعضا لازم نیست. بنابراین یک قاب در فضای هیلبرت H دنباله‌ای از عناصر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است که هر $h \in H$ نمایشی به‌صورت $h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ دارد، با این تفاوت که ضرایب c_k در این ترکیب خطی لزوماً یکتا نیستند. اما تعریف دقیق ریاضی قاب به این‌صورت است که، دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ از عناصر فضای هیلبرت H یک قاب برای H نامیده می‌شود، اگر ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$\forall h \in H, \qquad A\|h\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, f_k\rangle|^2 \leq B\|h\|^2.$$

اعداد A, B را کران‌های قاب می‌نامیم و این اعداد یکتا نیستند.

در بیست سال اخیر همراه با گسترش و رشد سریع نظریه قاب‌ها کابردهای زیادی از این نظریه نمایان شد. امروزه به‌جز کاربردهای قدیمی قاب مانند پردازش سیگنال، پردازش تصویر و ارتباط بی‌سیم در مخابرات، قاب‌ها ابزار اساسی در متراکم سازی داده‌ها، نظریه نمونه گیری، نورشناسی، کاهش اثر اتلاف داده‌ها در سیستم‌های انتقال داده‌ها به شمار می‌آیند.

یکی از مباحثی که در سال‌های اخیر مورد توجه ریاضی‌دانان قرار گرفته است، ساخت قاب‌ها با ویژگی‌های معین برای بردارهای قاب در فضاهای هیلبرت با بعد متناهی است.

هدف اصلی ما در این پایان‌نامه ارائه مباحث زیر برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی H^N می‌باشد:

الف) ساختن قاب به کمک روش تجزیه مقدار تکین عملگر ترکیب.

ب) با استفاده از نظریه احاطه‌سازی، قاب‌هایی با ویژگی نرم‌های معین برای بردارهای قاب بسازیم.

ج) قاب‌هایی با پتانسیل قاب معین بسازیم.

مطالب این پایان‌نامه برمبنای مرجع [۱۹] تنظیم شده است. فصل‌های مختلف این پایان‌نامه به شرح زیر است.

در فصل دوم به ارائه پیش نیازهای لازم، یعنی نظریه احاطه‌سازی در $\mathbb{R}^n$ و روش تجزیه مقادیر تکین ماتریس‌ها می‌پردازیم. در بخش اول این فصل مفهوم احاطه‌سازی در $\mathbb{R}^n$ به‌طور دقیق تعریف شده است. همچنین مثال‌های متنوع و قضیه‌های لازم و ضروری مربوط به این نظریه ارائه شده است. در بخش دوم از این فصل به معرفی روش تجزیه مقدار تکین ماتریس‌ها همراه با مثال و قضیه اساسی تجزیه مقدار تکین می‌پردازیم. این پیش‌نیازها زمینه را برای ساخت قاب‌ها با ویژگی نرم‌های معین برای بردارهای قاب و ساخت قاب‌ها به کمک روش تجزیه مقدار تکین در فضاهای هیلبرت با بعد متناهی، فراهم و ما را در رسیدن به اهداف پایان نامه، یاری می‌کند.

در فصل سوم، به ارائه نظریه قاب‌ها در فضاهای هیلبرت می‌پردازیم. در بخش اول این فصل ابتدا مروری بر نظریه عملگرها خواهیم داشت و در بخش دوم به ارائه تعریف قاب‌ها در فضاهای هیلبرت، مثال‌های متنوع و قضیه‌های ضروری می‌پردازیم. در بخش سوم این فصل عملگر ترکیب(پیش‌قابی)، عملگر تجزیه و عملگر قاب را همراه با مثال و قضیه‌های لازم ارائه می‌کنیم.

در فصل چهارم به ساخت قاب‌ها برای فضاهای هیلبرت با بعد متناهی می‌پردازیم. این فصل مطابق با اهداف پایان نامه به چهار بخش تقسیم شده است. در بخش اول، نحوه ساخت قاب‌ها را برای H^N به کمک روش تجزیه مقدار تکین عملگر ترکیب(پیش‌قابی) نشان می‌دهیم. در بخش دوم ساخت قاب‌ها با نرم‌های معین برای بردارهای قاب در H^N را ارائه می‌کنیم. در بخش سوم مفهوم جدید پتانسیل قاب را معرفی می‌کنیم و به ساخت قاب‌هایی با پتانسیل قاب معین در H^N می‌پردازیم. در بخش چهارم نتیجه‌گیری و پیشنهادات این پایان‌نامه را ارائه می‌دهیم.

فصل ۲

پیش‌نیازها

در این فصل به پیش‌نیازهای لازم و ضروری پایان‌نامه می‌پردازیم. در بخش اول مفهوم احاطه‌سازی در $\mathbb{R}^n$ و شرایط معادل آن‌را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش دوم تجزیه مقدار تکین ماتریس‌ها و قضیه اساسی آن‌را همراه با مثال ارائه می‌کنیم. مطالب این فصل بر مبنای مراجع [۱]، [۲]، [۱۲]، [۱۴] و [۲۱] تنظیم شده‌اند.

۱.۲ احاطه‌سازی در $\mathbb{R}^n$

مفهوم احاطه‌سازی در $\mathbb{R}^n$ یکی از مفاهیم مهم ریاضی می‌باشد که از ابتدای قرن بیستم مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است.

تعریف ۱.۱.۲ برای هر $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$، $x_{\downarrow} = (x_{[1]}, \dots, x_{[n]})$ را مرتب‌شده نزولی می‌نامیم هرگاه، $\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_{[1]}, \dots, x_{[n]}\}$ و $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[n]}$.

تعریف ۲.۱.۲ فرض کنیم $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. اگر برای هر $1 \leq m \leq n$، $\sum_{k=1}^{m} x_{[k]} \leq \sum_{k=1}^{m} y_{[k]}$ آن‌گاه x را احاطه‌شده ضعیف توسط y می‌نامیم و با نماد $x \prec_w y$ نمایش می‌دهیم.
به‌علاوه، اگر $\sum_{k=1}^{n} x_{[k]} = \sum_{k=1}^{n} y_{[k]}$ آن‌گاه x را احاطه‌شده توسط y می‌نامیم و با نماد $x \prec y$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳.۱.۲ فرض کنیم $x \in \mathbb{R}^n$، و برای هر $1 \leq k \leq n$، $x_k \geq 0$ و $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. در این‌صورت

$$(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}) \prec (x_1, \dots, x_n) \prec (1, 0, \dots, 0).$$

به عنوان مثال داریم:

$$(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \prec (\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0) \prec \dots \prec (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \dots, 0) \prec (1, 0, \dots, 0).$$

به همین ترتیب برای $c \geq \circ$ و $x \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$\frac{1}{(\sum_{k=1}^{n} x_k) + nc}(x_1 + c, \ldots, x_n + c) \prec \frac{1}{(\sum_{k=1}^{n} x_k)}(x_1, \ldots, x_n).$$

در ادامه برای اثبات قضیه‌های احاطه‌سازی و شرایط معادل آن در $\mathbb{R}^n$ به معرفی چند نماد می‌پردازیم. قرار می‌دهیم $e := (1, \ldots, 1)$ و برای $x \in \mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم $|x| := (|x_1|, \ldots, |x_n|)$، $x^+ := (\max\{x_1, \circ\}, \ldots, \max\{x_n, \circ\})$ و $tr(x) := \sum_{k=1}^{n} x_k = \langle x, e \rangle$.

لم ۴.۱.۲ برای $x, y \in \mathbb{R}$، $x \prec_w y$ اگر و تنها اگر برای هر $t \in \mathbb{R}$، $tr(x - te)^+ \leq tr(y - te)^+$.

برهان. فرض کنیم $x \prec_w y$. در این‌صورت برای $t \in \mathbb{R}$ حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:
اگر $t > x_{[1]}$ آن‌گاه $tr(x - te)^+ = \sum_{k=1}^{n}(x_k - t)^+ = \circ$ و حکم حاصل می‌شود. اگر وجود داشته باشد m به‌طوری‌که $x_{[m+1]} < t \leq x_{[m]}$ آن‌گاه $tr(x - te)^+ = \sum_{k=1}^{m}(x_{[k]} - t)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} tr(y - te)^+ &\geq \sum_{k=1}^{m}(y_{[k]} - t)^+ \\ &\geq \sum_{k=1}^{m}(y_{[k]} - t) \\ &\geq \sum_{k=1}^{m}(x_{[k]} - t) = tr(x - te)^+. \end{aligned}$$

برای $t \leq x_{[n]}$، اثبات مشابه حالت قبل می‌باشد.
برعکس، فرض کنیم برای هر $t \in \mathbb{R}$، $tr(x - te)^+ \leq tr(y - te)^+$. در این‌صورت برای $m \leq n - 1$ قرار می‌دهیم $t = y_{m+1}$. پس داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m}(y_{[k]} - t) &= tr(y - te)^+ \\ &\geq tr(x - te)^+ \\ &\geq \sum_{k=1}^{m}(x_{[k]} - t)^+ \geq \sum_{k=1}^{m}(y_{[k]} - t). \end{aligned}$$

پس $\sum_{k=1}^{m} x_{[k]} \leq \sum_{k=1}^{m} y_{[k]}$. از طرفی برای t های کوچک داریم $tr(x - te) = \sum_{k=1}^{n}(x_i - t)$ و $tr(y - te) = \sum_{k=1}^{n}(y_i - t)$. در نتیجه $\sum_{k=1}^{n} x_{[k]} \leq \sum_{k=1}^{n} y_{[k]}$ و بنابراین اثبات تمام است. ■

لم ۵.۱.۲ برای $x, y \in \mathbb{R}$، $x \prec y$ اگر و تنها اگر برای هر $t \in \mathbb{R}$، $tr|x - te| \leq tr|y - te|$.

برهان. فرض کنیم $x \prec y$. در این‌صورت $tr(x) = tr(y)$ و $x \prec_w y$. لذا بنابر لم قبل برای هر t داریم:

$$tr(x-te)^+ \leq tr(y-te)^+$$

از طرفی با توجه به این‌که برای هر $z \in \mathbb{R}$ ، $|z| + z = ۲z^+$، داریم:

$$\begin{aligned} tr|x-te| &= ۲tr(x-te)^+ - tr(x-te) \\ &\leq ۲tr(y-te)^+ - tr(y-te) \\ &= tr|y-te| \end{aligned}$$

برعکس، فرض کنیم برای هر $t \in \mathbb{R}$، $tr|x-te| \leq tr|y-te|$. در این‌صورت برای tهای بزرگ داریم:

$$tr|y-te| = tr(te-y), \quad tr|x-te| = tr(te-x)$$

پس $tr(x) \geq tr(y)$. همچنین برای tهای کوچک داریم:

$$tr|y-te| = tr(y-te), \quad tr|x-te| = tr(x-te)$$

پس $tr(x) \leq tr(y)$. در نتیجه $tr(x) = tr(y)$. حال با توجه به این‌که برای هر $z \in \mathbb{R}$ ، $|z| + z = ۲z^+$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} tr(x-te)^+ &= \frac{tr|x-te| + tr(x-te)}{۲} \\ &\leq \frac{tr|y-te| + tr(y-te)}{۲} \\ &= tr(y-te)^+. \end{aligned}$$

در نتیجه بنابر لم قبل $x \prec_w y$ و حکم حاصل می‌شود. ■

با توجه به این‌که مفهوم ماتریس تصادفی در بررسی احاطه‌سازی نقش اساسی دارد، ابتدا مفهوم ماتریس‌های تصادفی و ویژگی‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۶.۱.۲ ماتریس $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ با درایه‌های حقیقی نامنفی را

۱) یک ماتریس تصادفی سطری نامیم هرگاه برای هر i، $\sum_j^n p_{ij} = ۱$

۲) یک ماتریس تصادفی ستونی نامیم هرگاه برای هر j، $\sum_i^n p_{ij} = ۱$

۳) یک ماتریس تصادفی دوگانه نامیم هرگاه یک ماتریس تصادفی سطری و ستونی باشد.

۴) یک ماتریس تصادفی متعامد نامیم هرگاه ماتریس یکانی $U = (u_{ij})$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $P = (|u_{ij}|^2)$.

لازم به یادآوری است که اگر $P = (p_{ij})$ و $Q = (q_{ij})$ ماتریس‌های تصادفی دوگانه باشند، آنگاه برای هر j داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(PQ)_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ik}q_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{n}q_{kj}(\sum_{i=1}^{n}p_{ik}) = 1\end{aligned}$$

همچنین برای هر i، $\sum_{j=1}^{n}(pq)_{ij} = 1$. در نتیجه حاصل‌ضرب دو ماتریس تصادفی دوگانه یک ماتریس تصادفی دوگانه است.

مثال ۷.۱.۲ فرض کنیم $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$. آنگاه ماتریس $A = \begin{pmatrix} t_1 & 1-t_1 \\ t_2 & 1-t_2 \end{pmatrix}$ یک ماتریس تصادفی سطری است. همچنین ماتریس $A = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 1-t_1 & 1-t_2 \end{pmatrix}$ یک ماتریس تصادفی ستونی است. ماتریس $A = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$ برای $0 \leq t \leq 1$، یک ماتریس تصادفی دوگانه است.

ملاحظه ۸.۱.۲ فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_n\}$ پایه استاندارد برای فضای $\mathbb{R}^n$ باشد. A را یک ماتریس جایگشت می‌نامیم، هرگاه نگاشت یک به یک و پوشای $\pi : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر i، $Ae_i = e_{\pi(i)}$. با توجه به اینکه Ae_i بیانگر ستون i ام ماتریس A می‌باشد پس در هر ستون ماتریس A، دقیقاً یک‌بار عدد یک ظاهر می‌شود و بقیه‌ی درایه‌های آن ستون صفر می‌باشند. از طرفی در هر سطر نیز دقیقاً یک‌بار عدد یک ظاهر می‌شود، زیرا در غیر این‌صورت اگر برای i، $a_{ij_1} = a_{ij_2}$ آنگاه

$$\langle e_{\pi(j_1)}, e_i\rangle = \langle Ae_{j_1}, e_i\rangle = a_{ij_1} = 1 = a_{ij_2} = \langle Ae_{j_2}, e_i\rangle = \langle e_{\pi(j_2)}, e_i\rangle$$

اما با توجه به اینکه π نگاشتی یک به یک است، $\pi(j_1) \neq \pi(j_2)$. در نتیجه حداقل یکی از آن‌ها مخالف i می‌باشد و بنابر متعامد بودن e_iها به تناقض می‌رسیم. حال با توجه به اینکه در هر سطر و ستون عدد یک دقیقاً یک‌بار ظاهر می‌شود پس A یک ماتریس تصادفی دوگانه است. همچنین بنابر توضیحات بالا می‌توان نتیجه گرفت که،

$$\{\text{ستون‌های ماتریس } A\} = \{e_{\pi(i)}\}_{i=1}^{n} = \{e_i\}_{i=1}^{n}$$

در نتیجه ستون‌های ماتریس A تشکیل یک مجموعه مستقل خطی می‌دهند. لذا A یک ماتریس وارون‌پذیر می‌باشد.

حال با توجه به $A^{-1}A = I$ پس برای هر i، $A^{-1}Ae_i = e_i$ و در نتیجه $A^{-1}e_{\pi(i)} = e_i$. قرار می‌دهیم $j = \pi(i)$ در این‌صورت با توجه به این‌که π یک نگاشت وارون‌پذیر می‌باشد $i = \pi^{-1}(j)$. پس A^{-1} نیز ماتریس جایگشت تولید شده توسط π^{-1} می‌باشد.

ملاحظه ۹.۱.۲ با توجه به این‌که $x_\downarrow$ مرتب‌شده نزولی x می‌باشد پس بنابر مثال بالا ماتریس جایگشت P وجود دارد به‌طوری‌که $x_\downarrow = Px$. همچنین با توجه به تعریف احاطه‌سازی، اگر $x \prec y$ آن‌گاه برای ماتریس‌های جایگشت P و Q نیز $Px \prec Qy$.

قضیه ۱۰.۱.۲ اگر $Q \in M_n(\mathbb{R})$ یک ماتریس تصادفی متعامد و $A \in M_n(\mathbb{R})$ یک ماتریس جایگشت باشد، آن‌گاه AQ نیز یک ماتریس تصادفی متعامد است.

برهان. چون Q یک ماتریس تصادفی متعامد است پس ماتریس یکانی $U = (u_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ وجود دارد به‌طوری‌که برای $1 \leq i, j \leq n$، $q_{ij} = |u_{ij}|^2$. با توجه به این‌که A یک ماتریس جایگشت است پس در هر سطر دقیقاً یک عضو مخالف صفر وجود دارد و مقدار آن برابر یک است. در نتیجه برای i دلخواه دقیقاً یک t وجود دارد به‌طوری‌که $\langle Ae_i, e_t\rangle = a_{it} = 1$. لذا داریم:

$$(AU)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_{kj} = a_{it}u_{tj} = u_{tj}$$

$$(AQ)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}q_{kj} = a_{it}q_{tj} = |u_{tj}|^2$$

در نتیجه $(AQ)_{ij} = |(AU)_{ij}|^2$. از طرفی چون هر ماتریس جایگشت یک ماتریس یکانی است، پس AU نیز یک ماتریس یکانی است. در نتیجه AQ یک ماتریس تصادفی متعامد می‌باشد. ■

مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ تصادفی دوگانه را با D_n نمایش می‌دهیم. در ادامه برخی از ویژگی‌های آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۱.۲ P یک ماتریس تصادفی دوگانه است اگر و تنها اگر شرایط زیر را داشته باشد:

۱) برای هر $x \geq 0$، $Px \geq 0$.

۲) $Pe = e$.

۳) $tr(Px) = tr(x)$.

برهان. فرض کنیم $P = (p_{ij})$ یک ماتریس تصادفی دوگانه باشد. در این‌صورت چون همه‌ی درایه‌های آن نامنفی است پس برای $x \geq 0$ داریم $Px = (\sum_{j=1}^{n} p_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} p_{nj}x_j) \geq 0$. همچنین چون برای هر $1 \leq i \leq n$ ،

$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ پس $Pe = (\sum_{j=1}^{n} p_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^{n} p_{nj}) = e$. از طرفی چون برای هر $1 \leq j \leq n$، $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ پس داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (Px)_i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{n} p_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} x_j. \end{aligned}$$

برعکس، فرض کنیم ماتریس P در شرایط بالا صدق می‌کند. در این‌صورت چون برای هر $1 \leq j \leq n$، داریم $Pe_j = (p_{1j}, \dots, p_{nj})$ پس برای هر i, j، $p_{ij} \geq 0$. همچنین چون $Pe = e$ پس $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. از طرفی با توجه به این‌که $tr(Px) = tr(x)$ پس برای هر $1 \leq j \leq n$، $tr(Pe_j) = tr(e_j) = 1$. در نتیجه $\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} p_{it} (e_j)_t = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ و حکم قضیه حاصل می‌شود. ■

بنابر قضیه بالا اگر $x \leq y$، در این صورت چون $y - x \geq 0$، $P(y - x) \geq 0$ و در نتیجه $Px \leq Py$. همچنین با توجه به این‌که برای هر $z \in \mathbb{R}$، $-|z| \leq z \leq |z|$ بنابراین برای $x \in \mathbb{R}^n$، $-|x| \leq x \leq |x|$ و در نتیجه $-P|x| \leq Px \leq P|x|$. در ضمن اگر $-|x| \leq y \leq |x|$ چون برای هر i، $-|x_i| \leq y_i \leq |x_i|$ در این‌صورت $|y_i| \leq |x_i|$ بنابراین $|y| \leq |x|$. به این ترتیب $|Px| \leq P|x|$.

قضیه ۱۲.۱.۲ اگر P یک ماتریس تصادفی دوگانه باشد آن‌گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$، $Px \prec x$.

برهان. بنابر لم ۵.۱.۲ کافیست نشان دهیم برای هر $t \in \mathbb{R}$، $tr(|Px - te| \leq tr(|x - te|)$. برای هر $t \in \mathbb{R}$ با توجه به این‌که $Pe = e$ داریم $Px - te = P(x - te)$. در این‌صورت $|Px - te| = |P(x - te)| \leq P|x - te|$. بنابراین $tr|Px - te| \leq tr(P|x - te|)$. حال با توجه به این‌که P یک ماتریس تصادفی دوگانه است پس بنابر قضیه‌ی ۱۱.۱.۲، $tr(P|x - te|) = tr(|x - te|)$ و در نتیجه $tr(|Px - te|) \leq tr(|x - te|)$. ■

لم ۱۳.۱.۲ اگر $x \prec e_1$ آن‌گاه برای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i \geq 0$.

برهان. فرض کنیم چنین نباشد و m وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای $t > m$، $x_{[t]} < 0$. در این‌صورت

$$1 = \sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{m} x_{[i]} + \sum_{i=m+1}^{n} x_{[i]} \leq 1$$

و به تناقض می‌رسیم. ■

قضیه ۱۴.۱.۲ اگر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $Px \prec x$ آن‌گاه P یک ماتریس تصادفی دوگانه است.

برهان. با توجه به این‌که $Pe_j = (p_{1j}, \dots, p_{nj}) \prec e_j$ پس بنابر قضیه قبل برای هر i, j، $p_{ij} \geq 0$ و همچنین برای هر j، $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$. از طرفی چون $Pe = (\sum_{j=1}^{n} p_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^{n} p_{nj}) \prec (1, \dots, 1)$ پس $(Pe)_{[1]} \leq 1$ و برای هر m، $(Pe)_{[m]} \leq 1$. در نتیجه برای هر i، $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \leq 1$. بنابراین با توجه به این‌که $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = n$ نتیجه می‌گیریم برای هر i، $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ پس P یک ماتریس تصادفی دوگانه است. ■

نتیجه ۱۵.۱.۲ $A \in M_n(\mathbb{R})$ یک ماتریس تصادفی دوگانه است اگر و تنها اگر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $Ax \prec x$.

لم ۱۶.۱.۲ برای $x, y \in \mathbb{R}^2$ ، اگر $x \prec y$ آن‌گاه ماتریس تصادفی دوگانه $A \in M_2(\mathbb{R})$ وجود دارد به‌طوری‌که $x = Ay$.

برهان. ابتدا فرض کنیم $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ به‌طور نزولی مرتب‌شده باشند. در این‌صورت چون $x \prec y$ داریم $x_1 \leq y_1$ و $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ پس $y_2 \leq x_2 \leq x_1 \leq y_1$. در نتیجه $0 \leq t \leq 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $x_1 = ty_1 + (1-t)y_2$ و $x_2 = (1-t)y_1 + ty_2$. بنابراین برای ماتریس تصادفی دوگانه $A = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$ داریم $x = Ay$. اگر x و y مرتب‌شده نزولی نباشند آن‌گاه بنابر ملاحظه ۹.۱.۲ ماتریس‌های جایگشت P و Q وجود دارند به‌طوری‌که $x_\downarrow = Px$ و $y_\downarrow = Qy$ و $x_\downarrow \prec y_\downarrow$. پس بنابر توضیحات بالا، ماتریس A وجود دارد به‌طوری‌که $x_\downarrow = Ay_\downarrow$ و در نتیجه $Px = AQy$. حال با توجه به این‌که P یک ماتریس جایگشت است پس وارون آن نیز یک ماتریس جایگشت است. اگر قرار دهیم $R = P^{-1}AQ$ آن‌گاه چون هر ماتریس جایگشت یک ماتریس تصادفی دوگانه است و حاصل‌ضرب ماتریس‌های تصادفی دوگانه، ماتریس تصادفی دوگانه می‌باشد پس R یک ماتریس تصادفی دوگانه است. ■

برای اثبات لم بالا در حالت $n \geq 3$ به مفهوم ماتریس‌های T−تبدیل نیاز داریم.

تعریف ۱۷.۱.۲ ماتریس P را یک ماتریس T−تبدیل نامیم هرگاه عدد حقیقی $0 \leq t \leq 1$ و ماتریس جایگشت Q که فقط دو درایه را جابه‌جا می‌کند (ماتریس ترانهش) وجود داشته باشد به‌طوری‌که $P = tI + (1-t)Q$. با توجه به تعریف بالا مشاهده می‌شود اگر Q ماتریس جایگشتی باشد که دو درایه i و k را جابه‌جا می‌کند آن‌گاه برای $y \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$P(y) = (y_1, \dots, y_{i-1}, ty_i + (1-t)y_k, y_{i+1}, \dots, y_{k-1}, (1-t)y_i + ty_k, y_{k+1}, \dots, y_n).$$

همچنین با توجه به این‌که Q یک ماتریس جایگشت است، پس یک ماتریس تصادفی دوگانه است و برای هر

$1 \le j \le n$ داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}(tI+(1-t)Q)_{ij}\\ &= t+(1-t)\sum_{i=1}^{n} q_{ij} = 1.\end{aligned}$$

به‌طور مشابه برای هر $1 \le i \le n$ داریم، $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. از طرفی همه درایه‌های P نامنفی است. در نتیجه هر ماتریس $T-$تبدیل یک ماتریس تصادفی دوگانه است.

لم ۱۸.۱.۲ اگر $P \in M_n(\mathbb{R})$ یک ماتریس $T-$تبدیل باشد، آن‌گاه $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & P \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ نیز یک ماتریس $T-$تبدیل است.

برهان. چون P یک ماتریس $T-$تبدیل است پس عدد حقیقی $0 \le t \le 1$ و ماتریس ترانهش Q وجود دارد به‌طوری‌که $P = tI_n + (1-t)Q$. در این‌صورت $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & Q \end{pmatrix}$ ماتریسی ترانهش است که درایه اول را ثابت نگه می‌دارد پس

$$tI_{n+1} + (1-t)\begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+(1-t) & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & P \end{pmatrix}$$

بنابراین اثبات تمام است. ■

با توجه به این‌که هر ماتریس جایگشت حاصل‌ضرب ماتریس‌های ترانهش می‌باشد، لم زیر برقرار است.

لم ۱۹.۱.۲ برای $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$، اگر $x \prec y$ آن‌گاه تعداد متناهی از ماتریس‌های تبدیل $P_1, \ldots, P_m \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ وجود دارند به‌طوری‌که $x = P_1 \ldots P_m y$.

برهان. برای $n = 1$ بنابر لم ۱۶.۱.۲ ماتریس $P_1 = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix} = tI + (1-t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x = P_1 y$. حال فرض کنیم لم برای $k \le n$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم برای $k = n+1$ نیز برقرار است. اگر $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ مرتب‌شده نزولی باشند و $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \prec y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$، آن‌گاه با توجه به این‌که $\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sum_{i=1}^{n} y_i$ و $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n+1} y_{i=1}$ پس $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \ge y_{n+1}$. در نتیجه چون x_i ها به ترتیب نزولی مرتب‌شده‌اند پس برای i، $y_{n+1} \le x_i \le y_1$. اگر k کوچکترین اندیسی باشد که برای آن $y_k \le x_1 \le y_1$ آن‌گاه $y_k \le x_1 \le y_{k-1}$ و $0 \le t \le 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $x_1 = ty_1 + (1-t)y_k$. اگر