دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

ارزیابی روش‌های تکراری از نوع ژاکوبی و گاوس-سایدل پیش شرط شده برای حل دستگاه معادلات خطی

استاد راهنما

دکتر فائزه توتونیان

استاد مشاور

دکتر مرتضی گچ پزان

نگارنده

مریم آق نیکوانی

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: آق نیکوانی　　　　نام: مریم

عنوان: ارزیابی روش‌های تکراری از نوع ژاکوبی و گاوس-سایدل پیش شرط شده برای حل دستگاه معادلات خطی

استاد راهنما: دکتر فائزه توتونیان

استاد مشاور: دکتر مرتضی گچ پزان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　　رشته: ریاضی کاربردی　　　گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: مشهد　　　　دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱　　　تعداد صفحات: ۹۹

واژگان کلیدی: روش‌های تکراری پیش شرط شده، روش ژاکوبی، روش گاوس-سایدل، شعاع طیفی، ماتریس پیش شرط

چکیده

در این پایان نامه حل دستگاه خطی $Ax = b$ را در نظر می‌گیریم که در آن $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ یک ماتریس نامنفرد معلوم، $b \in \mathbb{R}^n$ بردار معلوم و $x \in \mathbb{R}^n$ بردار مجهول می‌باشند. در سال‌های اخیر، به منظور بهبود سرعت همگرایی طرح‌های تکراری کلاسیک (ژاکوبی و گاوس-سایدل)، مقالات بسیاری به تغییرات و اصلاحات رده‌ای از پیش شرط‌ها برای دستگاه‌هایی اختصاص داده شده‌اند که ماتریس ضرایب آن‌ها یک M-ماتریس یا یک H-ماتریس می‌باشند. در این پایان نامه به بررسی و مقایسه روش‌های ژاکوبی و گاوس-سایدل پیش شرط شده می‌پردازیم و یک پیش شرط جدید برای دستگاه خطی M-ماتریس‌ها ارائه می‌دهیم. همگرایی روش پیش شرط شده مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. مثال‌های عددی نیز برای نشان دادن بهبود سرعت همگرایی روش‌های ژاکوبی و گاوس-سایدل ارائه خواهند شد.

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، خانم دکتر توتونیان، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر گچ پزان که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر مهربانم به پاس کمک‌ها و دلسوزی‌هایش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مریم آق نیکوانی

۱۳۹۱

پیش گفتار

دستگاه معادلات خطی به شکل کلی ذیل را در نظر بگیرید:

$$Ax = b,$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ یک ماتریس نامنفرد معلوم، $b \in \mathbb{R}^n$ معلوم و $x \in \mathbb{R}^n$ مجهول می‌باشد. برای حل دستگاه خطی فوق، روش‌های تکراری متعددی ارائه شده‌اند. یکی از این روش‌های تکراری، روش تکراری ژاکوبی می‌باشد.

همانطور که می‌دانیم یک روش تکراری همگرا است اگر و فقط اگر شعاع طیفی ماتریس تکرار آن کمتر از یک باشد. همچنین سرعت همگرایی یک روش تکراری به شعاع طیفی ماتریس تکرار آن وابسته است؛ یعنی هر چه شعاع طیفی ماتریس تکرار کوچکتر باشد، سرعت همگرایی روش تکراری بیشتر خواهد بود. برای بهبود سرعت همگرایی روش‌های تکراری، می‌توان از روش پیش شرط سازی به صورت ذیل استفاده کرد:

$$PAx = Pb,$$

که در آن P ماتریس پیش شرط نامیده می‌شود. تاکنون ماتریس‌های پیش شرط مختلفی برای روش‌های تکراری ارائه شده‌اند [۲۰، ۱۱، ۲۹، ۱۰، ۱۸، ۱۴، ۲۸].

در این پایان نامه روش‌های ژاکوبی و گاوس-سایدل پیش شرط شده مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این راستا فصل‌های اول الی ششم، به شرح ذیل خواهند بود:

در فصل اول، ابتدا حالت کلی روش‌های تکراری بیان می‌شود، سپس تعاریف، لم‌ها و قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعد ارائه می‌گردند.

در فصل دوم، ماتریس پیش شرط ارائه شده توسط وانگ و همکارانش[۱] در مرجع [۲۵]، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا، همگرایی روش ژاکوبی پیش شرط شده ثابت می‌شود. همچنین با ارائه مثال‌های عددی تأثیر انتخاب این ماتریس پیش شرط بر سرعت همگرایی روش ژاکوبی نشان داده می‌شود.

[۱] Wang et al.

در فصل سوم، ابتدا پیش شرط معرفی شده توسط هدجیدی موس و همکارانش[۲] در مرجع [۵] و سپس پیش شرط ارائه شده توسط کهنو و همکارانش[۳] در مرجع [۹] بررسی خواهد شد. برای این منظور، همگرایی روش‌های ژاکوبی پیش شرط شده حاصل از اعمال این دو ماتریس پیش شرط ثابت می‌شود. در انتهای فصل نیز مثال‌های عددی ارائه می گردد.

در فصل چهارم، ماتریس پیش شرط ارائه شده توسط لی و جیانگ[۴] در مرجع [۱۳] مورد مطالعه قرار می گیرد. در این راستا، روش‌های از نوع ژاکوبی و گاوس-سایدل با این ماتریس پیش شرط به لحاظ همگرایی مورد تحلیل قرار می گیرند. همچنین مثال‌های عددی برای نشان دادن تأثیر این ماتریس پیش شرط بر سرعت همگرایی روش‌های از نوع ژاکوبی و گاوس-سایدل ارائه می‌شوند.

در فصل پنجم، دو ماتریس پیش شرط معرفی شده توسط ژانگ و همکارانش[۵] در مرجع [۲۷] مورد بررسی قرار می گیرند. همگرایی روش‌های ژاکوبی پیش شرط شده ثابت می‌شود و مثال‌های عددی برای نشان دادن نتایج به دست آمده ارائه می گردند.

در فصل ششم، ابتدا ماتریس پیش شرط ارائه شده توسط نوتسوس و همکارانش[۶] در مرجع [۱۹] و سپس ماتریس پیش شرط ارائه شده توسط هوانگ و همکارانش[۷] در مرجع [۸] مورد مطالعه قرار می گیرند. برای این منظور، همگرایی روش‌های ژاکوبی پیش شرط شده با این دو ماتریس پیش شرط مورد تحلیل قرار می گیرد. همچنین در این فصل، یک ماتریس پیش شرط جدید پیشنهاد می‌شود و همگرایی روش ژاکوبی پیش شرط شده با این ماتریس پیش شرط مورد بررسی قرار می گیرد. مثال‌های عددی نیز برای نشان دادن نتایج به دست آمده ارائه می شوند. در انتها نیز یک نتیجه گیری از مباحث ارائه شده در تمام فصل‌ها بیان می‌شود و پیشنهاداتی برای کارهای آتی ارائه می گردد.

---

[۲] Hadjidimos et al.
[۳] Kohno et al.
[۴] Li and Jiang
[۵] Zhang et al.
[۶] Noutsos et al.
[۷] Huang et al.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیش گفتار

در بسیاری از مسائل کاربردی نیاز به حل دستگاه معادلات خطی به شکل کلی ذیل می‌باشد:

$$Ax = b, \tag{۱.۱}$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ یک ماتریس نامنفرد معلوم، $b \in \mathbb{R}^n$ معلوم و $x \in \mathbb{R}^n$ مجهول می‌باشد. روش‌های تکراری متعددی برای حل دستگاه خطی (۱.۱) ارائه شده‌اند که شکل کلی این روش‌ها به شرح ذیل می‌باشد:

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \qquad k = ۰, ۱, \ldots, \tag{۲.۱}$$

که در آن $A = M - N$ و M نامنفرد است. بنابراین (۲.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \qquad k = ۰, ۱, \ldots, \tag{۳.۱}$$

که در آن $T = M^{-۱}N$ ماتریس تکرار روش تکراری نامیده می‌شود و $c = M^{-۱}b$.

در این پایان نامه فرض می‌شود که عناصر قطری ماتریس ضرایب A مخالف صفر هستند، بنابراین بدون از دست رفتن کلیت مسأله فرض خواهد شد:

$$A = I - L - U, \tag{۴.۱}$$

که در آن I ماتریس همانی است. همچنین $-L$ و $-U$ به ترتیب قسمت پایین مثلثی اکید و بالا مثلثی اکید ماتریس A می‌باشند. لازم به ذکر است، انتخاب $M = I$، $N = L + U$ منجر به روش ژاکوبی کلاسیک و انتخاب $M = I - L$، $N = U$ منجر به روش گاوس-سایدل کلاسیک می‌شود. آنگاه، ماتریس تکرار متناظر با روش ژاکوبی کلاسیک توسط $B = L+U$ و ماتریس تکرار متناظر با روش گاوس-سایدل کلاسیک توسط $H = (I - L)^{-۱}U$ ارائه می‌شوند.

همانطور که می‌دانیم سرعت همگرایی یک روش تکراری به شعاع طیفی ماتریس تکرار آن وابسته است؛ یعنی کاهش شعاع طیفی ماتریس تکرار باعث افزایش سرعت همگرایی روش تکراری می‌شود. یک شیوه مؤثر برای بهبود سرعت همگرایی روش تکراری، پیش شرط سازی دستگاه خطی به صورت ذیل است:

$$PAx = Pb, \tag{۵.۱}$$

آنگاه، می‌توان روش تکراری را به صورت زیر تعریف نمود:

$$M_p x^{(k+1)} = N_p x^{(k)} + Pb, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{۶.۱}$$

که در آن $PA = M_p - N_p$ بوده و ماتریس M_p نامنفرد است. بنابراین(۶.۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{۷.۱}$$

که در آن $T = M_p^{-1} N_p$ و $c = M_p^{-1} Pb$ است.

در این تحقیق از بین روش‌های تکراری موجود، بیشتر بر روی روش‌های تکراری ژاکوبی و گاوس-سایدل پیش شرط شده تمرکز خواهد شد. در مرجع [۲۴] مقایسه‌ای مابین روش ژاکوبی کلاسیک و چند روش تکراری دیگر ارائه شده است که نتایج حاصل از آن نشان دهنده کارایی بالای روش ژاکوبی بوده است.

در ادامه این فصل، تعاریف و قضایای مورد نیاز برای اثبات قضایای اصلی بیان شده در فصل‌های بعد ارائه می‌گردند.

۲.۱ تعاریف و قضایای موردنیاز

در این بخش تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعد بیان می‌شوند.

تعریف ۱.۲.۱. ماتریس $n \times n$ حقیقی A نامنفی نامیده می‌شود و با $A \geq o$ نشان داده می‌شود، اگر $a_{ij} \geq 0$ برای هر $i, j = 1, \ldots, n$، مثبت نامیده می‌شود و با $A > o$ نشان داده می‌شود، اگر $a_{ij} > 0$ برای هر $i, j = 1, \ldots, n$ و نامثبت نامیده می‌شود و با $A \leq o$ نشان داده می‌شود، اگر $a_{ij} \leq 0$ برای هر $i, j = 1, \ldots, n$.
بردار حقیقی $r = (r_1, \ldots, r_n)^T$ نامنفی نامیده می‌شود و با $r \geq o$ نشان داده می‌شود، اگر $r_i \geq 0$ برای هر i، مثبت نامیده می‌شود و با $r > o$ نشان داده می‌شود، اگر $r_i > 0$ برای هر i و نامثبت نامیده می‌شود و با $r \leq o$ نشان داده می‌شود، اگر $r_i \leq 0$ برای هر i.

تعریف ۲.۲.۱. ماتریس A یک Z-ماتریس است اگر $a_{ij} \leq 0$، برای هر $i \neq j$، $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

تعریف ۳.۲.۱. ماتریس A یک L-ماتریس است اگر $a_{ii} > 0$، $i = 1, 2, \ldots, n$ و $a_{ij} \leq 0$، برای هر $i \neq j$، $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

تعریف ۴.۲.۱. ماتریس A یک M-ماتریس است اگر A یک L-ماتریس باشد و $A^{-1} \geq o$.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. ماتریس مقایسه‌ای A با $\langle A \rangle = (m_{ij})$ نشان داده می‌شود، که در آن

$$m_{ii} = |a_{ii}|, \quad m_{ij} = -|a_{ij}| \qquad (i \neq j).$$

همچنین $|A|$ ماتریسی را نمایش خواهد داد که عناصر آن، قدرمطلق عناصر ماتریس A می‌باشند.

تعریف ۶.۲.۱. ماتریس A یک H-ماتریس است اگر و فقط اگر ماتریس مقایسه‌ای آن یک M-ماتریس باشد.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس حقیقی باشد. نمایش A به صورت $A = M - N$ یک شکاف از A نامیده می‌شود، اگر M نامنفرد باشد. به این شکاف گفته می‌شود:

(۱) همگرا است اگر $\rho(M^{-1}N) < 1$؛

(۲) منظم ضعیف است اگر $M^{-1} \geq o$ و $M^{-1}N \geq o$؛

(۳) منظم است اگر $M^{-1} \geq o$ و $N \geq o$؛

(۴) نامنفی است اگر $M^{-1}N \geq o$؛

(۵) M-شکاف است اگر M یک M-ماتریس نامنفرد باشد و $N \geq o$.

(۶) شکاف گاوس-سایدل است اگر M قسمت پایین مثلثی A و $-N$ قسمت بالا مثلثی اکید A باشند.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید ماتریس ضرایب A را به صورت $A = I - U - L$ شکاف دهیم و B یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های قطری صفر باشد. ماتریس تکرار روش SOR به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}(\omega) = M^{-1}N,$$

که در آن $M = \frac{1}{\omega}(I - \omega U)$ و $N = \frac{1}{\omega}(\omega L + (1 - \omega)I)$. ماتریس‌های

$$B = U + L \qquad \text{و} \qquad \mathcal{L}(\omega) := (I - \omega U)^{-1}\{\omega L + (1 - \omega)I\},$$

به ترتیب از سمت چپ، ژاکوبی پسرو[1] و SOR پسرو نامیده می‌شوند. همچنین به طور خاص به $\mathcal{L}(1)$، ماتریس گاوس-سایدل پسرو گفته می‌شود.

[1] Upper Jacobi

تعریف ۱.۲.۹. فرض کنید ماتریس ضرایب A را به صورت $A = I - L - U$ شکاف دهیم، آنگاه روش تکراری AOR[۲] به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x^{(i+1)} = (I - rL)^{-1}[(1 - w)I + (w - r)L + wU]x^{(i)} + (I - rL)^{-1}wb, \quad i = 0, 1, \ldots$$

بنابراین ماتریس تکرار روش تکراری AOR به صورت زیر خواهد بود:

$$S_{r,w} = (I - rL)^{-1}[(1 - w)I + (w - r)L + wU],$$

در رابطه فوق w و r پارامترهای حقیقی هستند و $w \neq 0$.

تعریف ۱.۲.۱۰. برای $n \geq 2$، یک ماتریس $n \times n$ مختلط A تحویل پذیر است اگر یک ماتریس جایگشت P وجود داشته باشد به طوری که

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ o & A_{2,2} \end{bmatrix}, \tag{۱.۸}$$

که در آن $A_{1,1}$ یک زیرماتریس $r \times r$ و $A_{2,2}$ یک زیرماتریس $(n-r) \times (n-r)$ می‌باشند که $1 \leq r < n$.
اگر این چنین ماتریس جایگشتی وجود نداشته باشد، آنگاه A تحویل ناپذیر است.

تعریف ۱.۲.۱۱. اگر در تعریف ۱.۲.۱۰ زیرماتریس‌های $A_{1,1}$ و $A_{2,2}$ تحویل ناپذیر نباشند، آنگاه ماتریس جایگشت P_1 وجود دارد به طوری که

$$P_1 A P_1^T = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \ldots & R_{1,m} \\ o & R_{2,2} & \ldots & R_{2,m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ o & o & \ldots & R_{m,m} \end{bmatrix}, \tag{۱.۹}$$

که در آن هر زیرماتریس مربعی $R_{j,j}$، $1 \leq j \leq m$ یا تحویل ناپذیر است یا یک ماتریس صفر 1×1 است.
(۱.۹) را شکل نرمال ماتریس تحویل پذیر A می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۲. گراف جهت دار یک جفت به صورت $G = (V, A)$ است که در آن V مجموعه رئوس می‌باشد و مجموعه A، مجموعه زوج‌های مرتب (i, j) از رئوس می‌باشد که رأس i به وسیله یک قوس جهت دار به رأس j متصل شده باشد.

تعریف ۱.۲.۱۳. گراف جهت‌دار ماتریس A با $\phi(A)$ نمایش داده می‌شود. $\phi(A)$ به صورت جفت (V, E) نمایش داده می‌شود، که $V = \{1, \ldots, n\}$ مجموعه رئوس و

$$E = \{(i, j) \mid a_{ij} \neq 0, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

[۲] Accelerated Overrelaxation method

مجموعه کمان‌ها است.

تعریف ۱.۲.۱۴. یک گراف جهت دار با n گره به طور قوی همبند نامیده می‌شود، اگر برای هر زوج مرتب (P_i, P_j) از گره‌ها، $1 \leq i, j \leq n$، یک مسیر جهت دار شامل قوس‌های جهت دار مجاور به صورت زیر

$$\overrightarrow{P_i P_{l_1}}, \overrightarrow{P_{l_1} P_{l_2}}, \ldots \overrightarrow{P_{l_{r-1}} P_j},$$

وجود داشته باشد به طوری که P_i را به P_j متصل کند.

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنید نرم برداری $\|.\|$ مفروض باشد، یک نرم ماتریسی متناظر با این نرم برداری برای ماتریس‌های مربعی می‌توان به صورت زیر تعریف کرد که نرم طبیعی نامیده می‌شود:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

قضیه استین-روزنبرگ ۱.۲.۱۶. ([۲۳]) *اگر ماتریس $B = L+U$ نامنفی باشد (B)، آنگاه برای $B = L+U$ و $H = (I-L)^{-1}U$ دقیقاً یکی از روابط زیر برقرار است:*

(۱) $\rho(H) = \rho(B) = 0$.

(۲) $0 < \rho(H) < \rho(B) < 1$.

(۳) $\rho(H) = \rho(B) = 1$.

(۴) $\rho(H) > \rho(B) > 1$.

قضیه پرون-فربنیوس ۱.۲.۱۷. ([۲۳]) *فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ تحویل ناپذیر باشد. آنگاه:*

(۱) *A یک مقدار ویژه حقیقی مثبت دارد که مساوی شعاع طیفی اش است.*

(۲) *متناظر با $\rho(A)$ یک بردار ویژه $x > o$ وجود دارد و این بردار ویژه را بردار مثبت پرون[۳] می‌نامیم.*

(۳) *$\rho(A)$ افزایش می‌یابد اگر هر درایه A افزایش یابد.*

(۴) *$\rho(A)$ یک مقدار ویژه ساده A است.*

قضیه ۱.۲.۱۸. ([۲۳]) *فرض کنید A یک M-ماتریس $n \times n$ و C ماتریس به دست آمده از صفر قرار دادن برخی از عناصر غیر قطری ماتریس A باشد. آنگاه، C نیز یک M-ماتریس است.*

قضیه ۱.۲.۱۹. ([۲۳]) *فرض کنید $A \geq o$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. آنگاه*

[۳] Perron

(۱) A یک مقدار ویژه حقیقی نامنفی مساوی شعاع طیفی‌اش دارد.

(۲) متناظر با $\rho(A)$ یک بردار ویژه $x \geq o$ وجود دارد.

(۳) $\rho(A)$ کاهش پیدا نمی‌کند اگر هر درایه A افزایش یابد.

قضیه گرشگورین ۲۰.۲.۱. ([۲۳]) فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس مختلط $n \times n$ دلخواه باشد و

$$\Lambda_i \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

آنگاه، تمام مقادیر ویژه λ از A در اجتماع گوی‌هایی به صورت زیر قرار می‌گیرند:

$$|z - a_{ii}| \leq \Lambda_i, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

قضیه ۲۱.۲.۱. ([۲۳]) فرض کنید $A = (a_{ij}) \geq o$ یک ماتریس تحویل ناپذیر $n \times n$ باشد، آنگاه برای هر بردار $x > o$، یکی از دو رابطه زیر برقرار است:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} \right\} < \rho(A) < \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} \right\},$$

یا

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} = \rho(A) \qquad \text{برای هر } 1 \leq i \leq n$$

همچنین:

$$\sup_{x > o} \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} \right\} \right\} = \rho(A) = \inf_{x > o} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} \right\} \right\}.$$

قضیه ۲۲.۲.۱. ([۱]) اگر A یک ماتریس نامنفی باشد، آنگاه:

(۱) اگر برای برداری نامنفی مانند x، داشته باشیم $Ax \geq \alpha x$ و $x \neq o$ آنگاه $\rho(A) \geq \alpha$.

(۲) اگر برای بردار مثبتی مانند x، داشته باشیم $Ax \leq \beta x$، آنگاه $\rho(A) \leq \beta$. بعلاوه اگر A تحویل ناپذیر باشد و اگر برای بردار نامنفی مانند x داشته باشیم $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$، $\alpha x \neq Ax$ و $Ax \neq \beta x$، آنگاه $\alpha < \rho(A) < \beta$ و x یک بردار مثبت است.

قضیه ۲۳.۲.۱. ([۲۱]) برای هر ماتریس مرتبه n و هر مقدار دلخواه $\varepsilon > 0$ یک نرم طبیعی $\|A\|$ می‌توان یافت به طوری که

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

لم ۲۴.۲.۱. ([۵]) فرض کنید $A_۱, A_۲ \in \mathbb{R}^{n,n}$ و $A_i = M_i - N_i$ ، $i = ۱,۲$ ، شکاف‌های نامنفی باشند (یعنی $T_i = M_i^{-۱} N_i \geq o$ ، $i = ۱,۲$). اگر بردار ویژه پرون $z_۲$ $(z_۲ \geq o)$ ، از $T_۲$ در $T_۱ z_۲ \leq T_۲ z_۲$ صدق کند آنگاه $\rho(T_۱) \leq \rho(T_۲)$.

لم ۲۵.۲.۱. ([۱]) فرض کنید $A^{-۱} \geq o$ و $A = M_۱ - N_۱ = M_۲ - N_۲$ دو شکاف منظم ضعیف A باشند. اگر $M_۱^{-۱} \leq M_۲^{-۱}$ و $N_۱ \geq o$ ، آنگاه $\rho(M_۱^{-۱} N_۱) \geq \rho(M_۲^{-۱} N_۲)$.

لم ۲۶.۲.۱. ([۱]) فرض کنید A یک Z- ماتریس باشد. آنگاه عبارات زیر معادل هستند:

(۱) A یک M- ماتریس نامنفرد است.

(۲) یک بردار مثبت x وجود دارد به طوری که $Ax > o$. عبارت $Ax > o$ بدین معنی است که تمام عناصر Ax مثبت هستند.

(۳) هر زیر ماتریس اصلی A یک M- ماتریس نامنفرد است.

(۴) تمام مینورهای اصلی مثبت هستند.

لم ۲۷.۲.۱. ([۱]) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ بوده و $A = M - N$ یک شکاف منظم ضعیف باشد. آنگاه $\rho(M^{-۱}N) < ۱$ اگر و فقط اگر $A^{-۱} \geq o$.

نتیجه ۲۸.۲.۱. اگر $A = I - L - U$ یک M- ماتریس باشد، آنگاه برای ماتریس ژاکوبی $B = L + U$ داریم $\rho(B) < ۱$.

لم ۲۹.۲.۱. ([۲۳]) فرض کنید $A = M_۱ - N_۱ = M_۲ - N_۲$ دو شکاف منظم از A باشند و $A^{-۱} \geq o$. اگر $N_۲ \geq N_۱ \geq o$ ، آنگاه

$$\circ \leq \rho(M_۱^{-۱} N_۱) \leq \rho(M_۲^{-۱} N_۲) < ۱.$$

بعلاوه، اگر $A^{-۱} > o$ و اگر $N_۲ \geq N_۱ \geq o$ ، در صورتی که تساوی رخ ندهد، آنگاه داریم:

$$\circ < \rho(M_۱^{-۱} N_۱) < \rho(M_۲^{-۱} N_۲) < ۱.$$

لم ۳۰.۲.۱. ([۲۳], [۶]) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند به طوری که $o \leq |B| \leq A$. آنگاه $\rho(B) \leq \rho(A)$.

لم ۳۱.۲.۱. ([۶]) ماتریس A یک H- ماتریس است اگر و فقط اگر یک بردار $r > o$ وجود داشته باشد، به طوری که $\langle A \rangle r > o$.

لم ۳۲.۲.۱. ([۶]) $A = I - B$ یک H-ماتریس است اگر و فقط اگر $\rho(|B|) < ۱$.

لم ۳۳.۲.۱. ([۷]) اگر A یک H-ماتریس باشد، آنگاه $\rho(A) < ۲ \max_i |a_{ii}|$.

لم ۳۴.۲.۱. ([۶]) اگر A یک ماتریس نامنفی $n \times n$ باشد، آنگاه

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_i \sum_j a_{ij}.$$

لم ۳۵.۲.۱. فرض کنید a، b، c و d ثابت باشند با $|c| + |d| \neq ۰$. در این صورت

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right) = \operatorname{sign}(ad - bc). \tag{۱۰.۱}$$

برهان. نتیجه مورد نظر از $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^۲}$ و فرض $|c| + |d| \neq ۰$ حاصل می‌شود.
□

لم ۳۶.۲.۱. ([۲۳]) ماتریس A تحویل‌ناپذیر نامیده می‌شود، اگر گراف جهت‌دار وابسته به A، به‌طور قوی همبند باشد.

لم ۳۷.۲.۱. ([۱۶]) فرض کنید T یک ماتریس $n \times n$ باشد، همچنین فرض کنید $x > o$ به طوری که $\alpha x - Tx \geq o$. آنگاه $\rho(T) \leq \alpha$ خواهد بود. همچنین اگر $\alpha x - Tx > o$، آنگاه $\rho(T) < \alpha$.

لم ۳۸.۲.۱. ([۲۳]) اگر $A = (a_{ij}) \geq o$ یک ماتریس تحویل ناپذیر $n \times n$ باشد، آنگاه یکی از دو رابطه زیر برقرار است:

$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} = \rho(A), \qquad \text{برای هر } ۱ \leq i \leq n$$

یا

$$\min_{۱\leq i\leq n}\left(\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\right) < \rho(A) < \max_{۱\leq i\leq n}\left(\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\right).$$

لم ۳۹.۲.۱. ([۲۳]) فرض کنید $A = D - L - U$ یک ماتریس تحویل ناپذیر باشد به قسمی که

(۱) $a_{ii} > ۰$ به ازای $i = ۱, \ldots, n$.

(۲) $a_{ij} \leq ۰$ به ازای $i \neq j$، $i, j = ۱, \ldots, n$.

آنگاه A یک M-ماتریس است اگر و فقط اگر برای ماتریس ژاکوبی $B = I - D^{-۱}A$ داشته باشیم $\rho(B) < ۱$.

فصل ۲
تعمیم پیش شرط ایوانس

ایوانس و همکارانش[۱] [۲] در راستای بهبود روش تکراری AOR، ماتریس پیش شرطی به صورت ذیل ارائه نمودند:

$$P = I + S = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \dots & -a_{۱n} \\ ۰ & ۱ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۱ \end{bmatrix} \tag{۱.۲}$$

لازم به ذکر است، روش AOR پیش شرط شده عملکردی بهتر از روش AOR پیش شرط نشده داشت. در مقاله [۲۵]، پیش شرط (۱.۲) در راستای بهبود سرعت همگرایی روش‌های ژاکوبی و گاوس–سایدل به صورت تعمیم یافته ذیل پیشنهاد شد:

$$P(\alpha) = I + S(\alpha) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \dots & -\alpha a_{۱n} \\ ۰ & ۱ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۱ \end{bmatrix} \tag{۲.۲}$$

در ادامه این فصل، پیش‌شرط (۲.۲) مورد بررسی قرار خواهد گرفت. لازم به تاکید است، ماتریس ضرایب دستگاه خطی (۱.۱) در این مقاله به صورت M–ماتریس فرض شده که در این فصل نیز به همین منوال در نظر گرفته خواهد شد.

۱.۲ تحلیل همگرایی

با اعمال $P(\alpha)$ تعریف شده در (۲.۲) بر دستگاه خطی (۱.۱) می‌توان نوشت:

$$\widetilde{A}(\alpha)x = \tilde{b}(\alpha), \tag{۳.۲}$$

[۱] Evans et al.

که در آن:

$$\widetilde{A}(\alpha) = (I + S(\alpha))A, \qquad \tilde{b}(\alpha) = (I + S(\alpha))b. \tag{۴.۲}$$

همچنین در صورت نیاز می‌توان نوشت:

$$\widetilde{A}(\alpha) = \widetilde{D}(\alpha) - \widetilde{L}(\alpha) - \widetilde{U}(\alpha), \tag{۵.۲}$$

که در آن $\widetilde{D}(\alpha)$ قطری است و $\widetilde{L}(\alpha)$ و $\widetilde{U}(\alpha)$ ماتریس‌های پایین و بالامثلثی اکید هستند.

با توجه به روابط (۴.۱) و (۴.۲) می‌توان نوشت:

$$\widetilde{A}(\alpha) = I - L - U + S(\alpha) - S(\alpha)L - S(\alpha)U, \tag{۶.۲}$$

که در آن $S(\alpha)U = o$. عناصر $\tilde{a}_{ij}(\alpha)$ از $\widetilde{A}(\alpha)$ با عبارات زیر ارائه می‌شوند:

$$\tilde{a}_{ij}(\alpha) = \begin{cases} a_{ij}, & ۲ \leq i \leq n, \\ (۱-\alpha)a_{۱n}, & i = ۱,\ j = n, \\ a_{۱j} - \alpha a_{۱n}a_{nj}, & i = ۱,\ j \neq n. \end{cases} \tag{۷.۲}$$

چون A یک M-ماتریس است با توجه به لم ۲۶.۲.۱، تمام مینورهای اصلی A مثبت هستند. بنابراین $۰ \leq a_{n۱}a_{۱n} < ۱$. اگر $۰ \leq \alpha \leq ۱$ باشد، آنگاه بنابر (۷.۲)، $\tilde{a}_{ii}(\alpha) > ۰$ به ازای $i = ۱, \ldots, n$ و $\tilde{a}_{ij}(\alpha) \leq ۰$ به ازای $i \neq j$ و $i, j = ۱, \ldots, n$. بنابراین $\widetilde{A}$ یک L-ماتریس است.

با توجه به مطالب فوق، برای $\alpha \in [۰, ۱]$، ماتریس‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} D_\alpha &:= \operatorname{diag}(\alpha a_{۱n}a_{n۱}, ۰, \ldots, ۰), \\ S(\alpha)L &= (P(\alpha) - I)L := D_\alpha + U_\alpha. \end{aligned} \tag{۸.۲}$$

که در آن U_α از عناصر بالامثلثی اکید $S(\alpha)L$ تشکیل می‌شود. با توجه به این که $S(\alpha)U = o$ و با توجه به روابط (۶.۲) و (۸.۲)، سه ماتریس سمت راست (۵.۲) به صورت زیر هستند:

$$\widetilde{D}(\alpha) = I - D_\alpha, \qquad \widetilde{L}(\alpha) = L, \qquad \widetilde{U}(\alpha) = U - S(\alpha) + U_\alpha. \tag{۹.۲}$$

که عناصر قطری $\widetilde{D}(\alpha)$ مثبت بوده و ماتریس های $\widetilde{L}(\alpha)$ و $\widetilde{U}(\alpha)$ نامنفی هستند.

اگر شکاف‌های زیر در نظر گرفته شوند:

$$\widetilde{A}(\alpha) = \begin{cases} M(\alpha) - N(\alpha) = (I + S(\alpha)) - (I + S(\alpha))(L + U), \\ M'(\alpha) - N'(\alpha) = I - (U - S(\alpha) + U_\alpha + D_\alpha + L), \\ M''(\alpha) - N''(\alpha) = (I - D_\alpha) - (U - S(\alpha) + U_\alpha + L). \end{cases} \tag{۱۰.۲}$$