دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض - آنالیز ریاضی

عنوان

بررسی دوگان قاب‌های فیوژن

اساتید راهنما

دکتر محمد حسن فاروقی

دکتر اصغر رنجبری

پژوهشگر

ژاله امان زاده

شهریور۸۸

نام‌خانوادگی: امان‌زاده نام: ژاله

عنوان پایاننامه: بررسی دوگان قاب‌های فیوژن

اساتید راهنما: دکتر محمد حسن فاروقی

دکتر اصغر رنجبری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۸۸

تعداد صفحه: ۹۲

کلید واژه: فضای هیلبرت، قاب، دوگان قاب، قاب فیوژن.

چکیده:

این پایاننامه برگرفته از مقاله زیر است:

"*P. Găvruța , On the duality of fusion frames, J. Math. Anal. Appl. 333 (2007) 871-879.*"

هرگاه $\{V_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیرفضاهای بسته فضای هیلبرت H بوده و $\{v_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از وزن‌ها باشد که به ازای هر i متعلق به I، $v_i > 0$، خانواده $\mathcal{V} = \{(V_i, v_i)\}_{i\in I}$ را یک قاب فیوژن گوییم هرگاه ضرایب ثابت $0 < C \leq D < \infty$ موجود باشند به طوری که به ازای هر f متعلق به H، $C\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} {v_i}^2 \left\|\pi_{V_i} f\right\|^2 \leq D\|f\|^2$. π_{V_i} تصویرمتعامد H روی زیرفضای بسته V_iرا نشان می‌دهد. ضرایب ثابت C و D را کران‌های قاب فیوژن $\mathcal{V}$ گوییم. عملگر قاب فیوژن $S_{\mathcal{V}}$ را برای هر $\mathcal{V}$ به ازای هر f متعلق به H به صورت $S_{\mathcal{V}} f = \sum_{i\in I} {v_i}^2 \pi_{V_i} f$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که اگر $T: H \to H$ عملگری معکوس‌پذیر روی H باشد، $\{(TV_i, v_i)\}_{i\in I}$ نیز یک قاب فیوژن با کران‌های $\frac{C}{\|T^*\|^2\left\|{T^*}^{-1}\right\|^2}$ و $D\|T^*\|^2\left\|{T^*}^{-1}\right\|^2$ است. اگر در تعریف قاب فیوژن تنها کران بالای D موجود باشد دنباله $\{(V_i, v_i)\}_{i\in I}$ را یک دنباله بسل فیوژن می‌گوییم. عملگر S_{VW} برای دنباله‌های بسل فیوژن $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ برای هر f متعلق به H به شکل $S_{VW} f = \sum_{i\in I} v_i w_i \pi_{V_i} \pi_{W_i} f$ معرفی می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که S_{VW} از پایین کران‌دار است اگر و تنها اگر برای هر تجزیه همانی $\{T_i\}_{i\in I}$، $K \in L(H)$ای موجود باشد که برای هر $i \in I$، $T_i = v_i w_i K \pi_{V_i} \pi_{W_i}$.

هرگاه $\lambda_1 < 1$ و $\lambda_2 > -1$ موجود باشند به طوری که برای هر f متعلق به H،

$$\left\|f - \sum_{i\in I} v_i w_i \pi_{V_i} \pi_{W_i} f\right\| \leq \lambda_1 \|f\| + \lambda_2 \left\|\sum_{i\in I} v_i w_i \pi_{V_i} \pi_{W_i} f\right\|,$$

آنگاه ثابت می‌کنیم که $\mathcal{W}$ یک قاب فیوژن است و به ازای هر f متعلق به H،

$$\left(\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2}\right)^2 \frac{1}{D_1} \|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} {w_i}^2 \left\|\pi_{W_i} f\right\|^2.$$

فهرست مطالب:

مقدمه و پیشینه پژوهشی

مقدمه

این پایاننامه برگرفته از مقاله

"On the duality of fusion frames, J. Math. Anal. Appl. 333 (2007) 871-879."

نوشته " *P. Găvruța*" است.

در این بخش به تاریخچه‌ای مختصر از پیدایش قاب‌ها می‌پردازیم و مقدمه‌ای کوتاه از تئوری قاب‌ها و قاب‌های فیوژن را بیان می‌کنیم.

مقدمه‌ای کوتاه از تاریخچه پیدایش و تئوری قاب

تبدیلات فوریه بیش از یک قرن به عنوان ابزار اساسی آنالیز ریاضی به حساب می‌آمدند، اما تبدیلات فوریه در مورد سیگنال‌هایی که طی مدتی بخشی از اطلاعاتشان را از دست می‌دادند، ایرادی عمده داشت. در نتیجه نیاز به ابزاری جدیدی بود تا جایگزین آن شود.

در سال ۱۹۴۶ گابور *(Gabor)* با بدست آوردن یک تقریب اساسی از تجزیه سیگنال در مفهوم مقدماتی، این ایراد را رفع کرد. این تقریب گابور به سرعت به یک نمونه بارز برای آنالیز طیفی مربوط به زمان – تناوب تبدیل شد. امروزه نیز این ایده گابور کاربردهای فراوانی دارد.

مفهوم قاب برای یک فضای هیلبرت به طور رسمی در سال ۱۹۵۲ برای مطالعه برخی مسایل عمیق روی سری های فوریه غیرتوافقی توسط دافین*(Duffin)* و شافر*(Schaeffer)* معرفی شد. دافین و شافر به طور اساسی اندیشه اصلی گابور را در مورد پردازش سیگنال به طور مجرد مورد مطالعه قرار دادند. اگرچه به نظر نمی‌رسید که ایده دافین و شافر علاقه زیادی را برای مطالعه خارج از سری‌های فوریه ایجاد کند، اما مقاله

دابچیس*(Daubechies)*،گراسمان*(Grossmann)* و میر*(Meyer)* در سال ۱۹۸۶ در مورد این ایده نقطه عطفی برای آن شد.

بعد از این کار بزرگ تئوری قاب‌ها شروع به رشد کرد و به طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفت.

در گذشته قاب‌ها به طور سنتی در پردازش‌سیگنال، پردازش تصویر، فشردگی داده‌ها و تئوری نمونه‌گیری مورد استفاده قرار می‌گرفتند. اما امروزه قاب‌ها کاربردهای جدیدی دیگری نظیر اپتیک، تئوری بانک‌های فیلتر و بازیابی‌سیگنال نیز پیدا کرده‌اند.

در واقع قاب‌ها به عنوان ابزار قدرتمندی در تئوری فضای باناخ و تئوری عملگرها معرفی شده است تا نتایج قوی حاصل از این تئوری‌ها توسط تئوری قاب‌ها مطالعه شوند.

مقدمه‌ای از تئوری قاب

طی ۲۰ سال گذشته پیدایش کاربردهای جدید از قاب‌ها باعث شده است تا تئوری قاب‌ها به سرعت رشد کند. پردازش‌سیگنال، پردازش تصویر، فشردگی داده‌ها و تئوری نمونه‌گیری نمونه‌هایی از کاربردهای متداول و سنتی از قاب‌ها هستند.

امروزه قاب‌ها اثرات مضر ارتباطات مبنا - بسته را کاهش داده‌اند و در نتیجه انتقال حجم بسیار وسیعی از داده‌ها گسترده شده است.

برای استفاده از کاربردهای جدید پدیدار شده از قاب‌ها نیاز داریم که روش‌های جدیدی برای ساختن قاب‌ها بدست آوریم. یک نقطه شروع برای استفاده از این کاربردها این است که ابتدا قاب‌ها را موضعی کنیم و سپس آن‌ها را برای ساختن قاب‌هایی برای کل فضا با هم ترکیب کنیم. سود استفاده از این روش، تسهیل در ساخت

قاب‌ها برای کاربردهایی خاص است. بنابراین ساختاری که ما را به ساختن قاب‌هایی با خواص ویژه برای کل فضا هدایت کند، وجود دارد.

در واقع به کمک تقریب‌های گوناگون خانواده‌ای از بردارها را گردآوری می‌کنیم که این خانواده یک قاب برای کل فضا بوجود می‌آورد. کار اصلی که دافین و شافر سال‌ها پیش انجام داده بودند، گردآوری چنین خانواده‌ای از بردارها بود که یک قاب برای کل فضا بوجود می‌آورد.

تقریب گردآوری کردن دنباله‌های غیرقاب، برای ساختن یک قاب برای کل فضا تقریبی بود که به خوبی درمورد موجک‌ها درحالت گابور استفاده شد.

اخیرا تقریب دیگری نیز توسط فارنیسر*(Fornasier)* معرفی شده است. فارنیسر از زیرفضاهایی که شبه‌متعامد هستند، برای ساختن قاب‌های موضعی و گردآوری آن‌ها برای بدست آوردن قاب‌های کلی استفاده کرده است.

مقدمه‌ای از تئوری قاب‌های فیوژن

در ادامه این بخش برای بیان تئوری قاب‌های فیوژن شبکه‌های حسگر را به عنوان مثال اصلی این تئوری در نظر می‌گیریم. هدف ما توسعه شبیه سازی ساختار شبکه‌های حسگر است که این شبیه سازی یک تئوری ریاضی به حساب می‌آید.

موارد استفاده تئوری قاب‌های فیوژن بیشتر توضیح شبیه‌سازی رفتار سلول‌های عصبی مغز هنگام پردازش و ذخیره کردن اطلاعات و بدست آوردن چرخه پردازشی کارآمد و موثر برای مجموعه‌ای بزرگ از داده‌ها است.

مثلا در بعضی شبکه‌های حسگر بی‌سیم، حسگرهایی با ظرفیت و قدرت محدود گاهی در یک ناحیه به بزرگی یک جنگل برای اندازه گیری فاکتورهایی نظیر دما، صدا، لرزه، فشار، حرکت و آلاینده‌ها پخش می‌شوند. در

بعضی کاربردهای دیگر نیز حسگرهای بی‌سیم در یک ناحیه جغرافیایی پخش می‌شوند تا مشخصه‌های شیمیایی، بیولوژیکی، رادیولوژیکی و مواد هسته‌ای این ناحیه را کشف کنند. در نتیجه چنین حسگرهایی نوعی مازاد هستند و در میان این چنین حسگرهایی، حسگرهای متعامد وجود ندارند. به این ترتیب، هر حسگر به عنوان عضوی از یک قاب برای دستگاه عمل می‌کند.

دلایل اصلی که حسگرها اکثرا در هر کاربردی از تئوری قاب‌های فیوژن به کار گرفته می‌شوند، این است که حسگرها در هر پردازشی دارای قید و بندهای شدید و سختی هستند که اغلب برای داشتن حداکثر قدرت به دقت اندازه‌گیری و بررسی می‌شوند.

در نتیجه دسته بزرگی از شبکه‌های حسگر شبکه را به زیرشبکه هایی تقسیم می‌کنند تا شبکه را به صورت یک مجموعه از زیرفضاها شکل دهند. در چنین شبکه‌های حسگری هدف اولیه داشتن یک اندازه گیری موضعی از داده‌های انتقال داده شده یک زیرفضا از فضای ترکیبی در طول یک ایستگاه موضعی است. یک دستگاه حسگر بی‌عیب و نقص باید در هر کاربردی تعدادی از این گونه مراکز پردازش موضعی را داشته باشد، که وظیفه آن‌ها به عنوان تقویت کننده ایستگاه‌ها، جمع‌آوری اطلاعات گردآوری شده بیشتر برای ارائه به ایستگاه پردازش مرکزی جهت بازسازی نهایی است.

دستگاه قاب فیوژن به طور کامل برای شبیه‌سازی شبکه‌های‌حسگر ایجاد شده است.

حسگرها در هر شبکه‌ای به عنوان بردارهای قاب شبیه‌سازی می‌شوند تا هر قاب را برای یک زیرفضا در فضای هیلبرت شکل دهند. مثلا زیرفضاها باید زیرشبکه ای با خواص انطباقی مشخص را بوجود آورند. در واقع این شرایط هنگامی که با فضاهای هیلبرت با بعد متناهی سر وکار خواهیم داشت، همواره برآورده خواهد شد. بازسازی مجموعه‌های متناهی از زیرفضاها در چنین سیستم‌هایی در دستگاه‌هایی با دو لایه پردازشی به نام دستگاه قاب‌فیوژن انجام می‌پذیرد. در واقع زیرفضاها به عنوان قاب‌های بازسازی شده به کار می‌روند و این

بازسازی موضعی به عنوان پیش‌درآمدی برای قاب‌های فیوژن بازسازی شده به کار گرفته می‌شود تا سیگنال ابتدایی را به طور کامل بازسازی کند.

در بخش اول از فصل اول به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی به کار رفته در پایاننامه می‌پردازیم.

بخش دوم از فصل اول به تعاریف و قضایای قاب‌ها اختصاص دارد.

در بخش سوم از فصل اول تعاریف و قضایای قاب‌های فیوژن مطالعه می‌شود.

در بخش اول از فصل دوم قضایا و خواصی از قاب‌ها ذکر شده است.

در بخش دوم از فصل دوم به قضایا و خواصی از قاب‌های فیوژن اشاره می‌کنیم.

در بخش سوم از فصل دوم با یک مثال نشان خواهیم داد که رابطه $\pi_{TV_i} = T\pi_{V_i}T^{-1}$ همواره درست نیست و شرایطی را بررسی می‌کنیم که رابطه فوق درست باشد. در ادامه این بخش قضایایی در مورد قاب فیوژن بودن گردایه $\{(TV_i , v_i)\}_i$ مطرح خواهد شد.

در بخش چهارم از فصل دوم قضایایی در مورد دوگان قاب‌ها و دوگان قاب‌های فیوژن آورده شده است.

در بخش اول از فصل سوم به معرفی عملگری می‌پردازیم که زوجی از دنباله‌های بسل فیوژن را به هم مرتبط می‌سازد.

در بخش دوم از فصل سوم قضایایی از تجزیه‌های همانی مطرح شده است.

بخش سوم از فصل سوم به معرفی اغتشاش و اغتشاش‌موضعی می‌پردازد.

بخش چهارم از فصل سوم به چند گزاره از اغتشاشات اختصاص دارد.

فصل اول

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف(۱.۱.۱): فرض کنیم که A و B دو مجموعه دلخواه باشند. هرگاه یک نگاشت یک به یک از A بروی B موجود باشد گوییم A با B همعدد (هم‌ارز یا در تناظر یک به یک) است و با نماد $A \sim B$ نشان می‌دهیم.

تعریف(۲.۱.۱): به ازای nای دلخواه و متعلق به مجموعه اعداد طبیعی مجموعه $\mathbb{N}_n = \{1,2,3,\dots,n\}$ را *قطعه ای از اعداد طبیعی* می‌نامیم.

تعریف(۳.۱.۱): مجموعه A را *متناهی* گوییم هرگاه A تهی باشد و یا به ازای nای متعلق به اعداد طبیعی $A \sim \mathbb{N}_n$

تعریف(۴.۱.۱): مجموعه A را *شمارا* گوییم هرگاه $A \sim \mathbb{N}$.

تعریف(۵.۱.۱): میدان F مفروض است. مجموعه ناتهی H را با دو عمل جمع و ضرب اسکالر زیر در نظر می‌گیریم:

$$+: H \times H \to H \qquad (x,y) \mapsto x+y$$

و

$$.: F \times H \to H \qquad (\alpha,y) \mapsto \alpha.y$$

H را یک *فضای‌برداری* یا *فضای‌خطی* روی میدان F می‌نامیم هرگاه به ازای هر x و y متعلق به H و به ازای هر α و β متعلق به F شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$،

ب) $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$،

پ) $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$،

ت) $x.1=x$.

نکته(۶.۱.۱): اگر در تعریف ۵.۱.۱ میدان $F=\mathbb{C}$ باشد، فضای‌برداری H را *فضای‌برداری مختلط* می‌نامیم.

تعریف(۷.۱.۱): فرض کنیم که H یک فضای‌برداری روی میدان F باشد، زیرمجموعه E از H را یک *زیرفضای برداری* از H می‌نامیم هرگاه E با اعمال جمع و ضرب اسکالر روی H خود یک فضای‌برداری باشد.

تعریف(۸.۱.۱): مجموعه ناتهی X مفروض است. یک متر روی X تابعی مانند $d:X \times X \to \mathbb{R}^+$ است به طوری که به ازای هرx و y و z متعلق به X خواص زیر برقرار باشند:

الف) $d(x\,,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$،

ب) $d(x\,,y) = d(y,x)$،

پ) $d(x\,,y) \le d(x\,,z) + d(z\,,y)$.

تعریف(۹.۱.۱): مجموعه ناتهی X با متر d را *فضای‌متریک* می‌نامیم و با نماد (X,d) نمایش می‌دهیم.

تعریف(۱۰.۱.۱): فضای‌برداری مختلط H را یک *فضای ضرب‌داخلی* می‌نامیم هرگاه به ازای هر زوج مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند $\langle x\,,y\rangle$ به نام حاصل ضرب‌داخلی (حاصل ضرب عددی) مربوط به x و y چنان موجود باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

آ) به ازای هرx و y متعلق به H

$$\langle y,x\rangle = \overline{\langle x\,,y\rangle},$$

ب) به ازای هرx و y وz متعلق به H

$$\langle x+y,z\rangle = \langle x\,,z\rangle + \langle y,z\rangle,$$

پ) به ازای هر x و y متعلق به H و به ازای هر α متعلق به $\mathbb{C}$

$$\langle \alpha x , y\rangle = \alpha\langle x , y\rangle,$$

ت) به ازای هر x متعلق به H

$$\langle x , x\rangle \geq 0,$$

ث) به ازای هر x متعلق به H

$$\langle x, x\rangle = 0. \quad \text{اگر تنها و اگر} \quad x = 0$$

نکته(۱۱.۱.۱): بند (پ) تعریف ۱۰.۱.۱ با فرض $\alpha = 0$ و به ازای هر y متعلق به H ایجاب می‌کند که

$$\langle 0, y\rangle = 0.$$

ترکیب قسمت (ب) و (پ) در ۱۰.۱.۱ به ازای هر y متعلق به H بیان می‌کند که نگاشت $x \mapsto \langle x, y\rangle$ یک تابعک خطی روی H است.

قسمت‌های (آ) و (پ) ۱۰.۱.۱ نشان می‌دهند که $\langle x , \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x , y\rangle$.

و بندهای (آ) و (ب) ۱۰.۱.۱ بیانگر قانون دوم پخش‌پذیری به صورت زیر هستند:

$$\langle z , x + y\rangle = \langle z , x\rangle + \langle z , y\rangle.$$

نکته(۱۲.۱.۱): هر فضای ضرب‌داخلی را می‌توان با تعریف نرم به شکل $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ نرم‌دار کرد.

قضیه(۱۳.۱.۱) نامساوی کوشی – شوارتز: هرگاه H یک فضای ضرب‌داخلی باشد، به ازای هر دو بردار x و y متعلق به H

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

اثبات: اگر $x=0$ نامساوی فوق بدیهی است. اگر $x\neq 0$ قرار می‌دهیم $c = y - \frac{\langle y,x\rangle}{\|x\|^2}x$.

دراین صورت $\langle c, x\rangle = 0$.

داریم:

$$0 \leq \|c\|^2 = \langle y - \frac{\langle y,x\rangle}{\|x\|^2}x \, , y - \frac{\langle y,x\rangle}{\|x\|^2}x\rangle$$

$$= \langle y, y\rangle - \frac{\langle y,x\rangle\langle x\,,y\rangle}{\|x\|^2}$$

$$= \|y\|^2 - \frac{|\langle x\,,y\rangle|^2}{\|x\|^2}.$$

از این رو،

$$0 \leq \|y\|^2 - \frac{|\langle x\,,y\rangle|^2}{\|x\|^2}$$

لذا نتیجه می‌شود:

$$|\langle x, y\rangle\,|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2. \square$$

قضیه(۱۴.۱.۱) (نامساوی مثلثی): اگر H یک فضای‌ضرب‌داخلی باشد به ازای هر دو بردار x و y متعلق به H داریم:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

اثبات: با استفاده از تعریف نرم داریم:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y\,, x + y\rangle$$

$$= \langle\, x\,, x\rangle + \langle x\,, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2Re\langle x , y\rangle + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2. \square$$

تعریف(۱.۱. ۱۵): فضای‌متریک H را *کامل* گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در H به نقطه‌ای از آن همگرا باشد.

تعریف(۱.۱.۱۶): فضای‌برداری مختلط H را یک *فضای‌هیلبرت* گوییم هرگاه:

آ) یک فضای‌متریک با متر حاصل از $\|x\| = \langle x , x\rangle^{1/2}$ باشد،

ب) کامل باشد.

تعریف(۱.۱.۱۷): هرگاه $\langle x , y\rangle = 0$ گوییم x به y *متعامد* است و نماد $x \perp y$ را به کار می‌بریم.

$\langle x , y\rangle = 0$ ایجاب می‌کند که $\langle y, x\rangle = 0$ و این نشان می‌دهد که رابطه $\perp$ متقارن است.

تعریف(۱.۱.۱۸): اگر E زیرفضایی از H باشد مجموعه متمم *متعامد* E را با نماد $E^{\perp}$ نمایش می‌دهیم و $E^{\perp}$ را مجموعه بردارهایی از H تعریف می‌کنیم که بر هر بردار E عمود هستند.

نکته(۱.۱. ۱۹): الف) یادآوری می‌کنیم که $x^{\perp}$ یک زیرفضا از فضای‌هیلبرت H است. زیرا هرگاه $x \perp y$ و $x \perp \acute{y}$ ایجاب می‌کند که $x \perp y + \acute{y}$ و $x \perp \alpha y$.

ب) $x^{\perp}$ مجموعه‌ای از نقاط است که تابع پیوسته $y \mapsto \langle x , y\rangle$ را صفر می‌کند.

پ) حال اگر M زیرفضایی از H باشد، دراین صورت $M^{\perp} = \bigcap_{x\in M} x^{\perp}$. $M^{\perp}$ به عنوان اشتراک مجموعه های بسته $x^{\perp}$ خود بسته است. بنابراین $M^{\perp}$ نیز یک زیرفضای بسته از H می‌باشد.

قضیه(۲۰.۱.۱): هرگاه M یک زیرفضای بسته، ناتهی و محدب از H باشد، M شامل یک عضو یکتا با کوچکترین نرم است. به عبارت دیگر یک و تنها یک عضو مانند $x_1 \in M$ موجود است به طوری که به ازای هر x از M داشته باشیم:

$$\|x_1\| \leq \|x\|.$$

اثبات: برای اثبات قضیه به صفحه ۷۹ قضیه ۱۰.۴ از منبع [۲۲] مراجعه کنید.□

قضیه(۲۱.۱.۱): هرگاه M یک زیرفضای بسته از فضای‌هیلبرت H باشد:

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم که اشتراک M و $M^{\perp}$، $\{0\}$ است. برای این منظور فرض می‌کنیم که $x \in M^{\perp}$ و $x \in M$، آنگاه $\langle x , x\rangle = 0$ لذا $x = 0$ پس $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

اگر $x \in H$ قضیه ۲۰.۱.۱ را بر مجموعه $x - M$ اعمال می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که $x_1 \in M$ای وجود دارد به طوری که عبارت $\|x - x_1\|$ را مینیمال می‌سازد.

قرار می‌دهیم $x_2 = x - x_1$. در این صورت به ازای هر $y \in M$:

$$\|x_2\| \leq \|x_2 + y\|$$

لذا از گزاره ۲.۱۲ از منبع [۲۲] نتیجه می‌گیریم که $x_2 \in M^{\perp}$.

چون x به صورت $x = x_2 + x_1$ است. پس نشان دادیم که $H = M \oplus M^{\perp}$.□

لم(۲۲.۱.۱): $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

اثبات: فرض کنیم که $A \subseteq B$ و y عضو دلخواهی از $B^{\perp}$ باشد. به ازای هر عضو دلخواه b از B داریم:

$$\langle b\,, y\rangle = 0$$

لذا طبق فرض به ازای هر a متعلق به A

$$\langle a\,, y\rangle = 0$$

در نتیجه y متعلق به $A^{\perp}$ است.

عکس لم نیز مشابها ثابت می‌شود.□

تعریف(۲۳.۱.۱): هرگاه H و K فضاهای برداری دلخواهی بوده و تبدیل خطی $T{:}H\to K$ باشد،

مجموعه $\{x \in H|\ \ Tx = 0\}$ را *فضای پوچ* (هسته) T گوییم و با نماد N_T نشان می‌دهیم.

مجموعه $\{y \in K|\exists x \in H \quad s.t. \quad Tx = y\}$ را برد T می‌نامیم و به صورت R_T نمایش می‌دهیم.

از این پس فرض می‌کنیم که H و K دو فضای‌هیلبرت با ضرب‌های داخلی $\langle,\rangle_H$ و $\langle,\rangle_K$ و نرم‌های $\|.\|_H$ و $\|.\|_K$ باشند و $T: H \to K$ تعریف شده باشد، مگر خلاف آن ذکر شود.

حال تعاریف زیر را داریم:

تعریف(۲۴.۱.۱): نگاشت دلخواه $T: H \to K$ را *خطی* گوییم هرگاه به ازای هر x و y متعلق به H و به ازای هر عدد α و β متعلق به $\mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

تعریف(۲۵.۱.۱): نگاشت $T: H \to K$ را یک به یک گوییم هرگاه به ازای هر x و y متعلق به H، اگر $x \neq y$ آنگاه $Tx \neq Ty$.

تعریف(۲۶.۱.۱): نگاشت $T: H \to K$ را *پوشا* گوییم هرگاه $R_T = K$.

تعریف(۲۷.۱.۱): نگاشت $T: H \to K$ مفروض است، *نرم نگاشت*T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = Sup_{\|x\|=1}\|Tx\| = Sup_{\substack{x\in H \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

تعریف(۲۸.۱.۱): الف) نگاشت $T: H \to K$ را *کران‌دار* می‌گوییم هرگاه $\|T\| < \infty$.

ب) نگاشتT *از پایین کران‌دار* است هرگاه $c > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر f متعلق به H

$$\|Tf\| \geq c\|f\|.$$

نکته(۲۹.۱.۱): عملگر خطی T کران‌دار است اگر و تنها اگر پیوسته باشد.

اثبات: اثبات در منبع [۴] آورده شده است.□

تعریف(۳۰.۱.۱): عملگر خطی و کران‌دار T را *مثبت* گوییم هرگاه به ازای هر x متعلق به H $\langle Tx\ , x\rangle \geq 0$ و با نماد $T \geq 0$ نشان می‌دهیم.

تعریف(۳۱.۱.۱): خانواده‌ای از عملگرهای فضای هیلبرت H مانند $A = \{T_i\}_{i\epsilon I}$ جبر نامیده می شود هرگاه نسبت به اعمال جمع توابع، ترکیب توابع و ضرب اسکالرتوابع بسته باشد. یعنی برای هر $T \in A$ وT_2 وT_1:

$$1) T_1+T_2 \in A \qquad 2) T_1 o T_2 \in A \qquad 3) \alpha T \in A.$$

که در آن I مجموعه اندیس‌گذار شماراست.

تعریف(۳۲.۱.۱): نگاشت خطی و کران‌دار $T:H\to K$ را *معکوس‌پذیر* می‌گوییم هرگاه نگاشتی مانند $S:K\to H$ موجود باشد به طوری که به ازای هر x متعلق به H و به ازای هر y متعلق به K:

$$T(S(y)) = y \quad \text{و} \quad S(T(x)) = x.$$

به عبارت دیگر $SoT= I_H$ و $ToS= I_K$.

نکته(۳۳.۱.۱): فضای هیلبرت H و عملگر $T:H\to H$ مفروض است. هرگاه $\|I-T\|<1$، عملگر T معکوس‌پذیر خواهد بود.

اثبات: برای اثبات می‌توان به صفحه ۴۰۷ از مرجع [۷] مراجعه کرد.□

تعریف(۳۴.۱.۱): جبر عملگرهای خطی و کران دار فضای هیلبرت H را با نماد $L(H)$ نشان می‌دهیم.

قضیه(۳۵.۱.۱): هرگاه T یک عملگر فضای هیلبرت H باشد، T از پایین کران‌دار است و برد چگال دارد اگر و تنها اگر معکوس‌پذیر باشد.

اثبات: فرض کنیم که T معکوس‌پذیر باشد، در این صورت $R_T=H$. بنابراین R_T چگال است.

بعلاوه به ازای هر f متعلق به H داریم:

$$\|Tf\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}\|T^{-1}Tf\|$$

$$= \frac{1}{\|T^{-1}\|}\|f\|$$

و به این ترتیب T از پایین کران‌دار است.

برعکس: اگر عملگر T از پایین کران‌دار باشد، $\varepsilon>0$ وجود دارد که برای هر f متعلق به H

$$\|Tf\| \geq \varepsilon\|f\|.$$

حال اگر $\{Tf_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله کوشی در R_T باشد نامساوی زیر را داریم:

$$\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|Tf_n - Tf_m\|$$