بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۸۱ /۷/ ۳۰

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران

دانشگاه تبریز

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان :

دسته بندی ارتباط های آفینی بطور موضعی همگن با تانسور ریچی پاد متقارن روی خمینه های دو بعدی

اساتید راهنما :

آقای دکتر مگردیچ تومانیان

آقای دکتر ابراهیم پوررضا

استاد مشاور :

آقای دکتر غفار فرزدی

پژوهشگر :

سهراب عظیم پور

۴۲۴۱۹

شهریور ماه ۱۳۸۱

۴۲۴۱۹

تقدیم به :

بهترینهای زندگیم

پدر صبور و مادر مهربانم

تقدیر نامه :

اینک که در آستانه دانش آموختگی خود از دانشگاه تبریز می باشم، بر خود فرض می دانم که از محضـر بـزرگ اسـتادانی که در طی دو سال، خوشه چین خرمن دانش و معرفتشان بودم، سپاس گزاری و قدردانی کنم.

بیـش و پیـش از همه، از محضر استادانم آقایان دکتر مگردیچ تومانیان و دکتر ابراهیم پوررضا کـه راهـنمایی ایـن رساله را به عهده گرفتند و راهنمای های ارزنده ای کردند سپاس گزاری و قدر دانـی مـی کنم و د ر همین جا بر خود فرض می دانم که از محضر بزرگوارشان که بحق در طی دو سال چیزها آموختم سپاس گزاری و قدر دانی کنم، هر چند که قلم از نوشتن عاجز است.

نیـز از اسـتاد محـترم مشـاور جـناب آقـای دکتر غفار فرزدی که راهنمایی های مفیدی کردند سپاس گزاری می کنم از جناب آقای دکتر مهرورز و جناب آقای دکتر سیفلو و دیگر استادانی که از محضرشـان اسـتفاده هـا بـردم سـپاس گـزاری و قدر دانی می کنم و از خداوند بزرگ برای تمامی استادانی که در خدمت جامعه علمی این مرز و بوم اند، سلامتی، عزت و طول عمر را خواهانم.

نام خانوادگی دانشجو : عظیم پور نام : سهراب

عنوان پایان نامه : دسته بندی ارتباطهای آفینی بطور موضعی همگن با تانسور ریچی پاد متقارن روی خمینه‌-های دو بعدی

اساتید راهنما : دکتر مگردیچ تومانیان و دکتر ابراهیم پوررضا

استاد مشاور : دکتر غفار فرزدی

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد رشته : ریاضی محض گرایش : هندسه دانشگاه : تبریز

دانشکده : ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی : شهریور ۸۱ تعداد صفحه :۹۰

کلید واژه ها : خمینه های دو بعدی با ارتباط آفینی، ارتباطهای بطور موضعی همگن، تانسور Ricci پاد-متقارن، خمینه های اسرمن

چکیده :

در یک فرم صریح، ارتباط های بطور موضعی همگن بدون تاب را دسته بندی می کنیم. همچنین انگیزه -هایی را برای این تحقیق که از مطالعه فضا های اسرمن ناشی شده است، ارائه می دهیم.

فهرست مطالب

مقاله حاضر که بعنوان پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه) تهیه شده است درباره دسته بندی ارتباطهای آفینی بطور موضعی همگن با تانسور ریچی پاد متقارن روی خمینه های دو بعدی می باشدکه در Springer-Verlag, Wien(2000) به چاپ رسیده است.

ارتباطهای اسرمن آفینی از تلاشی که برای تکمیل کردن مثال های جدید از فضاهای اسرمن شبه ریمانی با کمک ساختاری که بسط ریمان نامیده می شود بدست آمد ([۲] , [۳] , [٤], [٥]) این ساختار به هر خمینه n بعدی M با ارتباط آفینی بدون تاب یک متریک شبه ریمانی g_∇ از نشان (n,n) روی کلاف دوگان مماسی T^*M اختصاص می دهد(برای درک بیشتر به مرجع [۱۳] رجوع کنید)

ثابت می شود که ∇ اسرمن آفینی است اگر و فقط اگر تانسور ریچی ارتباط ∇ رویM پاد متقارن باشد[٥]

در اینجا شکل اصلاح شده نتایج دنبال شده توسط Y.C.Wong را بیان می کنیم[۱۲]

۱_ قضیه :

فرض کنید ∇ یک ارتباط بدون تاب با تانسور ریچی پاد متقارن روی خمینه ای با بعد دو باشد. فرض کنید که ∇ نقاط مسطح نداشته باشد در نتیجه ∇ ریچی برگشتی است. علاوه بر این حول هر نقطه $p \in M$ دستگاه مختصات موضعی (u^1, u^2) موجود است که در آن مولفه های نا صفر ارتباط عبارتند از :

(i) $\Gamma_{22}^2 = \partial_2\theta, \Gamma_{11}^1 = -\partial_1\theta$ که در آن θ یک تابع هموار است بطوریکه $\partial_2\partial_1\theta \neq 0$

یا

(ii) $\Gamma_{22}^2 = \partial_2 \log\varphi, \Gamma_{11}^1 = -\partial_1 \log\varphi, \Gamma_{21}^1 = \varphi$ که در آن φ یک تابع هموار بطوریکه $\partial_2\partial_1 \log\varphi \neq 0$

یا

$$\Gamma_{22}^{2}=\partial_2\log\varphi+\frac{u^1}{1+u^1u^2},\Gamma_{11}^{1}=-\partial_1\log\varphi+\frac{u^2}{1+u^1u^2},\Gamma_{11}^{2}=\frac{1}{\varphi(1+u^1u^2)},\Gamma_{22}^{1}=-\frac{\varphi}{1+u^1u^2} \qquad (iii)$$

که در آن φ یک تابع هموراری است بطوریکه $\partial_2\partial_1\log\varphi\neq 0$

ساده ترین نوع ارتباطهای (i) برا ی ساختن مثالهای جدید خمینه های اسرمن شبه ریمـانی از نشـان (– – + +) استفاده شده است[۵]

هدف این مقاله دسته بندی همه ارتباطهای آفینی از قضیه ۱ است بطوریکه موضعا" همگن باشند ایـن دسـته بندی بنظر می رسد که به ارتباط داده شده در قضیه ۱ وابسته نباشد. روش ما بطور کامل از فرآینـد اسـتفاده شده توسط Wong متفاوت است ([۷] , [۹], [۱۰] و [۱۱]) در این مقاله ثابت می کنیم

۲_ قضیه :

فرض کنید که ∇ یک ارتباط بدون تاب با تانسور ریچی پاد متقارن روی خمینه ای با بعد دو باشد اگر ∇ بطور موضعی متقارن باشد در نتیجه حول هر نقطـه p از یـک زیـر مجموعـه بـاز چگـال M یـک دسـتگاه مختصات موضعی (u,v) موجود است که ارتباط ∇ به صورت زیر بیان می شود

$$\nabla_{\partial_v}^{\partial_v}=-\frac{1}{36}u^5\partial_u-\frac{2}{3}u^2\partial_v \qquad ,\nabla_{\partial_u}^{\partial_v}=-\frac{1}{3}u^2\partial_u+\frac{1}{u}\partial_v \qquad ,\nabla_{\partial_u}^{\partial_u}=0 \qquad (A_1$$

یا

$$\nabla_{\partial_v}^{\partial_v}=u\partial_v \qquad ,\nabla_{\partial_u}^{\partial_v}=u\partial_u \qquad ,\nabla_{\partial_u}^{\partial_u}=0 \qquad (A_2$$

یا

$$\nabla_{\partial_v}^{\partial_v}=\frac{\lambda}{u}\partial_v \qquad ,\nabla_{\partial_u}^{\partial_v}=\frac{\lambda}{u}\partial_u \qquad ,\nabla_{\partial_u}^{\partial_u}=-\frac{2}{u}\partial_u-\frac{1}{2u}\partial_v \qquad (B$$

که در آن λ یک پارامتر حقیقی دلخواه است.

در حالت A_1 جبر آفینی کیلینگ سه بعدی است و در حالت B, A_2 این جبر دو بعدی است.

فصل اول :

تعریفها و قضیه های مورد نیاز

در این فصل تعریفها وقضیه های مورد نیازرا یادآوری می کنیم.

۱-۱ تعریف:

فرض کنیم V یک فضای برداری روی R باشد فرم دو خطی روی V عبارت است از نگاشتی مانند $\phi : V \times V \to R$ که نسبت به هر مولفه اش خطی باشد یعنی:

$$\forall \alpha, \beta \in R : \forall \; v_1, v_2, v, w_1, w_2, w \in V ; \; \phi(\alpha v_1 + \beta v_2 , w) = \alpha\phi(v_1, w) + \beta\phi(v_2, w)$$
$$\phi(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha\phi(v, w_1) + \beta\phi(v, w_2)$$

توجه کنید که فرم های دو خطی روی V بطور کامل توسط n^2 مقادیر روی پایه های $e_1,\dots,e_n$ از V مشخص می شوند : اگر $\alpha_{ij} = \phi(e_i, e_j)$ و $1 \le i, j \le n$ داده شده باشند و اگر $v = \sum \lambda^i e_i$ و $w = \sum \mu^j e_j$ دو جفت بردار در V باشند لذا دو خطی بودن ϕ ایجاب می کند که $\phi(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \lambda^i \mu^j$ برعکس فرض کنید که $A = (\alpha_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ با درایه های حقیقی باشد این ماتریس یک فرم دو خطی ϕ را معین می کند . لذا یک تناظر ۱-۱ بین ماتریس های n×n و فرم های دو خطی روی V موجود است . به محض اینکه $e_1,\dots,e_n$ به عنوان پایه انتخاب شوند اعداد α_{ij} مولفه های ϕ نسبت به این پایه خواهد بود . حالت های خاصی را که برایمان مفید باشد ذکر می کنیم

۱-۲ تعریف:

یک فرم دو خطی متقارن است هرگاه $\phi(v,w) = \phi(w,v)$ و پادمتقارن است هرگاه $\phi(v,w) = -\phi(w,v)$

به راحتی دیده می شودکه قطع نظر از انتخاب پایه ها این دو معادل خواهند بود به ترتیب برای متقارن $A = A^t$ و برای پاد متقارن $A^t = -A$ که در آن A ماتریس مولفه ها است .

۱-۳ تعریف:

یک میدان ϕ از فرم های دو خطی C^r - روی خمینه M عبارت است از تابعی که به هر نقطه $p \in M$

یک فرم دو خطی ϕ_p را روی T_pM نسبت دهد. یعنی نگاشت $\phi : T_pM \times T_pM \to R$ به طوری که برای هر حومه مختصات (U, φ) توابع $\alpha_{ij} = \phi(E_i, E_j)$ که توسط ϕ تعریف شده و قاب مختصات $E_n,...,E_1$ از کلاس C^r باشند مگر آنکه خلاف آن گفته شود. n^2 توابع $\alpha_{ij} = \phi(E_i, E_j)$ روی U مولفه های ϕ در حومه مختصات (U, φ) نامیده می شوند.

۱–٤ تعریف:

فرض کنیم V یک فضای برداری باشد تا نسور ϕ روی V یک نگاشت چند خطی

$$\phi : \overbrace{V \times V \times \dots \times V}^{r} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{S} \to R$$

است که در آن V^* فضای دوگان V و r مرتبه همگرد و s مرتبه ناهمگرد تانسور ϕ می باشد در این صورت ϕ را تا نسوری از نوع (r,s) گویند.

۱–٥ تبصره:

حالت خاصی از تا نسورها ی همگرد ، در راستای اهداف این مقاله در نظر گرفته می شوند.

۱–٦ تعریف:

یک میدان تانسوری همگرد C^∞ از مرتبه r روی خمینه هموار M تابعی مانند ϕ است که به هر نقطه $p \in M$ ، عضوی از $\tau_0^r(T_pM)$ را اختصاص دهد. که در آن

$\tau\,(T_pM)=\{T:T_pM\times\dots\times T_pM \longrightarrow R|$ نگاشتی r خطی است $T\}$

۱–۷ تعریف:

فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی باشد. فرم دو خطی متقارن ϕ روی V

۱) مثبت (منفی) معین است به شرطی که $v \neq 0$ ، $\phi(v,v) > 0$ را ایجاب کند (< 0)

۲) مثبت (منفی) شبه معین است به شرطی که $\phi(\mathrm{v,v}) \geq 0$ (≤ 0) برای هر $\mathrm{v} \in V$

۳) ناتبهگون است بشرطی که $\phi(\mathrm{v,w})=0$ برای هر $\mathrm{w} \in V$، نتیجه شود که $\mathrm{v}=0$

یک فرم دو خطی متقارن روی V باشد آنگاه برای هر زیر فضای W از V، تحدید $\phi|_{\mathrm{W}\times\mathrm{W}}$ که هرگاه ϕ صرفا با نماد $\phi|_{\mathrm{W}}$ نشان می دهیم نیز متقارن می باشد .

۱-۸ تعریف:

شاخص v از فرم دو خطی متقارن ϕ روی V عبارت است از بزرگترین عدد صحیحی که بعد زیر فضای W از V می باشد بطوریکه $\phi|_{\mathrm{W}}$ منفی معین باشد .

بنابراین $0 \leq v \leq dimV$ و $v=0$ اگر و فقط اگر ϕ مثبت شبه معین باشد .

۱-۹ تعریف:

تابع $q:V \rightarrow R$ که به صورت $q(\mathrm{v})=\phi(\mathrm{v,v})$ تعریف شود . فرم درجه دوم وابسته به ϕ گوییم .

۱-۱۰ لم:

فرم دو خطی متقارن نا تبهگون است اگر و فقط اگر ماتریس ان نسبت به یک پایه (هر پایه) معکوس پـذیر باشد

برهان . فرض کنید که b فرم دو خطی نا تبهگون روی فضای برداری V و $e_1,\dots,e_n$ پایه ای بـرای آن باشـد گر $\mathrm{v} \in V$ لذا، $\mathrm{b}(\mathrm{v,w})=0$ برای هر $\mathrm{w} \in V$ اگر و فقط اگر $\mathrm{b}(\mathrm{v},e_i)=0$ برای $i=1,2,3,\dots,n$ از آنجایی که (b_{ij}) متقارن است لذا $\mathrm{b}(\mathrm{v},e_i)=\mathrm{b}(\sum v_j e_j, e_i)=\sum \mathrm{b}_{ij} v_j$.

از اینرو b تبهگون است اگر و فقط اگر اعداد $v_1,\dots,v_n$ که همگی صفر نباشند موجود باشد . بطوریکه $\sum b_{ij}v_j=0$ برای $i=1,2,3,\dots,n$. اما این معادل با وابستگی خطی ستون ها ی (b_{ij}) است یعنی (b_{ij}) منفـرد ست بنابراین حکم تمام است .

۱-۱۱ تعریف:

ضرب اسکالر g روی فضای برداری V یک فرم دو خطی متقارن و ناتبهگون می باشد توجه کنید که ضرب داخلی یک ضرب اسکالر مثبت معین می باشد .

۱-۱۲ مثال:

ساده ترین مثال ضرب نقطه ای در $|R^n$ است یعنی $v.w = \sum v_i w_i$ که در آن $v=\sum v_i e_i$ و $w=\sum w_i e_i$ و $e_n,...,e_1$ پایه استاندارد برای $|R^n$ می باشد .

۱-۱۳ تبصره:

ماتریس g نسبت به پایه متعامد $e_n,...,e_1$ برای V قطری است در حقیقت

$g\ (e_i,e_j)=\delta_i^j \varepsilon_j$ که در آن $(*)\varepsilon_j = g\ (e_j,e_j)=\pm 1$

توجه کنید برای راحتی ما بردارهای پایه متعامد را طوری مرتب می کنیم که علامت منفی در (*) اگر باشد در ابتدا بیاید . در این صورت آن را با $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ نشان می دهیم .

۱-۱٤ لم:

فرض کنید که $e_n,...,e_1$ پایه متعامد برای V باشد و $\varepsilon_i = g(e_i,e_i)$ لذا $v\in V$ نمایش منحصر بفردی به صورت $v=\sum \varepsilon_i\, g(v,e_i)$ دارد

برای اثبات این لم می توانید به ص ۵۰ رجوع [١٤] مراجعه کنید .

1-۱۵ لم:

برای هر پایه متعامد $e_n,...,e_1$ برای V تعداد علامت های منفی در نشان $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ شاخص v در V می باشد .

برای اثبات این لم می توانید به ص ۵۱ رجوع [١٤] مراجعه کنید .

۱-۱٦ تعریف:

تانسور متر یک g روی خمینه هموار M یک میدان تا نسوری متقارن ناتبهگون از نوع (۲و۰) با شاخص ثبت است .

توجه کنید که $g\in \tau_0^{\;2}\,(M)$ بطوریکه همواره برای هر $p\in M$ یک ضرب داخلی g_p روی فضای مماسی T_pM را نسبت می دهد . این شاخص g_p برای هر p یکسان است

۱-۱۷ تعریف:

خمینه شبه ریمانی [1] عبارت است از یک خمینه هموار M که به تانسور متریک g مجهز شده باشد .

مقدار مشترک v از شاخص g_p روی خمینه شبه ریمانی M شاخص M گفته می شود.یعنی $0\le v\le dimM$

۱-۱۸ تبصره:

اگر $v=0$ ، M خمینه ریمانی است .

ما از علامت < و > برای نمایش g استفاده می کنیم . برای هر جفت بردار مماس $\mathrm{v},\mathrm{w}\in T_pM$ و $g(\mathrm{v},\mathrm{w})=<\mathrm{v},\mathrm{w}>\in \mathbb{R}$ برای هر جفت میدان برداری $g(V,W)=\langle V,W\rangle\in C^\infty(M);V,W$

فرض کنید که $x^n,\dots,x^1$ یک دستگاه مختصات روی $U\subset M$ باشد مولفه های تانسور g روی U عبارتند از $g_{ij}=\langle \partial_i,\partial_j\rangle$ که در آن $1\le i,j\le n$ به طور یکه $\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. بنابراین برای هر دو جفت میدان برداری $V=\sum v^i\partial_i$ و $W=\sum w^j\partial_j$ $g\,(v_1w)=<v,w>=\sum g_{ij}v^iw^j$

از آنجایی که g ناتبهگون است لذا در هر نقطه p از U ماتریس (g_{ij}) معکوس پذیر است.

[1] Pseudo Riemannian manifold