بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های نامنفی

مؤلف :

ایمان عادلی

استاد راهنما :

دکتر محمود محسنی مقدم

استاد مشاور :

دکتر عظیم ریواز

شهریورماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو :	ایمان عادلی
استاد راهنما :	دکتر محمود محسنی مقدم
استاد مشاور :	دکتر عظیم ریواز
داور ۱ :	دکتر محمد علی ولی
داور ۲ :	دکتر محمد علی یعقوبی
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده :	دکتر علی جباری
معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده:	دکتر محمد علی ولی

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و آنان که با تمام وجود دوستشان دارم

تقدیر وتشکر

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکترمحمود محسنی مقدم، صمیمانه تشکرو قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر عظیم ریوازکه زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند ودر آماده سازی این پایان نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

چکیده

دراین پایان‌نامه، ابتدا درفصل اول به معرفی مفاهیم اولیه وبرخی قضایای جبرخطی مورد نیازدر بحث مسئله مقدارویژه و مقدار ویژه معکوس می‌پردازیم.

درفصل دوم خواص و ویژگی‌های ماتریس‌های نامنفی بیان شده وحل مسئله مقدار ویژه معکوس آن ها در حالات خاص وهمچنین حل این مسئله بااستفاده ازضرایب معادله مشخصه بیان می‌شوند.

درفصل سوم مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریس های نامنفی را برای ماتریس‌های مرتبه ۲ تا مرتبه ۵ حل می کنیم.

فصل چهارم شامل مثال‌های عددی برای پیدا نمودن ماتریسی نامنفی با طیف معلوم می‌باشد.

کلید واژه: ماتریس‌های نامنفی،مسئاله مقدار ویژه معکوس نامنفی، مقدار ویژه ماکسیمال.

فهرست مطالب

فصل اول: مفاهیم اولیه

فصل دوم: ماتریس‌های نامنفی

فصل اول

مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

یکی از مسائل مطرح در جبر خطی مسئله‌ی مقدار ویژه و مقدار ویژه‌ی معکوس می‌باشد. در این فصل به شرح مختصری از این مسائل می‌پردازیم و برخی از تعاریف مورد نیاز فصل‌های بعدرا مطرح می کنیم.

۲.۱ مسئله‌ی مقدار ویژه

مسئله‌ی مقدار ویژه عبارتست از یافتن مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس $n \times n$ مختلط یا حقیقی A.
راه حل اساسی و کلاسیک این مسئله حل دستگاه $Ax = \lambda x$ می‌باشد.
دردستگاه $Ax = \lambda x$ که $x \neq 0$ ، λرا مقدارویژه، x را بردارویژه و (λ, x) را جفت ویژه‌ی A می-نامند.

برای یافتن مقادیر ویژه‌ی ماتریس A می‌توان معادله $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$، که چندجمله‌ای مشخصه‌ی A نام دارد ، را تشکیل داده و با حل $P_A(\lambda) = 0$ مقادیر ویژه را به‌دست آورد. از آنجا که برای مقادیر بزرگ n ،این کار حجم محاسباتی زیادی دارد، اغلب از روش‌های عددی برای یافتن مقادیر ویژه استفاده می کنیم.
برخی از روش‌های عددی حل این مسئله عبارتند از: روش توانی، روش خارج قسمت ریلی وغیره.

۳.۱ مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم‌یافته

در دستگاه $Ax = \lambda Cx$ که Aو C دو ماتریس $n \times n$ ، $x \neq 0$ برداری ستونی و λیک مقدار حقیقی یا مختلط می باشد، λ را مقدار ویژه ی تعمیم یافته ی زوج (A, C)، x را بردار ویژه‌ی متناظر با λ و (λ, x) را جفت ویژه‌ی تعمیم یافته‌ی زوج (A, C)می گوییم.

در اینجا برخی از نمادها و تعاریفی که در این فصل و فصل‌های بعد به‌کار خواهیم برد را می‌آوریم.

Aو B و ... : نشان‌دهنده‌ی ماتریس.

$A_{n\times n}$ و ... : نشان‌دهنده‌ی ماتریس مربعی از مرتبه‌ی n.

x و u و .... : نشان‌دهنده‌ی بردار .

$\sigma(A)$: طیف ماتریس A به‌عبارت دیگر $\sigma(A) = \{\lambda; \det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0\}$.

I: نشان دهنده‌ی ماتریس همانی.

o_n: ماتریس $n \times n$ که همه‌ی درایه‌های آن صفر می‌باشد.

J_n: ماتریس $n \times n$ با درایه‌های $\frac{1}{n}$.

$sum(A)$: مجموع عناصر ماتریس A.

تعریف ۱.۱. دو بردار x و u را متعامد گوییم اگر $x^{\mathrm{t}}u = 0$.

تعریف ۲.۱. مجموعه‌ی بردارهای $\{x_1, \dots, x_n\}$ را مستقل خطی گوییم در صورتی که، تساوی $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$ ایجاب کند $\mathrm{c}_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$. درغیر این صورت بردارها را وابسته‌ی خطی می‌نامیم.

تعریف ۳.۱. ماتریس حقیقی A را متقارن نامیم، اگر $A = A^t$.[۱]

تعریف ۴.۱. ماتریس مختلط A را هرمیتی نامیم ، هرگاه $A = A^H (= A^*)$.[۲]

تعریف ۵.۱. ماتریس حقیقی (مختلط) A را متعامد (یکانی) گوییم، اگر

$$AA^t = A^tA = I \ (AA^H = A^HA = I).$$

تعریف ۶.۱. ماتریس $A = (a_{ij})$ را نامنفی (مثبت) می‌نامیم، اگر $a_{ij} \geq 0$ $(a_{ij} > 0)$.

تعریف ۷.۱. ماتریس متقارن A را معین مثبت (شبه معین مثبت) می‌نامیم، هرگاه برای هر بردار ستونی $x \neq 0$ داشته باشیم $x^{\mathrm{t}}Ax > 0$ $(x^tAx \geq 0)$.

---

[۱] منظور از A^t ، ترانهاده‌ی ماتریس یعنی ماتریس حاصل از جابه‌جایی هر سطر با ستون متناظر آن می‌باشد.

[۲] منظور از A^H ، ترانهاده مزدوج ماتریس A می‌باشد.

تعریف ۸.۱ مجموع مقادیر واقع بر قطر اصلی ماتریس A را رد (اثر) ماتریس A نامیم و با $tr(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۱. ماتریس D را قطری می‌نامیم، اگر تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، و آن را با $D = diag(d_1, d_2, \dots, d_n)$ نشان می‌دهیم، که $d_1, d_2, \dots, d_n$ درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌باشند.

تعریف ۱۰.۱. ماتریس $A = \left(a_{ij}\right)$ را سه قطری می‌نامیم، اگر $a_{ij} = 0; |i-j| \geq 2$.

تعریف ۱۱.۱. ماتریسی که از جابه‌جایی سطرها و ستون‌های ماتریس I حاصل می‌شود ماتریس جایگشتی می گویند و با P نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱. دو ماتریس مربعی هم‌شیب گفته می‌شوند اگر یکی از آنها بتواند از دیگری با جایگشتی از سطرها و جایگشت مشابه از ستون‌ها به‌دست آید . بنابراین A و B هم‌شیب‌اند اگر و تنها اگر ماتریس جایگشتی P چنان وجود داشته باشد به‌طوری که $B = P^t AP$.

تعریف ۱۳.۱. دو ماتریس A و B را متشابه گوییم و می‌نویسیم $A \sim B$، هرگاه ماتریسی معکوس-پذیر مانند Q وجود داشته باشد، به‌طوری که $B = Q^{-1}AQ$.

تعریف ۱۴.۱. ماتریس مربعی A تجزیه‌پذیر (تحویل‌پذیر) گفته می‌شود، اگر هم‌شیب با ماتریسی به فرم $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ باشد، که A_1 و A_2 ماتریس‌های مربعی هستند. در غیر این صورت گفته می‌شود ماتریس A تجزیه‌ناپذیر (تحویل‌ناپذیر) است.

تعریف ۱۵.۱. برای ماتریس $A_{n\times n}$ بامقادیرویژه $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$، مقدار $\rho(A)$ را که به صورت زیر تعریف می‌کنیم شعاع طیفی ماتریس A می‌نامند.

$$\rho(A) = \max|\lambda_i| \; ; i = 1, \dots, n.$$

تعریف ۱۶.۱. مقدار ویژه‌ی λ از ماتریس A ماکسیمال است اگر برای هر مقدار ویژه‌ی λ' از A، رابطه‌ی $\left|\lambda'\right| \leq \left|\lambda\right|$ برقرار باشد.

تعریف ۱.۱۷. ماتریس تجزیه‌ناپذیر ونامنفی که تنها یک مقدار ویژه ماکسیمال دارد ، ماتریس اولیه نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱۸. اگر A یک ماتریس $m \times m$ و B یک ماتریس $n \times n$ باشد، ماتریس $C_{(m+n)\times(m+n)}$ به فرم

$$C = \begin{bmatrix} A & 0_{m\times n} \\ 0_{m\times n} & B \end{bmatrix}$$

را جمع مستقیم دو ماتریس A و B می‌نامیم و می‌نویسیم $C = A \bigoplus B$.

۱.۴ نرم برداری و نرم ماتریسی

تعریف ۱.۱۹. حاصل ضرب داخلی هرمیتی دو بردار $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ و $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i.$$

تعریف۱.۲۰. تابع $\|.\|: \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$ را یک نرم برداری می‌نامیم اگر

i. $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{C}^n , \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \ \forall x \in \mathbb{C}^n , \forall \alpha \in \mathbb{C}$

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in \mathbb{C}^n$

نرم اقلیدسی بردار مختلط x به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_2 = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

به‌طور معمول نرم P بردار $x \in \mathbb{C}^n$ به‌صورت

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

می‌باشد.

در حالتی که $p = \infty$، این نرم به صورت $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}|x_i|$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲۱.۱. $\|.\|: \mathbb{C}^{n\times n} \to [0,+\infty)$ را نرم ماتریسی گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند.

i. $\|A\| \geq 0 \ \ \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

ii. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\| \ \ \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

iii. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

iv. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

به عنوان مثال

$$\|A\|_p = \max_{x\in\mathbb{C}, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

یک نرم ماتریسی است که آن را نرم طبیعی ماتریس A می‌نامیم.

نرم فروبنیوسی ماتریس $A_{n\times n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_{\mathrm{F}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

تعریف ۲۲.۱. فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی مربعی از مرتبه $n \times n$ باشد. در اینصورت دترمینان ماتریس A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$det(A) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

که σ جایگشتی روی مجموعه‌ی $\{1,2,\dots,n\}$ می‌باشد. اگر تعداد جابجایی های جفت به جفت لازم در جایگشت σ برای رسیدن به جایگشت همانی $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ عددی زوج باشدمی-گوییم σ جایگشتی زوج است در غیراینصورت σ را جایگشتی فرد می‌گویند. منظور از $\mathrm{sgn}(\sigma)$

علامت جایگشت σ می‌باشد که اگر σ جایگشتی زوج باشد علامت آن $+1$ در غیراینصورت علامت آن -1 است.

لم ۱.۱. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، آن‌گاه:

i. $\|A\|_1 = \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \ , \mathrm{j} = 1, \dots, n$
ii. $\|A\|_\infty = \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ , i = 1, \dots, n$
iii. $\|A\|_2 = [\rho(A^{\mathrm{H}}A)]^{\frac{1}{2}}$
iv. $\|A\|_F = [tr(A^{\mathrm{H}}A)]^{\frac{1}{2}}$

۵.۱ برخی خواص جفت‌های ویژه

در این بخش چند لم بیان می‌کنیم که از اثبات کردن برخی از آنها خودداری می‌کنیم ومی‌توان اثبات آنها را در اکثر کتاب‌های جبر خطی یافت.

لم ۲.۱. مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های متقارن حقیقی‌اند.

لم ۳.۱. بردارده‌های ویژه‌ی ماتریس‌های متقارن متعامدند.

لم۴.۱. بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز یک ماتریس مستقل خطی‌اند.

اثبات: فرض کنید (λ_1, x_1) و (λ_2, x_2) دو جفت ویژه‌ی ماتریس A باشند و $\lambda_1 \neq \lambda_2$. باید ثابت کنیم اگر $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$، آن‌گاه $c_1 = \mathrm{c}_2 = 0$. با ضرب A از سمت راست در طرفین رابطه‌ی $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ داریم:

$$c_1Ax_1 + c_2Ax_2 = 0$$

به‌عبارت دیگر

$$c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 = 0 \quad (1)$$

از طرفی با ضرب $\lambda_1 \neq 0$ در رابطه‌ی $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ نتیجه می‌شود:

$$c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_1x_2 = 0 \quad (2)$$

اگر رابطه‌ی (2) را از (1) کم کنیم، نتیجه می‌شود:

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 = 0$$

حال چون $\lambda_2 \neq \lambda_1$ و $x_2 \neq 0$، پس $c_2 = 0$ و در نتیجه c_1 نیز صفر خواهد بود. ■

لم ۵.۱. اگر Aماتریسی معکوس‌پذیر و $\lambda \neq 0$ مقدار ویژه‌ی آن باشد، آن‌گاه $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه‌ی A^{-1} خواهد بود.

لم ۶.۱. مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های متشابه، یکسانند.

به راحتی می‌توان دید که این حکم، برای ماتریس‌های هم‌شیب نیز برقرار است.

لم ۷.۱. مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های معین مثبت ، مثبت می‌باشند.

اثبات: فرض کنید A یک ماتریس معین مثبت، λ یک مقدار ویژه‌ی آن و $x \neq 0$ بردار ویژه‌ی متناظر با λ باشد. چون A معین مثبت است بنابراین

$$\lambda x^t x = x^t A x > 0$$

و با توجه به اینکه $x^t x = \|x\| > 0$، پس $\lambda > 0$. ■

لم ۸.۱ اگر $(\lambda_1, x_1), (\lambda_2, x_2), \dots, (\lambda_n, x_n)$ جفت‌های ویژه‌ی متمایز ماتریس A باشند آن‌گاه $A \sim D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

اثبات: ماتریس Q را به‌صورت $Q = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ تعریف می‌کنیم که، $x_i, i = 1, \dots, n$ ستون iام ماتریس Q می‌باشد . با توجه به لم ۴.۱ ستون‌های Q مستقل خطی اند بنابراین Q معکوس‌پذیر است .

از طرفی می‌دانیم $Ax_i = \lambda_i x_i$. لذا

$$\begin{aligned} AQ &= A[x_1, x_2, \dots, x_n] \\ &= [Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n] = [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n] \end{aligned}$$

$$= [x_1, x_2, \dots, x_n]\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} = QD.$$

بنابراین ماتریس Aمتشابه با ماتریس قطری $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ می‌باشد. ■

نتیجه ۱.۱. هرگاه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$مقادیر ویژه ماتریس Aباشند، آن‌گاه

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

و

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

نتیجه ۲.۱. ماتریس A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $0 \notin \sigma(A)$.

لم ۹.۱. اگر $\lambda \in \sigma(A)$، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی k، $\lambda^k \in \sigma(A^k)$.

اثبات: برای $k = 1$ پایه استقراء به‌وضوح بر قرار است .

با ضرب طرفین رابطه‌ی $Ax = \lambda x$ در A داریم

$$A^2x = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

بنابراین λ^2 مقدار ویژه‌ی A^2می‌باشد و حکم برای $k = 2$ نیز برقرار است. حال فرض می‌کنیم حکم برای $k = n$ برقرار باشد، یعنی λ^n مقدار ویژه‌ی A^n باشد. در این صورت

$$A^n x = \lambda^n x$$

بنابراین با ضرب طرفین این رابطه در A نتیجه می‌شود:

$$A^{n+1}x = \lambda^n Ax = \lambda^{n+1}x$$

و این همان حکم استقراء می‌باشد. ■

نتیجه ۳.۱. اگر $\lambda \in \sigma(A)$ و $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ یک چند جمله‌ای باشد،آن‌گاه $g(\lambda)$ مقدار ویژه‌ی $g(A)$ خواهد بود .

نتیجه ۴.۱. هرگاه λ مقدار ویژه‌ی ماتریس A باشد، آن‌گاه $k\lambda$ مقدار ویژه‌ی kA است.

لم ۱۰.۱. اگر $x \neq 0$ بردار ویژه‌ی ماتریس A باشد ، آن‌گاه $kx; k \neq 0$ نیز بردار ویژه‌ی ماتریس Aخواهد بود .

قضیه گرشگورین[3] ۱.۱. فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریس $n \times n$ و D_i نمایش‌گر دایره‌ای در صفحه‌ی مختلط به مرکز a_{ii} و شعاع $r = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ باشد، یعنی

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}: |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

در این صورت مقادیر ویژه‌ی Aدر مجموعه‌ی $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ قرار دارند .

اثبات : فرض کنیم λیک مقدار ویژه‌ی ماتریس A و $x \neq 0$ بردار ویژه‌ی متناظر با λ باشد. در این-صورت

$$Ax = \lambda x$$

بنابراین با نوشتن این رابطه به صورت مؤلفه‌ای نتیجه می‌شود

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{ij} x_{\mathrm{j}} = \lambda x_j \,; i = 1,2, \dots, n.$$

فرض کنیم $1 \leq k \leq n$ عددی صحیح باشد به‌طوری‌که $|x_k| = \|x\|_\infty$.

در این صورت

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{kj}\, x_{\mathrm{j}} = \lambda x_k$$

[3] Gersgorin

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sum_{\substack{\mathrm{j}=1\\ \mathrm{j}\neq k}}^{n} a_{kj}\, x_{\mathrm{j}} = \lambda x_k - a_{kk} x_k = (\lambda - a_{kk}) x_k$$

در نتیجه داریم:

$$|\lambda - a_{kk}||x_k| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j|$$

پس

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \left|\frac{x_j}{x_k}\right|$$

و در نتیجه

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

که نشان می‌دهد $\lambda \in D_k$ و بنابراین $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. ■

قضیه ۲.۱. اگر یک ماتریس نامنفی تجزیه‌ناپذیر A دقیقاً r مقدارویژه‌ی ماکسیمال داشته باشد، این مقادیر ویژه به فرم $\varphi e^{2\pi ik}; 0 \leq k \leq r$ می‌باشند که φ یک عدد مثبت است. اگر $r > 1$ آن‌گاه A هم‌شیب با ماتریسی به فرم

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

است، که بلوک‌های قطری، ماتریس‌های مربعی می‌باشند. rرا اندیس ماتریس Aمی‌نامیم.

اثبات: به [۱۰] رجوع شود.

قضیه‌شور۳.۱.[۴] برای هر ماتریس مختلط A یک ماتریس یکانی U چنان وجود دارد که

$$U^{\mathrm{H}}AU = T$$

به‌طوری که Tیک ماتریس بالا مثلثی است و عناصر روی قطر T مقادیر ویژه‌ی A می‌باشند.

اثبات: با استقراء روی n عمل می‌کنیم. حکم برای $n = 1$ یعنی $A_1 = (a_{11})$ بدیهی است.

فرض کنید حکم برای $n-1$، یعنی A_{n-1} برقرار باشد. به‌عبارت دیگر

$$\exists U_{n-1} \ \ni \ U_{n-1}^{\mathrm{H}}A_{n-1}U_{n-1} = T_{n-1}$$

که U_{n-1}ماتریسی یکانی و T_{n-1} بالا مثلثی است.

حال فرض کنید A_n یک ماتریس $n \times n$ و (λ, u) جفت ویژه‌ی A_n باشد به‌طوری که $\|u\|_2 = 1$ بنابراین با استفاده از فرآیند گرام اشمیت[۵] به سادگی می‌توان بردارهای $u_2, \dots, u_n$ را چنان یافت که مجموعه‌ی بردارهای $\{u, u_2, \dots, u_n\}$ متعامد باشند. در این صورت ماتریس V را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$V = [u_2, \dots, u_n]$$

همچنین ماتریس U را به‌صورت $U = [u \ \ V]_{n\times n}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که U یکانی می‌باشد. لذا

$$A_nU = A_n[u \ \ V] = [A_nu \ \ \ A_nV] = [\lambda u \ \ A_nV]$$

$$U^{\mathrm{H}}A_nU = \begin{bmatrix} u^H \\ V^H \end{bmatrix} [\lambda u \quad A_nV] = \begin{bmatrix} \lambda & u^HA_nV \\ 0 & V^HA_nV \end{bmatrix}$$

حال اگر $B_{n-1} = V^HA_nV$ در نظر بگیریم، طبق فرض استقراء Q یکانی وجود دارد به‌طوری که

$$Q^HB_{n-1}Q = T_{n-1}$$

[4]Schur s theorem
[5]Geram shmit