بسم الله الرحمن الرحیم

۱۴۱۶/۱۳

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

گرایش نظری

پایان نامه کارشناسی ارشد

تورم در کیهان شناسی کلوزا-کلین

از

حامد امیری

استادان راهنما:

دکتر حسین فرج الهی

دکتر حسین پناهی

۱۳۸۹/۷/۳

شهریور ۱۳۸۸

۱۴۱۶۱۳

تقدیم به :

اسطوره فداکاری ومحبت ،**مادر** بزرگوارم و**همسر** مهربانم

که همواره یار و یاورم بوده اند.

سپاسگزاری :

والا ترین سپاس از آن خدایی است که انسان را اندیشمند آفرید.

بر خود لازم می دانم سپاس خود را نسبت به تمامی عزیزانی که در این کار مرا یاری نمودند ابراز دارم واز زحماتی که به ایشان داده ام پوزش بطلبم:

اساتید راهنمای بزگوارم جناب آقای دکتر حسین فرج الهی وجناب آقای دکتر حسین پناهی که به بنده کمکهای ارزنده ای نمودند.

مادر دلسوزم که برایم زحمات بسیار کشیده است.

همسر مهربانم که همیشه سنگ صبور من بوده است.

خواهرعزیزم وهمسرگرانقدر ایشان که در زمان تحصیل بنده، متحمل زحمات بسیاری بوده اند.

فهرست مطالب

مقدمه..... ۱

فصل اول(مفاهیم اولیه)

(۱-۱) نسبیت عام..... ۳

(۱-۲) مدل(فریدمن-رابرتسون-والکر)..... ۴

(۱-۳) مدل(دوسیتر) ۵

(۱-۴) قضیه کمپل..... ۶

فصل دوم(نظریه کلوزا-کلین)

(۲-۱)ایده های بنیادی نظریه..... ۷

(۲-۲) سه وجه اساسی نظریه..... ۸

(۲-۳) مکانیزم کلوزا ۸

(۲-۴) کمینه تعمیم نسبیت عام..... ۹

(۲-۵) شرایط استوانه ای..... ۱۰

۲-۵-۱)حالت Φ ثابت..... ۱۱

(۲-۵-۲)حالت $A_\alpha = 0$ (**نظریه برنس – دیک**)..... ۱۲

(۲-۶) مقیاس بندی همدیس..... ۱۳

(۲-۷) مکانیزم فشرده سازی کلین..... ۱۵

(۲-۸)کوانتیزه کردن بار..... ۱۶

فصل سوم(طرح نوین نظریه)

(۳-۱) تئوریهای غیر فشرده..... ۱۹

(۳-۲) متریک..... ۱۹

(۳-۳) نظریه ماده القایی ۲۰

(۳-۴)حالت تقارن کروی..... ۲۷

(۳-۵) حالت همگن ویکنواخت ۲۹

(۳-۵-۱) مدل (فریدمن-رابرتسون-والکر)..... ۳۰

(۳-۵-۲) مدل(دوسیتر)..... ۳۱

(۳-۵-۳) امواج خلاء..... ۳۲

(۳-۶) مدل شوارتزشیلد..... ۳۳

(۳-۷) سالیتون در نظریه کلوزا-کلین ۳۴

(۳-۸) هموردایی در ا بعاد بالاتر..... ۳۷

(۳-۹) مفهوم فیزیکی بعد پنجم ۳۹

(۳-۱۰) معادله حرکت ۴۰

(۳-۱۱)کیهانشناسی کلوزا-کلین..... ۴۴

فصل چهارم (تاثیر متقابل دو سیال کیهانی در کیهانشناسی کلوزا-کلین)

(۴-۱) تاثیر متقابل دو سیال کامل..... ۴۷

(۴-۲) تاثیر متقابل در فضا-زمان بازویسته..... ۴۸

(۴-۳) تاثیر متقابل در فضا-زمان تخت..... ۴۹

(۴-۴)) تاثیر متقابل غبار کیهانی وسیال کامل..... ۵۱

(۴-۵) تاثیر متقابل سیال فانتوم وسیال کامل..... ۵۳

(۴-۵-۱) تاثیر متقابل سیال فانتوم و تابش کیهانی..... ۵۴

(۴-۶) تاثیر متقابل بین انرژی خلاء وسیال کامل ۵۵

(۴-۶-۱) تاثیر متقابل بین انرژی خلاء وغبار کیهانی..... ۵۷

فصل پنجم(سیال کامل ختثی پنج بعدی در کیهانشناسی کلوزا-کلین).

(۵-۱)مدل..... ۵۹

(۵-۲) معادلات میدانی..... ۶۲

فصل ششم(نتیجه گیری وپیشنهادات)..... ۶۶

مراجع..... ۶۸

عنوان : (تورم در کیهان شناسی کلوزا- کلین)

(حامد امیری)

خلاصه

نظریه کلوزا-کلین به عنوان تعمیم نظریه نسبیت عام چهار بعدی انیشتین به پنج بعد ، در راستای ایجاد وحدت بین الکترو مغناطیس و گرانش ویا به عبارت دیگر بین ماده و گرانش شکل یافت . در این پایان نامه مفهوم بعد اضافه (بعد پنجم) وماهیت فیزیکی آن با نگاهی به ویژگی های مختلف نظریه از جمله "*فشرده سازی* " و " *شرایط استوانه ای*" بررسی می شود.موضوع بعدی، برسی فرایند کلی بدست اوردن یک فضا-زمان چهار بعدی(باچشمه)،از یک فضا-زمان پنج بعدی خالص (بدون ماده)می باشد.همچنین به مطالعه نظریه، توسط دو سیال کامل متاثر از هم می پردازیم.در انتها، مسایل کیهانشناسی از قبیل تورم اولیه جهان وشتاب بعدی آن را برای یک سیال کامل با شرایط خنثی مورد مطالعه قرار می دهیم.

کلید واژه : کیهان شناسی – کلوزا – کلین- ماده تاریک

(Inflation in Kaluza - Klein Cosmology)

(Hamed Amiri)

Abstract:

The Kaluza-klein theory is a modification of Einstein four-dimensional General Relativity to five dimensional one in direction for unification between electromagnetic and gravity or in other words between matter and gravity. In this thesis we examine the meaning of extra (fifth) dimension and it's physical existence, by looking at various feature of the theory such as compactification and cylindrical condition. The general procedure to obtain a four-dimensional space-time (with source) from pure (without matter) five-dimensional space-time is our next target .In here we also study the theory in the presence of two interacting perfect fluids . Finally, for a perfect fluid and null condition we study the cosmological problems such as early inflation and late acceleration.

Key words: Kaluza-Klein, Cosmology, Dark Mater

مقدمه :

جهان مشاهدات روزمره ما سه بعدی است، اما سوال اینکه چرا باید این گونه باشد به کپلر برمی گردد ، کسی که فکر می کرد سه گانگی مقدس عامل سه گانگی طبیعت باشد. اغلب یافته های شامل پایداری مدارات سیارات و حالات پایه اتم و استفاده از امواج انتشارگر برای انتقال اطلاعات ، ثابتهای بنیادی طبیعت ، اصل آنتروپی، و همه بر این نتیجه مشترک که فضا از سه بعد مکانی ماکروسکوپی x^1 و x^2و x^3تشکیل شده ، توافق دارند .[۱]

با وجود این فیزیکدانها به شدت کنجکاو به بررسی بعد طبیعت بوده اند و دلیل مهم این که پدیده هایی که در فضای سه بعدی به سختی توضیح داده می شدند اغلب می توانند در منیفلد ابعاد بالاتر در تئوریهای ساده تر توضیح داده شوند.

از پیشگامان این زمینه می توان به مینکوسکی [۱] که در سال ۱۹۰۹ نشان داد که اگر زمان مشابه مکان به عنوان بخشی از منیفلد فضا- زمان چهارم بعدی یعنی $x^0 = ict$ در نظر گرفته شود، نظریه الکترومغناطیس ماکسول و نسبت خاص انشتین می تواند به شیوه هندسی درک شود.

با الهام از ایجاد ارتباط بین فضا- زمان چهار بعدی مینکوسکی و ایجاد وحدت بین الکترسیته و مغناطیس توسط ماکسول، نوردستروم [۲] در ۱۹۱٤ و کلوزا[۳] در۱۹۲۱،اولین هایی بودند که سعی در متحد کردن گرانش با الکترومغناطیس در یک نظریه پنج بعدی (x^0 تا x^4)بودند . هر دو این مرد بعدها با این سوال مواجه شدند که چرا بعد پنجم در طبیعت مشاهده نشده است ؟ تلاش کلوزا این بود که نشان دهد نسبیت عام پنج بعدی هر دو نظریه گرانشی چهار بعدی انشتین و نظریه الکترومغناطیس ماکسول را شامل می شود او بنابراین یک محدودیت ساختگی[٤] با عنوان « *شرایط استوانه ای* »[٥] را روی مختصات اعمال کرد و اساسا ظهور مستقیم روابط فیزیکی باعث حذف بعد پنجم می شود و همکاری کلین[٦] در فیزیکی تر کردن این محدودیت

---

[۱] Minkowski

[۲] Nordstrom

[۳] kaluza

[٤] -articifial

[٥] Cylinder condition

[٦] Klein

ساختگی با پیشنهاد یک پایه فیزیکی قابل قبول بود. این ایده به طرز جالبی به وسیله « نظریه میدانهای وحدت یافته »[۱] به دست آمد و زمان آنکه نیروهای ضعیف و قوی با بسط مکانیزم کلوزا به ابعاد بالاتر نیز متراکم [۲] شدند،خط فکری بود که بعد از آن به نظریه های ابرگرانشی و تئوری همه چیز و تئوری ابر ریسمان ۱۰بعدی منجر شد.

در این جا ما بیشتر از جنبه ذرات بنیادی موضوع به جنبه گرانشی وکیهان شناسی موضوع خواهیم پرداخت و نظریه کلوزا-کلین را با جزئیات بیشتری بررسی می کنیم و به نظر می رسد که فرایند متراکم سازی با فرایند ایجاد وحدت پیش برده خواهد شد و می توان ملاحظه کرد که تنها بین گرانش و اکترومغناطیس بلکه بین ماده و هندسه نیز می شود ایجاد وحدت نمود .در ادامه به نتایج مختلف این نظریه از جمله در فصل سوم که به بررسی حالت" غیر فشرده"[۳]

این نظریه می پردازدودر فصل چهارم ، کیهانشناسی کلوزا-کلین با ایده های مختلف متریکی پرداخته می شودو درفصلهای پنج وشش بابه کار گیری مناسب سیال کامل برای ماده کیهانی همراه با پیشنهادهای ارایه شده متریکی برای بررسی دوره های مختلف کیهان شناسی از جمله تورم اولیه جهان، به تطبیق این نظریه با نتایج مشاهداتی که تا به حال اثبات شده است پرداخته می شود.[۸-۱]

---

[۱] Unified field theory

[۲] compactified

[۳] noncompact

فصل اول (مفاهیم اولیه)

(۱-۱) نسبیت عام[۱]

فرم اصلی این نظریه که مربوط به انشتین است با ۱۰ پتانسیل بدون بعد که عناصر مستقل در تانسور متریک $g_{\alpha\beta}$ که$(\alpha,\beta=0-3)$ می باشند ساخته شده که مربع فاصله بین دو نقطه نزدیک در فضا- زمان چهار بعدی یعنی :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \qquad (۱-۱)$$

را تعریف می کند .(اندیسهای تکراری بالا و پایین معرف جمع بستن روی آنها می باشد) . مختصات x^α به صورت $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ تعریف می شود. (در مختصات کارتزین[۲]).

فضا و زمان دو موجود جدا از هم نیستند و با هم ترکیب شده اند و نقش سرعت نور C، به عنوان تبدیل بعد باشد در هر حال هر چهار تای x^α شبیه هم هستند و مشتقات نسبت به x^α با هم ترکیب شده و نماد کریستوفل $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ که برای ساختن مشتق هموردا[۳] کمک می کند را می سازد به طوری که مشتق بردار با $\nabla_\alpha V_\beta = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}V_\gamma$ داده می شود . از $g_{\alpha\beta}$ و مشتقات آن می توان تانسورریچی $(R_{\alpha\beta})$ واسکالرریچی R و تانسورانشیتن $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - Rg_{\alpha\beta}/2$. را بدست آورد. قرار است که دیوژرانس همودای $G_{\alpha\beta}$ ،صفر باشد : $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$ که ما را قادر به دیدن رابطه بین هندسه و ماده می سازد.تانسور انشتین $G_{\alpha\beta}$ با یک ثابت k به تانسور انرژی – ممنتوم $T_{\alpha\beta}$کوپل می شود $G_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta}$ که به معادله میدانی انشتین معروف است و ثابت k به صورت $k = 8\pi G/c^4$ می باشد . و در حالتی که میدان گرانش در فضای خالی یا خلاء باشد و در آنصورت $T_{\alpha\beta} = 0$و $G_{\alpha\beta} = 0$و معادل آن :

$$R_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha,\beta = 0-3) \qquad (۲-۱)$$

---

[۱] General Relativity

[۲] Cartesian

[۳] Covariant

در غیر این صورت می توان یک سیال کامل با چگالی ρ و فشار P با ویسکوزیته صفر و فشار مساوی در سه راستای فضایی فرض کردکه بنابراین تانسور انرژی – ممنتوم $T_{\alpha\beta}=\left(p+\rho c^2\right)u_\alpha u_\chi - pg_{\alpha\beta}$ که u_α سرعتهای چهار بعدی است باید دیوژرانس صفر داشته باشد.

معادلات پیوستکی و حرکت سه راستای فضایی مشتق هموردا با تانسور متریک مثل یک ثابت رفتار می کند بنابراین این امکان که یک جمله مناسب به طرف چپ یا راست معادله اضافه کرد که اینجا Λ ثابت کیهانی است:

$$G_{\alpha\beta}=R_{\alpha\beta}-\frac{Rg_{\alpha\beta}}{2}+\Lambda g_{\alpha\beta}=\frac{8\pi G}{c^4}\left[\left(p+\rho c^2\right)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta}\right] \qquad (۳-۱)$$

در حالتی که $T_{\alpha\beta}=0$ یا حالت خلاء چگالی و فشار به صورت :

$$\rho_v=\frac{\Lambda}{8\pi G} \quad , \quad P_v=-\frac{\Lambda}{8\pi G} \qquad (c^2=1) \qquad (۴-۱)$$

معادله حالت در خلاء به صورت $p_v=-\rho_v$ خواهد بود. [۳-۱]

(۱-۲)مدل فریدمن-رابرتسون-والکر[۱](FRW):

برای یک سیال همگن[۲] و یکنواخت[۳] معادلات انشتین به دو رابطه معروف فریدمن کاهش می یابد :

$$8\pi G\rho=\frac{3}{R^2}\left(kc^2+\dot{R}^2\right)-\Lambda c^2 \qquad (۵-۱)$$

$$8\pi Gp=-\frac{1}{R^2}\left(kc^2+\dot{R}^2+2\ddot{R}R\right)+\Lambda c^2$$

[۱] Friedmann-Robertson-Walker

[۲] Homogeneous

[۳] Isotropic

که $k=\pm 1,0$ ثابت انحنا می باشد که ($k=0$) حالت تخت و ($k=-1$) حالت باز و($k=+1$) حالت بسته انحنا را مشخص می کند. ساده ترین حالت مدل انشتین- دوسیتر[1] که مربوط به $k=0$, $\Lambda=0$, $\rho=\frac{1}{6\pi Gt^2}$ و $p=0$ و فاکتور مقیاس[2]، $R(t)\propto t^{\frac{2}{3}}$ می باشد. [۳-۵]

در حالتی کلی جوابهای (۱-٤) مربوط به مدل فریدمن- رابرسون- ولکر (FRW) می باشد.

که اینها نام اشخاصی اند که متریکی برای مدلهای کیهان شناسی یکنواخت بدست اوردند این متریک درحالت ایزوتروپیک و غیرایزوتروپیک به صورت:

$$ds^2=c^2dt^2-\frac{R^2(t)}{\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^2}\left[dr^2+r^2d\Omega^2\right] \qquad (۱-٦)$$

$$ds^2=c^2dt^2-R^2(t)\left[\frac{dr^2}{\left(1-kr^2\right)}+r^2d\Omega^2\right].$$

که در آن $d\Omega^2=d\theta^2+\sin^2\theta d\Phi^2$ می باشد . [۳]

(۱-۳)مدل دوسیتر(De sitter):

این مدل که جوابی است برای معادلات انشتین بعد از (Willem de sitter)به این نام نامیده شد,که جهان را تخت وبدون ماده معمولی در نظر گرفت.به طوری که عامل دینامیک جهان را وجود یک ثابت کیهانی Λدر نظر گرفت,ایده ای که مطابق با انرژی تاریک بود.جهان دسیتر که هیچ محتوای مادی معمول ندارد اما شامل یک ثابت کیهانی Λ مثبت است که متناسب با آهنگ انبساط جهان میباشد .

$$H\propto\frac{\sqrt{\Lambda}}{M_{pl}} \qquad (۱-۷)$$

[1] De sitter

[2] Scale factor

که در ان M_{pl}جرم پلانک می باشد.یک ثابت کیهانی بزرگ به یک آهنگ انبساط بزرگ منجر میشودو برای توضیح بخشی از آن به عنوان مدل (FRW)با $a(t)=e^{Ht}$بیان میشود. با توجه به اینکه نظریه کلوزا- کلین به عنوان یکی از نظریات ابعاد بالاتر در فصول بعدی مورد بحث قرار گرفته است خالی از لطف نیست که اینجابه یک قضیه مهم اشاره ای شود:[۹]

(۱-٤)قضیه کمپل(Campbell's theorem):

اهمیت قضیه کمپل, فراهم کردن یک روش جبری برای بالا وپایین رفتن از نردبان ابعادی نظریه های میدانی شبیه نسبیت عام که روی هندسه ریمانی پایه گذاری شده اند،می باشد. این قضیه بیان می کند که هر فضای ریمانی V_n می تواند در یک فضای ریمانی ریکی-تخت V_{n+1} ($R_{AB}=0$) جا سازی شود.که در اینجا تمرکز ما روی $n=4$می باشد.[۸]

فصل دوم(نظریه کلوزا-کلین):

(۲-۱) ایده های بنیادی نظریه:

پدیده های تجربی چون الکترومغناطیس که تحت تبدیلات لورنتس[۱] ناوردا[۲] هستند توانسته اند در یک مختصات چهار بعدی ناوردا بیان شوند ولی هیچ مشاهده ای به بعد پنجم اشاره نکرده است بنابراین نوردستروم و کلوزا از این سوال طرفه رفتند و برای سادگی کلیه مشتقات نسبت به x^4 (بعد پنجم)را حذف کردند و به بیان دیگر فیزیک به دلیل نامعلوم فقط به فضا- زمان چهار بعدی بستگی داشت. با این فرض که بدست آوردن معادلات میدان الکترومغناطیس و گرانش از یک نظریه پنج بعدی ساده تر باشد، نوردستروم یک پتانسیل گرانشی اسکالر را فرض کرد در حالی که کلوزا تانسورپتانسیل انشتین را به کاربرد و ثابت کرد که نسبیت عام وقتی به صورت یک نظریه پنج بعدی در خلاء بیان می شود (یعنی $G_{AB}=0$ که A,B شامل $0,1,2,3,4$ است). [۷-۱]

آنگاه شامل نسبیت عام چهار بعدی در حضور الکترومغناطیس (یعنی $G_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}^{EM}$ که β,α شامل $(0,1,2,3)$ و به اضافه قوانین اکترومغناطیس ماکسول خواهد بود. ایده های گوناگونی برای طرح پنج بعدی کلوزا مطرح شد که شامل ایده کلین برای فشرده سازی بعد اضافه (که در اینجا بحث خواهیم کرد) و ایده هایی که توسط انشتین ، جوردن[۳]، برگمن[۴] و خیلی از دیگران در این سالها پیشنهاد شد.اما آن به بیشتر از پنج بعد تا زمان کشف نیروهای ضعیف وقوی هسته بسط نیافت.آنچه واضح بود اینکه این نیروهای جدید برهمکنش ضعیف وقوی چگونه می توانستند با الکترومغناطیس و گرانش با همان روش متحد شوند.[۱]

کلید حل این داستان در مفهوم "ناوردای پیمانه ای[۵]"است ،که همه برهم کنش های فیزیک را می توانست پوشش دهد.برای مثال الکترو دینامیک توانست با اعمال ناوردای پیمانه ای $U(1)$بر روی لاگرانژین ذره آزاد بدست اید از دیدگاه ناوردایی پیمانه

---

[۱] Lorentz transformation

[۲] Invariance

[۳] Jordan

[۴] -Bergman

[۵] gauge invariance

ای شاهکار کلوزا دراستخراج الکترومغناطیس ازگرانش پنج بعدی زیاد تعجب برانگیز نبود چرا که ناوردای پیمانه ای $U(1)$ درکسوت ناوردایی نسبت به تبدیل مختصات درامتداد بعد پنجم درمعادلات انشتین اضافه شده بود.[۱]

به عبارت دیگرتقارن پیمانه ای به عنوان تقارن هندسی فضا-زمان توضیح داده می شد.میدان الکترودینامیک بعدا به عنوان بردار "میدان پیمانه ای"[۱]درچهاربعدظاهرشد.وآن طبیعی بود که این مفهوم باتقارن کاملتری به گروهها بسط یابد.دویت[۲] در۱۹۶۳،اولین کسی بودکه پیشنهاد متحد کردن گروه پیمانه ای وغیر آبلی $SU(2)$ یانگ و میلز[۳] درنظریه $(4+d)$بعدی کلوزا-کلین راداد.

(۲-۲)سه وجه اساسی نظریه :

ما به سه خاصیت کلیدی همه مدلهای بحث شده تاکید می کنیم (i) هندسه خالص[۴] به معنی عدم وجود تانسور انرژی-ممنتوم (ii)حداقل بسط نسبیت عام که به معنی آن است که در ساختار ریاضی نظریه انشتین تغییری صورت نمی گیرد تنها تغییر در اندیسهای تانسورها و به صورت ۰تا ٤ به جای ۰تا ۳ می باشد (iii) قیاس استوانه ای[۵] : هیچ مکانیزمی پیشنهاد نشده که توضیح دهد چرا فیزیک فقط به چهار مختصه اول بستگی دارد و نه به بعد اضافه (پنجم).

(۲-۳)مکانیزم کلوزا :

معادلات انشتین در پنج بعد بدون وجود ماده به صورت زیر می باشد:

$$G_{AB}=0 \qquad (۲-۱)$$

$$\hat{R}_{AB}=0 \qquad (۲-۲)$$

---

[۱] gauge field

[۲] De witt

[۳] Yang and Mills

[۴] pure geometry

[۵] priori cylindrical

به طوری که $\hat{G}_{AB} = \hat{R}_{AB} - \frac{1}{2}\hat{R}\hat{g}_{AB}$ تانسور انشتین و $\hat{R} = \hat{g}_{AB}\hat{R}^{AB}, \hat{R}_{AB}$ به ترتیب تانسور ریچی واسکالرریچی در پنج بعد می باشد و $\hat{g}_{AB}$ تانسورمتریک پنج بعدی می باشد(توجه به این نکته که اندیس های لاتین بزرگ B و A به صورت ٤،٣،٢،١و٠ کمیتهای پنج بعدی با (^)[1] مشخص شده اند این کمیتها می توانند با تغییرات[2] یک کنش[3] انشتین پنج بعدی نسبت به متریک پنج بعدی که به صورت:

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int \hat{R}\sqrt{-\hat{g}}\, d^4x dy \qquad (٢-٣)$$

که $y = x^4$ مختصه پنجم جدید را بیان می کند و $\hat{G}$ یک ثابت گرانش پنج بعدی است.فقدان ماده در این معادلات آنچه را که ما به عنوان کلیدی کلوزا تاکید می کنیم توسط انشتین الهام شد که « جهان در ابعاد بالاتر خالی است» این ایده ماده در چهار را به عنوان نمودی از هندسه خالی (بدون ماده) در ابعاد بالاتر می باشد.[٢] ,[١]

(٢-٤)کمینه تعمیم نسبیت عام[4] :

تانسور یکی و نماد کریستوفل پنج بعدی شبیه چهار بعدی به وسیله متریک تعریف می شود :

$$\hat{R}_{AB} = \partial_C \hat{\Gamma}^C_{AB} - \partial_B \hat{\Gamma}^C_{AC} + \hat{\Gamma}^C_{AB}\hat{\Gamma}^D_{CD} - \hat{\Gamma}^C_{AD}\hat{\Gamma}^D_{BC} \qquad (٢-٤)$$

$$\hat{\Gamma}^C_{AB} = \frac{1}{2}\hat{g}^{CD}\left(\partial_A \hat{g}_{DB} + \partial_B \hat{g}_{DA} - \partial_D \hat{g}_{AB}\right) \quad .$$

توجه شود که اندیس تانسور از ٠ تا ٤ به جای ٠تا ٣ تغییر می کند اما همه دقیقا همانطور که در نظریه انشتین است می باشد ما این را به عنوان دومین وجه اساسی (ii) نظریه کلوزا تاکید می کنیم.

---

[1] Hat

[2] Varying

[3] Action

[4] Minimal Extension

اکنون همه چیز به انتخاب متریک پنج بعدی وا بسته است . عموما تانسور متریک چهار بعدی به وسیله $g_{\alpha\beta}$ به عنوان قسمت- $\alpha\beta$ متریک $\hat{g}_{AB}$ و قسمت $\alpha 4$ با A_α (پتانسیل الکترومغناطیس)وقسمت٤٤ با ϕ (میدان اسکالر) مشخص می شود. یک راه مناسب برای پارامتری کردن آنچه گفته شد:[۷] , [٦] , [۱]

$$(\hat{g}_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + \kappa^2\phi^2 A_\alpha A_\beta & \kappa\phi^2 A_\alpha \\ \kappa\phi^2 A_\beta & \phi^2 \end{pmatrix} \qquad (۲-۵)$$

برای ساده سازی k یک ثابت می باشد و اندیسهای یونانی α,β شامل ۰تا ۳ و اندیسهای لاتین کوچک b و a به صورت ۳و۲و۱ تغییر می کنند. علامت متریک چهار بعدی به صورت (---+) گرفته می شود و برای ساده سازی $c=1,\hbar=1,G=1$می باشد .

(۲-۵)شرایط استوانه ای:

اگر سومین وجه کلیدی نظریه کلوزا (*iii*) یعنی شرایط استوانه ای به کار گرفته شود که به معنی حذف کردن همه مشتقات نسبت به مختصه پنجم است آنگاه با استفاده از متریک (۲-۵)و تعاریف (۲-٤) عناصر $\alpha\beta$ و α ٤ و ٤٤ معادله میدانی پنج بعدی (۲-۲) به ترتیب به معادلات میدانی زیر در چهار بعد کاهش می یابد.

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\kappa^2\phi^2}{2} T^{EM}_{\alpha\beta} - \frac{1}{\phi}[\nabla_\alpha(\partial_\beta\phi) - g_{\alpha\beta}\Box\phi] \qquad (۲-٦)$$

$$\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = -3\frac{\partial^\alpha\phi}{\phi} F_{\alpha\beta} \quad , \quad \Box\phi = \frac{\kappa^2\phi^3}{4} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

که $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ تانسورانشتین و $T_{\alpha\beta}{}^{EM} = g_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} / 4 - F_{\alpha}{}^{\delta} F_{\beta\gamma}$ تانسور انرژی- ممنتوم الکترومغناطیسی است و $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ کلا $10+4+1=15$ معادله وجود دارد همانطور که ۱۵ عنصر مستقل در متریک پنج بعدی (۲-۵) می باشد. [۷] , [٦] , [۱]

(۲-۵-۱)حالت ϕ ثابت :

اگر میدان اسکالر یک ثابت درفضا – زمان باشد آنگاه دو معادله اول (۲-٦) همان معادلات انشتین و ماکسول می باشد.

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G \phi^2 T_{\alpha\beta}^{EM} \quad , \quad \nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 0 \tag{۲-۷}$$

که ماپارامتر k را به وسیله ثابت گرانشی G در چهار بعد به صورت :

$$\kappa \equiv 4\sqrt{\pi G} \tag{۲-۸}$$

تعریف می کنیم. این نتیجه اصالتا توسط کلوزا وکلین بدست آمد که با قرار دادن (ϕ=۱) همان چیزی که توسط بعضی از محققان بعدی با به کار بردن سیستم مختصات ویژه[۱] انجام گرفت. شرایط(ثابت = ϕ) زمانی با سومین معادله میدانی توافق دارد که $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0$ باشد.

امروزه معمولا همین عملیات به زبان تغییرات انجام می گیرید ، با استفاده از متریک (۲-۵) و تعاریف (۲-٤) و شرایط استوانه ای نه فقط در حذف کردن مشتقات نسبت به y (بعد پنجم) بلکه اغلب برای بیرون گذاشتن $\int dy$ از انتگرال کنش اعمال می شد که G بر حسب $\hat{G}$ پنج بعدی تعریف می شود :

$$G \equiv \hat{G} / \int dy \tag{۲-۹}$$

$$S = -\int d^4x \sqrt{-g}\, \phi \left(\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{4}\phi^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{2}{3\kappa^2} \frac{\partial^\alpha \phi\, \partial_\alpha \phi}{\phi^2} \right) \tag{۲-۱۰}$$

[۱] special coordinate system