بسم الله
الرحمن
الرحيم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی-آنالیز عددی

عنوان

حل عددی معادلات انتگرال با هسته‌های لگاریتمی توسط چندجمله‌ای‌های متعامد

نگارش

رضیه محمودی اختیار

استادان راهنما

دکتر عظیم امین عطایی- دکتر محمود هادیزاده یزدی

۱۳۹۲

اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان نامه: حل عددی معادلات انتگرال با هسته‌های لگاریتمی توسط چندجمله‌ای‌های متعامد

استاد راهنما: دکتر عظیم امین عطایی- دکتر محمود هادیزاده

نام دانشجو: رضیه محمودی اختیار

شماره دانشجویی: ۹۰۰۷۸۶۴

اینجانب رضیه محمودی اختیار دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ریاضی گرایش کاربردی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در موارد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. بعلاوه گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان نامه چارچوب (فرمت) مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تقدیم

با عشق بی پایان

به پدر و مادر عزیزم،

و همسر مهربانم

سپاس

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار او بر چهره روز روشن تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درخشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمر و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خودش را در طریق علم و معرفت بیازماید. خداوندی که بر هر نعمت حق سپاسی بر بندگان مقدر فرموده است.

با قدردانی از دو وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سفید شد تا ما رو سفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدر و مادر عزیزم.

چکیده

این پایان نامه مبتنی بر حل عددی معادلات انتگرال ولترای نوع دوم منفرد ضعیف با هسته‌های لگاریتمی با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد می‌باشد. هدف ما از انجام این رساله، بررسی حل عددی این نوع معادلات، با استفاده از روش بسط متناهی چندجمله‌ای‌های چبیشف و لژاندر [۷، ۸]، و نیز تحلیل خطا و همگرایی آنها می‌باشد. در نهایت نتایج عددی و همگرایی این دو روش با برخی روش‌های عددی از جمله روش هم‌محلی با چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای پیوسته برانر [۱۳]، برای این نوع معادلات مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرد. مبنای کار این رساله مبتنی بر مراجع [۷، ۸] می‌باشد.

کلمات کلیدی

معادلات انتگرال ولترا؛ هسته لگاریتمی؛ چندجمله‌ای لژاندر؛ چندجمله‌ای چبیشف؛ روش هم‌محلی با چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای پیوسته

.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست جداول

عنوان صفحه

فهرست تصاویر

عنوان صفحه

مقدمه

معادلات انتگرال با هسته‌های منفرد ضعیف در بسیاری از مسائل فیزیک ریاضی، مکانیک کاربردی، فیزیک کوانتوم، مطالعه‌ی واکنش‌های شیمیایی، الکتروشیمی، مکانیک سیالات و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد. تعیین جواب‌های عددی این دسته از معادلات، به خصوص فرم غیر خطی آن دارای پیچیدگی‌های بسیاری می‌باشد. هسته‌های لگاریتمی از جمله مشخصه‌های بارز این دسته از معادلات می‌باشد که در سالیان اخیر مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. از جمله برانر روشی بر اساس توابع اسپلاین [۱]، اُرسی و باراتلا روش انتگرال‌گیری ضربی را بر اساس چندجمله‌ای‌لژاندر [۲۱] و تانگ روشی مبتنی بر نقاط هم‌محلی چبیشف برای حل معادلات منفرد ضعیف خطی با هسته‌های لگاریتمی ارائه کرده‌اند [۴۲]. روش‌های حل فرم غیرخطی این دسته از معادلات نیز اساساً همان روش‌های ارائه شده برای فرم خطی است، اما محققان با ایجاد تغییراتی در روش‌های قبلی سعی در بهبود جواب داشته‌اند. به عنوان مثال برانر و همکارانش روش هم‌محلی با چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای پیوسته را مد نظر قرارداده‌اند [۱۳]، تائو و یانگ در ابتدا قاعده‌انتگرال‌گیری موسوم به نیوات و سپس برونیابی ریچاردسون را برای بهبود جواب‌ها در روش خود به کار برده‌اند [۱۶]. در سال‌های ۲۰۰۷ و ۲۰۰۸ نیز روش بسط متناهی چندجمله‌ای‌های چبیشف و لژاندر برای حل معادلات انتگرال غیر خطی ولترای نوع دوم منفرد ضعیف توسط خاتر و همکارانش در [۷، ۸] ارائه شده است. یکی از تکنیک‌های مهم جهت حل معادلات انتگرال منفرد ضعیف، استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد برای تقریب قسمت انتگرالی معادله است. استفاده از این چندجمله‌ای‌ها علاوه بر کاهش بعد دستگاه معادلات غیر خطی بدست آمده در مرحله نهایی، دقت محاسبات را افزایش و زمان آن را کاهش می‌دهد.

در فصل اول این پایان نامه ابتدا به مفاهیم اولیه مرتبط با معادلات انتگرال ولترا نوع دوم با هسته‌های منفرد ضعیف

می‌پردازیم، سپس قضایا و تعاریف اولیه‌ی مورد نیاز را بیان می‌کنیم. در فصل دوم به معرفی اجمالی چندجمله‌ای‌های متعامد و مبحث انتگرال‌گیری عددی می‌پردازیم. در فصل سوم روش‌های حل تحلیلی و عددی معادلات انتگرال منفرد بیان می‌شود و در نهایت در فصل چهارم به شرح روش بسط چندجمله‌ای‌های چبیشف و لژاندر برای حل عددی معادلات انتگرال ولترای نوع دوم منفرد ضعیف با هسته‌های لگاریتمی پرداخته‌ایم و نتایج عددی این روش را با برخی روش‌های عددی دیگر از جمله روش هم‌محلی با چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای پیوسته [۱۳] مقایسه کرده‌ایم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه و پیش نیازها

۱-۱ تاریخچه معادلات انتگرال و معادلات انتگرال منفرد

معادلات انتگرال اغلب در ریاضیات، فیزیک همانند دینامیک سیالات و فیزیک پلاسما، به کار می‌رود. این پدیده به طور نمونه، زمانی اتفاق می‌افتد که یک پدیده یا کمیت در بعضی از زمان‌ها (مکان‌ها)، وابسته به همه زمان‌های (مکان‌های) قبلی باشد. این مسأله منجر به معادله انتگرال می‌شود. در این حالت معادله پوآسون، پتانسیل را با چگالی بار مرتبط می‌کند [۸]. از دیگر کاربردهای معادلات انتگرال می‌توان به پتانسیل الکتریکی روی لبه یک دیسک واحد، مسأله جمعیت بشر، مسأله فرسوده شدن تجهیزات و نرخ جایگزینی آن، مسأله پیچش یک سیم، مسأله کنترل و انحراف اتوماتیک یک شیفت یا محور در حال چرخش، علوم کاربردی چون مکانیک، علوم ارتباطات، پتروشیمی، ساختمان و پل سازی، لیزر، نیروگاه‌های هسته‌ای، راکتورها، تئوری امواج، الکترونیک، معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی اشاره کرد [۹]. از دیدگاه تاریخی، پیدایش معادلات انتگرال به سال‌های ۱۷۸۲ برمی‌گردد، به طوری که بسیاری از منابع ریاضی و تاریخ ریاضیات، لاپلاس را بنیان‌گذار این شاخه از ریاضیات معرفی می‌کنند. در بعضی از منابع، آغاز توسعه معادلات انتگرال، دوران گذار از قرن ۱۹ به ۲۰ می‌باشد. افرادی چون فوریه در سال‌های ۱۸۱۱ و ۱۸۲۲، آبل و پوآسون در سال ۱۸۲۶، لیوویل در سال ۱۸۳۲، بعد از وی نیومن در سال ۱۹۷۰، پوآنکاره و ولترا در سال ۱۸۹۶ و فردهلم در سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۳، نقش بسزایی در زمینه معادلات انتگرال داشتند. همچنین هیلبرت نیز تحقیقاتی در مورد معادلات انتگرال انجام داد و مسائل معادلات دیفرانسیل را بصورت یک معادله انتگرال، تنظیم نمود. او اولین کسی بود که معادلات انتگرال را به دو رده ی نوع اول و نوع دوم تقسیم کرد و توانست روشی مبتنی بر سری‌های توانی، برای حل این معادلات کشف کند. یکی از مهمترین نتایج هیلبرت در سال‌های ۱۹۰۴ و ۱۹۰۵، فرمول بندی مسأله مقدار مرزی اشتورم–لیوویل، [۱] به صورت یک معادله انتگرال بود. از سال ۱۹۸۵ به بعد، ریاضیدانان معاصری نظیر پ.لینز، ر.کرس و ک.اتکینسون به ترتیب به گردآوری روش‌های عددی حل معادلات انتگرال، اثبات قضایای وجود، یکتایی و پیوستگی جواب‌ها و پایداری عددی و همگرایی این روش‌ها، پرداخته‌اند. نوع خاصی از معادلات انتگرال ولترا با هسته‌های منفرد ضعیف، [۲] در بسیاری از مسائل مدل‌سازی در ریاضی فیزیک، انتقال گرما، الکتروشیمی، تابش گرما از ماده جامد [۱۲] و بسیاری از مسائل کاربردی دیگر به وجود می‌آیند. در سال‌های اخیر این نوع از معادلات، در بسیاری از مقالات از جمله [۱۷]–[۱۳]، مورد

---

[۱] Sturm Liouville

[۲] Weakly Singular Kernels

توجه قرار گرفته‌اند. معادله انتگرال ولترا نوع دوم با هسته منفرد ضعیف زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = g(x) + \int_{\circ}^{x} p(x,t)K(x,t,f(t))dt, \quad x \in [\circ, T], \tag{۱-۱}$$

که در آن $p(x,t)$، می‌تواند به یکی از دو صورت زیر ظاهر شود:

(۱) $p(x,t) = |x-t|^{-\alpha}, \quad \circ < \alpha < ۱$،

(۲) $p(x,t) = \log|x-t|$.

حل پذیری این نوع از معادلات و معادلات مربوطه‌ی دیگر، توسط نویسندگان زیادی بررسی شده است. وجود و یکتایی جواب (۱-۱)، در سال ۱۹۸۲، توسط کرشو با استفاده از قضیه نقطه ثابت باناخ اثبات شده است [۱۸]. همچنین او با استفاده از فرمول درونیابی خطی لاگرانژ، یک روش هم‌محلی برای حل این نوع از معادلات ارائه و همگرایی جواب تقریبی را با مرتبه همگرایی پایین ارائه نمود. برانر با توجه به افرازهای شبه یکنواخت، [۱] ثابت کرد که مرتبه همگرایی روش هم‌محلی با استفاده از چندجمله‌ای اسپلاین، $۱-\alpha$ می‌باشد [۱]. وزواز و خاری برای حل معادلات غیر خطی منفرد ضعیف از نوع آبل، روش تجزیه آدومیان را استفاده کردند که جواب به صورت یک سری هندسی همگرا، تقریب زده می‌شود [۱۷]. برانر و همکارانش از روش هم‌محلی با چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای پیوسته، استفاده کرده و با استفاده از نقاط هم‌محلی خاصی، مرتبه همگرایی سراسری [۲] و ابر همگرایی [۳] را در نقاط هم‌محلی بررسی کرده‌اند [۱۳]. تائو و یانگ نیز با استفاده از قاعده انتگرال نیوات [۴]، که مخصوص تقریب انتگرال‌هایی است که تابع زیر انتگرال در نقاط انتهایی منفرد می‌باشند، قسمت انتگرالی معادله انتگرال را تقریب زده و سعی در بهبود نتایج داشتند. همچنین ثابت کردند که خطا از مرتبه $O(h^{۲-\alpha})$، می‌باشد [۱۹]. اُرسی روش انتگرال‌گیری حاصل‌ضربی را برای حل فرم خطی (۱-۱)، ارائه کرده است [۲۰]. همچنین باراتلا و اُرسی برای حل فرم خطی (۱-۱)، از روش انتگرال‌گیری حاصل‌ضربی سیمپسون استفاده کردند و به نتایج مناسبی دست یافته‌اند [۲۱]. خاتر و همکارانش نیز از بسط متناهی چبیشف [۴]، برای حل معادله انتگرال با

[۱] quasi-uniform meshes

[۲] global convergence

[۳] super convergence

[۴] Navots quadrature

هسته‌های لگاریتمی و بسط متناهی لژاندر [۲۲]، برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل با هسته‌های لگاریتمی، استفاده کرده‌اند که به ترتیب به روش‌های چبیشف یک گامی ν مرحله‌ای و لژاندر یک گامی ν مرحله‌ای موسوم می‌باشند.

۱-۲ مروری بر معادلات انتگرال

معادله‌ای که در آن تابع مجهول در زیر یک یا چند علامت انتگرال قرار بگیرد، معادله انتگرال نامیده می‌شود. معادله انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$h(x)f(x) = g(x) + \lambda \int_a^{b(x)} k(x,t)G(t,f(t))dt, \qquad (۱-۲)$$

که در آن $f(x)$ تابع مجهول و توابع $g(x)$، $k(x,t)$ و $G(t,f(t))$، توابع معلوم هستند. تابع $k(x,t)$، یک تابع دو متغیره حقیقی یا مختلط بوده که هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود. معادلات انتگرال به دو گروه اصلی فردهلم و ولترا تقسیم می‌شوند:

- معادله انتگرالی که در آن حدود انتگرالگیری ثابت باشد، معادله انتگرال فردهلم نامیده می‌شود. به عنوان نمونه، در معادله انتگرال (۱-۲)، فرض کنید $b(x) = b$.

- معادله انتگرالی که در آن حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری متغیر باشد، معادله انتگرال ولترا نامیده می‌شود. به عنوان نمونه، در معادله انتگرال (۱-۲)، فرض کنید $b(x) = x$.

معادلات ولترا حالت خاصی از معادلات فردهلم هستند زیرا می‌توانیم هسته معادله انتگرال را وقتی $x < t < b$، مساوی صفر تعریف کنیم. دو گروه دیگر از معادلات انتگرال، معادلات خطی و غیر خطی می باشد.

- معادله انتگرالی که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال، به صورت خطی باشد معادله انتگرال خطی می‌نامند.

- معادله انتگرالی که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال، به صورت غیرخطی باشد معادله انتگرال غیرخطی می‌نامند.

معادلات انتگرال خطی و غیر خطی دسته مهمی از معادلات انتگرال را تشکیل می‌دهند، اما از آنجایی که بسیاری از معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی به معادلات انتگرال غیر خطی تبدیل می‌شود، لذا این دسته از

معادلات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بسیاری از معادلات انتگرال غیر خطی با روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند. لذا به کارگیری روش‌های عددی برای حل این نوع از معادلات از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. دو حالت خاص از معادلات انتگرال غیرخطی، معادله‌ی یوریسون، [۱]

$$f(x) = g(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,t,f(t))dt,$$

و معادله هامرشتاین، [۲]

$$f(x) = g(x) + \int_{a}^{b} k(x,t)G(t,f(t))dt,$$

می‌باشد.

۱-۲-۱ نقش هسته در یک معادله انتگرال

معادله انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = g(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,t)G(t,f(t))dt,$$

تابع دومتغیره $k : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{C}$ هسته معادله نامیده می‌شود و نقش اساسی در تعیین روش‌های تحلیلی حل یک معادله انتگرال بر عهده دارد. برخی از انواع هسته‌های معادله انتگرال به صورت زیر می‌باشند:

۱. هسته تبهگن(جدایی پذیر): هسته‌ای که بتوان آن را به صورت مجموع حاصل‌ضرب توابع تک متغیره نوشت:

$$k(s,t) = \sum_{i=۱}^{n} X_i(t)Y_i(s),$$

که در آن مجموعه‌های $\{X_i(t)\}_{i=۱}^{n}$ و $\{Y_i(s)\}_{i=۱}^{n}$ مستقل خطی می‌باشند.

۲. هسته هرمیتی: هسته $k(s,t)$، را هرمیتی گویند، هرگاه $k(t,s) = \bar{k}(s,t)$، که در آن (−) علامت مزدوج مختلط تابع است.

[۱] Urysohn equation

[۲] Hammerstein equation

۳. هسته نرمال: هسته $k(s,t)$، را نرمال گویند، هرگاه $kk^* = k^*k$، که در آن $k^*(t,s)$ همان $\bar{k}(s,t)$ می‌باشد.

۴. هسته تفاضلی(پیچشی): $k(t,s) = k(t-s)$

۵. هسته آبلی: این هسته‌ها از جمله هسته‌های منفرد ضعیف بوده که به صورت زیر می‌باشند:

$$k(t,s) = \frac{1}{(t-s)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

۶. هسته کوشی: این هسته‌ها نیز از جمله هسته‌های منفرد بوده که به شکل زیر هستند:

$$k(t,s) = \frac{1}{(t-s)},$$

۷. هسته لگاریتمی: نوع دیگری از هسته‌های منفرد ضعیف، هسته‌های لگاریتمی می‌باشند:

$$k(t,s) = \ln|x-y|$$

تعریف ۱-۲-۱. هسته k یک، هسته L^2 نامیده می‌شود هرگاه، سه شرط زیر برقرار باشد:

۱. $\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dtds < \infty \quad : \forall t \& \forall s$،

۲. $\int_a^b |k(t,s)|^2 ds < \infty \quad : \forall t$،

۳. $\int_a^b |k(t,s)|^2 dt < \infty \quad : \forall s$.

همچنین وقتی $k \in L^2$، نرم آن چنین تعریف می‌شود:

$$\|k\|^2 = \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dtds.$$

۱-۲-۲ معادلات انتگرال منفرد

معادله انتگرالی که هسته آن دارای نقطه یا نقاط تکین [1] در بازه انتگرال‌گیری باشد، یا معادله دارای بازه انتگرال‌گیری نامتناهی باشد، معادله انتگرال منفرد نامیده می‌شود. از جمله معادلات انتگرال منفرد کلاسیک، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

[1] Singular points

۱. معادله انتگرال آبل:

$$f(x) = \int_a^b \frac{f(y)}{(x-y)^\alpha} dy \qquad 0 < \alpha < 1$$

۲. معادله انتگرال کوشی:

$$f(x) = g(x) + \int_a^b \frac{f(y)}{x-y} dy$$

۳. توسیع معادله کوشی(معادله کارلمان):

$$\alpha(x)f(x) = g(x) + \int_a^b \frac{f(y)}{x-y} dy$$

۴. معادله انتگرال با هسته لگاریتمی:

$$f(x) = g(x) + \int_a^b \ln|x-y| f(y) dy$$

۵. معادله انتگرال $Wiener - Hopf$:

$$f(x) = g(x) + \int_a^{+\infty} k(x-y) f(y) dy$$

اگر هسته معادله در بازه انتگرال‌گیری بیکران باشد و با یک تغییر متغیر مناسب به هسته کراندار تبدیل شود، معادله انتگرال، منفرد ضعیف و در غیر اینصورت، منفرد قوی [1] نامیده می‌شود. معادلات انتگرال آبل و لگاریتمی، از جمله معادلات منفرد ضعیف و معادلات انتگرال کوشی، از جمله معادلات منفرد قوی می‌باشند.

۱-۲-۳ مقدار اصلی کوشی

در این قسمت به منظور استفاده از مفاهیم مقدار اصلی کوشی برای حل تحلیلی برخی معادلات انتگرال منفرد نظیر معادلات کوشی و لگاریتمی، به طور مختصر به توضیح مفهوم مقدار اصلی کوشی [۳۹] می‌پردازیم. انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \quad a < c < b \tag{۱-۳}$$

[1] Hypersingular kernel